BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE
201
37 C
15

Digitized by Google

Digitized by Google

RENATI DES CARTES
GEOMETRIA,

Unà cum Notis

FLORIMONDI DE BEAUNE,

In Curia Bleſenſi Conſiliarii Regii, & Commentariis illuſtrata,

Operâ atque ſtudio

FRANCISCI à SCHOOTEN,

in Acad. Lugd. Batav. Matheſeos Profeſſoris.

AB EODEM DUM VIVERET DILIGENTER RECOGNITA, locupletioribus Commentariis inſtructa, multisque egregiis acceſſionibus, tam ad ulteriorem explicationem, quàm ad ampliandam hujus Geometriæ excellentiam facientibus exornata.

Nunc verò à Viro Clariſſ. denuo reviſa, & ab innumeris mendis, quibus priores Editiones ſcatebant, repurgata, unà cum notis quibusdam & animadverſionibus tumultuariis in univerſum Opus, huic quartæ editioni recens adjectis.

Accedit inſuper

COMPENDIUM MUSICÆ.

Cum Gratia & Privilegio Sacræ Cæſ. Majeſt.



BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

FRANCOFVRTI AD MOENVM,

Sumptibus FRIDERICI KNOCHII, Bibliop.

Anno M. DC. XCV.

veneramur, felicisſimè tempore breviſſimo perveneris. Singularem tuum in Mathematicis profectum non eſt quòd hic commemorem; cum majorum tuorum exemplo, laudatisſimæque memoriæ Principum, qui ſanguinis vinculo tibi fuêre juncti, atque ex harum artium cultura immortalem ſibi gloriam reportarunt, eas non minùs colas, quàm hæreditatis jure in iisdem excellas. Quippe quæ in earum adyta ita penetraſti, ut Artem Analyticam, ipſam in Mathematicis inveniendi viam, in qua ingenii præſertim acumen requiritur, optimè co-

gnoveris, eâque ratione, quantum incomparabilis ingenii tui induſtria præſtare valeat, ſatis ſuperque oſtenderis. Quæ cum ita ſint, atque inſuper in me ipſo compertum habeam, quanto favore Matheſeos cultores proſequaris; jure meritiſſimo effecêre, ut publicum hoc tanti beneficii, tantorumque meritorum tuorum teſtimonium extare vellem, atque hoc qualecunque, ſive grati animi monumentum, ſive obſervantiæ in Celſitudinem tuam meæ pignus, offerrem. Quod, ut ſolito favore excipiat, ſubmiſsè rogo,

SERENISSIMÆ CELSITVDINIS TVÆ

Dabam Leydæ, XII Cal. Julii
Anni CIƆ IƆC XLIX.

Devotiſſimus cliens

FR. à SCHOOTEN.

FRAN-

SERENISSIMÆ PRINCIPI

ELISABETHÆ.

FRIDERICI BOHEMIÆ REGIS,
Comitis Palatini, & Electoris Sacri
Romani Imperii, Filiæ natu maximæ.

SERENISSIMA PRINCEPS.

CUm ea Celſitudinis tuæ ſit claritas, ut maximorum hominum monumenta, tanti nominis ſplendore illuſtrata, in lucem jam pridem prodierint; quid mirum, ſi & ego lucubrationes haſce Celſitudini

tuæ conſecrandas eſſe duxerim? Nam, ut reliquas virtutes, quæ in Te eximiæ ſunt, taceam, tantâ cum providentiâ ſingularis ingenii tui perſpicacia conjuncta eſt, ut, ſpretis illis artibus & ſcientiis, quæ inanis potiùs gloriæ, altercandique ſtudio, quàm veri inquiſitionis causâ addiſcuntur, eas ſolas amplexa fueris, quæ placidè philoſophantes, nihilque niſi evidens admittentes, continuâ ſimplicium rationum ſerie ad abſtruſiſſimarum rerum cognitionem perducunt. Vnde fieri non potuit, quin ad ſublimem illam ſapientiam, quam in Te ſuſpicimus ac vene-

PRÆFATIO AD LECTOREM.

ECce tandem, *Benevole Lector, partem ultimam omnium operum*, Renati des Cartes, *complectentem* Geometriam & principia Matheſeos univerſalis *cum* tractatu de Muſica. *Moram noſtram haud feres ægrè, ubi conſideras maximam in excudendo hoc opere difficultatem, & curas quas impendimus curatiſſimas, ut quam fieri poſſet optimè excuderetur. Atque voto nos eſſe potitos ipſe judicabis è libri lectione. Neque enim modo errata typographica in fine ſecundæ editionis verè adnotata ſuſtulimus, quod etiam in editione tertia factum fuit, ſed ea quoque quæ inter errata falſò ac temere numerata erant, proptereaque in dictâ Editione tertia immutata, id eſt, vitiata ac depravata, reſtituimus & emendavimus: alia verò innumera & longè craſſiora, quæ nec in ſecunda editione obſervata, nec in tertia correcta fuerant, atque à Viro Clariſſimo, qui excudendo huic operi ſuam voluit commodare operam, perdiligenti lectione libri & calculi iterata ſubductione deprehenſa olim ſunt, jam pariter hac editione correcta habes. Ipſe porro* Commentator *nonnulla ad loca impegit feſtinato calculo, cujus errores non quidem in textu, ſed inter ceteras notas & animadverſiones in fine operis adjectas indicavimus ſimul emendavimus. Equidem non diffitemur, & aliqua menda in noſtram hanc irrepſiſſe editionem, neque ob Typothetæ imperitiam aliter fieri potuit, ſed affirmamus certo, ea omnia tam eſſe diligenter à Clariſs. Viro, Correctoris vicibus defuncto, adnotata, ut ne quidem unicum prætermiſerit, quod Lectorem in hac ſcientia vel paululum exercitatum morari queat. Vale, Lector benevole, & labore noſtro fruere ad Dei gloriam!*

CATALOGUS

eorum,

Quæ hoc Opere continentur.

RENATI DES CARTES Geometria, tribus libris comprehenſa.

FLORIMONDI DE BEAUNE in illam NOTÆ BREVES.

FRANCISCI à SCHOOTEN in eandem Commentarii recogniti & aucti.

—— Ejusdem APPENDIX, de Cubicarum Æquationum Reſolutione.

—— item ADDITAMENTUM, in quo continetur ſolutio artificioſiſſima difficilis cujusdam Problematis; & Generalis Regula de extrahendis quibuscunque Radicibus Binomiis.

JOHANNIS HUDDENII Epiſtolæ duæ, quarum altera de Æquationum Reductione, altera de Maximis & Minimis agit.

HENRICI VAN HEVRAET Epiſtola, de Curvarum Linearum in Rectas transmutatione.

FRANCISCI à SCHOOTEN Principia Matheſeos Unverſalis, ſeu Introductio ad CARTESIANÆ GEOMETRIÆ Methodum,

FLORIMONDI DE BEAUNE duo Tractatus poſthumi. Alter de Natura & Conſtitutione, alter de Limitibus Æquationum.

JOHANNIS DE WITT de Elementis Curvarum Linearum libri duo.

FRANCISCI à SCHOOTEN Tractatus de concinnandis Demonſtrationibus Geometricis ex Calculo Algebraico.

Notæ & Animadverſiones tumultuariæ in univerſum opus.

FRANCISCUS à SCHOOTEN

LECTORI

S.

NOvennium eſt, & quod excurrit, Benevole Lector, cùm Geometria hæc Nobiliſſimi atque incomparabilis Viri RENATI DES CARTES, quam vernaculâ linguâ anno 1637. inter Philoſophiæ ſuæ ſpecimina in lucem edidit, è Gallica à me in Latinam linguam verſa commentariiſque illuſtrata primùm prodiit. Interea autem temporis cum operam, quam hoc in negotio collocâram, Viris literatis & ingenioſis pluribus, quos ſtupenda Authoris noſtri eruditio latêre non potuit, haud ingratam fuiſſe compererim; non potui non, diſtractis exemplaribus, cum novam editionem Typographus adornaret, quin honeſtæ ipſius petitioni locum darem, eaque flagitanti concederem, quæ ad Operis hujus commendationem illuſtrare vel addere valebam. Quid hîc autem nunc demum præſtiterim, ſi candido Lectoris judicio relinquam, facilè ex utrinſque editionis inter ſe collatione dignoſcet. Cujus etiam laboris nunquam me pœnituit, tum quod regiam hîc ad pœnitiora univerſæ Matheſeos adyta viam, quam cuique ingredi licet, patere ſciebam, tum quòd hanc ſummi Viri Geometriam publici intereſſe, & è re eorum fore, qui Mathematicis operam dant, in me ipſo cum aliis ſtrenuis Methodi noſtræ cultoribus, non ſine voluptate indies experiebar. Verùm enimverò cum illius utilitas tanta ſit ut, ſi eam vel paucis deſcriberem, paginæ, quæ præfationi hic inſervient, deficerent, indicaſſe ſuffecerit, vix quicquam in univerſa Matheſi ita difficile aut arduum occurrere poſſe, quo non inoffenſo pede per hanc Methodum penetrare liceat, quodvè Geometriæ hujus legibus non ſubjici ſolvique poſſit. Accedit, quod nullis Problematum finibus aut numero coërceatur, ſed fructum, qui vel à Veterum Analyſi vel à Recentiorum Algebræ exſpectandus erat, omnem in ſe contineat, nec quicquam hîc deſiderari poſſe videatur; atque adeò fruſtra ſit, quòd de aliâ ſibi quis exoptandâ Methodo, ad Matheſeos culturam perfectionemque in poſterum cogitet. Quippe hæc illa eſt, cujus exercitio Author mentem excolendo, non modo in Mathematicis Scientiis ſummas difficultates adoleſcens adhuc ſuperavit, aliiſque in inveniendo palmam præripuit; ſed tantam quoq;

ingenii promptitudinem facilitatemque ſibi deinceps conciliavit, ut primus clavem quâ myſteria Univerſi reſeranda ſunt, & cujus ope natura naturæ ac lux orbi magis magisq; redditur, invenerit: adeo ut eorum, quæ lumine naturali cognoſci queunt, nihil tam abditum, denſiſque immerſum fuiſſe tenebris, putandum ſit, quod ingenii ſui felicitate eruere ipſe deſperaſſet. Verſionem quod attinet, cum fideliſſimus ubique verborum interpres, ſalvo rerum pondere, eſſe ſtuduerim, vix eſt, quod cenſuram aliquorum metuam; præſertim ubi illam ab Authore, cui pro jure integrum fuit ſuum ubique ſenſum vel interpretari vel clariorem reddere, poſtea recognitam fuiſſe ſciverint. Verùm cum hæc Geometria a paucis, cum propter eruditam brevitatem, tum propter quæſtionum, quæ inibi pertractantur, difficultatem, non ſine abſtruſa attentione ac indefeſſo ſtudio per ſe intelligi potuerit, periculum erat, ne laborum impatientes Lectores, cum metam vel ipſi ignorarent, vel improbi negarent, arenam deſererent. Conſcius itaque ego illam non in eum finem ab Authore conſcriptam eſſe, quaſi ipſius Methodum ex ea unuſquiſque quàm facillimè haurire poſſet, ſed tantum ut eximia aliquot ejus ſpecimina ederet: operæ pretium duxi in commune conſulere, & difficiliora loca paſſim a me explicata uberioribus hinc inde exemplis altius illuſtrare. Scopum Authoris quod ſpectat, eum hoc loco exponere haud quaquam duxi neceſſarium, cum cujusque libri argumentum commentariis meis præmiſerim, veterumque circa Geometriæ Problemata opiniones ac decreta, ſcitu non injucunda, ibidem explicaverim, quo operis ſummam atque adeo commentariorum noſtrorum uſum breviter complecterer. Porro ne quid deeſſe videretur, unde hæc Geometria majorem adhuc lucem ſortiretur, additæ etiam ſunt Notæ a Clariſſimo atque Ampliſſimo Viro D. FLORIMONDO DE BEAUNE, *Conſiliario Bleſenſi, in eandem olim Gallicè conſcriptæ. Quæ eodem modo in Latinam linguam à me tranſlatæ poſtquam huic Geometriæ primo ejus permiſſu eſſent annexæ, dein ab ipſo recognitæ & emendatæ, nunc denuo vel hoc nomine, ni fallor, acceptiores ſunt acceſſuræ. Præterea, quò unuſquiſque inſtructus iis, quibus ad adyta ejus Methodi perducatur, ſe ad ipſam Geometriam legendam accingere poſſit; haud omittendum duxi, quin ſimul Introductionem noſtrum, quam Vir Clariſſimus, mihique amiciſſimus,* D. ERASMIUS BARTHOLINUS, *nunc Medicinæ & Matheſeos in Academia Hafnienſi Profeſſor Regius, in eum finem olim conſcripſit ac anno 1651 publici juris fecit, prout illam uterque jam demum recognovimus, editioni*

huic

hisce adjungerem. Quo quidem negotio futurum ſpero, ut, quod propriis fruimur horreis, ex aliena non opus ſit meſſe emendicare, licèt Author antehac, tum ad ſuam Geometriam intelligendam Lectorem in aliis Geometricis libris jam verſatum præſuppoſuerit, ne quæ inibi dicta ſint & demonſtrata repetere cogeretur; tum etiam ad ſuam Methodum addiſcendam Lectorem vulgaris Algebræ cognitionem requiſiverit. Nec enim video quid impræſentiarum, poſt mediocrem in Arithmetica & Geometriæ elementis exercitationem, calculique, eâdem Introductione explicati, notitiam, Lectori moram injicere poſſit, quo minus inoffenſo pede ad hanc Geometriam accedat. Et quanquam optandum fuiſſet, hæc omnia ab Authore ipſo fuiſſe præſtita; quippe qui tantum regulas ſuæ Methodi maximè neceſſarias hic expoſuit; attamen quia animadvertit laborem atque induſtriam, quam Lector in inveſtigandis reliquis, demonſtrandisque iis, quæ tantùm intento digito indicavit, impenderet, præcipuum eſſe in hac Scientia, quo cujusque ingenium excolatur: à ſemetipſo impetrare non potuit, ut ea fuſius pertractaret. Hinc cum ſucceſſu temporis inter eos, quibus hanc Geometriam ſedulò verſare ejusque arcana penitiſſimè rimari cordi fuit, non pauci reperti ſint, qui, Authoris veſtigiis arctè inſiſtentes, præclara multa, ad excellentiam illius Methodi plurimum facientia, invenerint, omnesque inter, pro copia inventorum eorumque dignitate, ſubtiliſſimus ac præſtantiſſimus D. JOHANNES HUDDENIUS, *Amſtelodamenſis, amicus meus integerrimus, primas facilè obtineat: viſum fuit ea, quæ ab ipſo Æquationum Reductione ac de Maximis & Minimis, maximam partem Belgicè conſcripta, inter alia per literas mihi ſunt communicata, poſtquam à me Latinè eſſent reddita, Geometriæ huic pariter ſubjungere. Quibus tanquam colophonem addere placuit Epiſtolam, quam acutiſſimus, mihique ut* HUDDENIO *noſtro conjunctiſſimus,* D. HENRICUS VAN HEVRAET, *Harlemenſis, Salmurio nuper ad me tranſmiſit. In qua cum brevem exponat Methodum, inter peregrinandum à ſe noviſſimè excogitatam, tranſmutandi complures curvas lineas in rectas, quod ipſum à nemine (quantum novi) in hunc usque diem oſtenſum eſt, quin imo à multis ut inſolubile habitum: id mihi agendum putavi, ne eximium adeò inventum occultaretur, ut, impetrato ad id ejus conſenſu, illud hic loci in lucem producerem. Eâdem ratione ductus, ne ſparta, quam Vir Ampliſſimus, ac piæ memoriæ,* D. DE BEAUNE *in excolenda propagandaque hujus Geometriæ Methodo ſuſceperat, præcipiti ejus fato interiret; ex officio*

atque

atque publica Matheſin amantium utilitate fore exiſtimavi, ſi Clariſſimum Virum D. ERASMIUM BARTHOLINUM *noſtro rogatu adigerem, ut, quæ de Natura, Conſtitutione, ac Limitibus Æquationum* D. DE BEAUNE *vernaculâ ſuâ linguâ in lucem dare conſtituerat, cum in manus ipſius incidiſſent, publico non invideret. Nec fruſtra in eo fui, nactus enim ſum, ut, quæ ex ejus adverſariis, non ſine indefeſſo labore ac difficili fortuna, ad umbilicum perduxerat: Latinè redderet, nobisque, quò una cum his a me typis mandarentur, concederet. Cæterum ad Artis Analyticæ præſtantiam uberiùs exhibendam, & ad meum rei literariæ inſerviendi ſtudium comprobandum, non abs re fore judicavi, ſi Geometriam hanc non modò fœtu illo poſthumo ac advenâ, ſed alio etiam primogenito eoque indigenâ adaugere ſatagerem; niſi forte hunc alium quoque poſthumum ac advenam dixeris, eo nomine atque intuitu, quòd parens jam totus Reipublicæ vivat, nobisque & ſtudiis noſtris civiliter mortuus, & quaſi peregrinus factus ſit. Etenim cum aliquot abhinc menſibus occaſio mihi data fuerit, ut in eum quem de Locorum Planorum & Solidorum per Artem Analyticam inventione tractatum Nobiliſſimus atque Ampliſſimus Vir* D. JOHANNES DE WITT *Conſiliarius & Penſionarius, ſive miniſter primarius Hollandiæ Weſt-Friſiæque, concinnaverat, opportunus inciderim: non potui non, cum Authoris permiſſu inſpiciendi poteſtas mihi facta eſſet, quin ſententiam, quid de illo videretur, rogatus, coram lubens exponerem. Hunc itaque quia admodum ſublimem, tantoque Viro dignâ ingenioſitate conſcriptum, ac inſuper ad penitiorem hujus Geometriæ intellectum haud parum facere poſſe deprehenderam, (quippe qui ſubtiliſſimam illam de Locis materiam, in ſecundo Geometriæ libro paulò ſuccinctiùs pertractatam, de integro reſumit, alioque pacto componit:) conſultum duxi, ut in publicum emolumentum editionis adornandæ author eſſem. At verò facilè prævidebam, ſaltem ſuprema, quibus fungitur, Reipublicæ munera, graves'q; hominis curas, impedimento fore, quo minus tam ſplendida proles, quæ jam ante decennium formata in conceptu huc uſque delituerat, absque obſtetricis auxilio, in lucem unquam produceretur. Quocirca cum eam mei juris facere non dedignatus fuerit, neque etiam copiam eorum, quæ de Elementis Curvarum Linearum jam pridem conſcripſit, mihi facere recuſaverit, rem ubique gratam me facturum credidi, ſi tam hunc quàm illum tractatum ab ulteriori oblivione vindicandi operam darem; præſertim cum id iis, qui Matheſin ſerio excolunt, acceptum fore perſpexerim, quòd curvarum primi generis ortum longe ſimpliciùs generaliusq;*

[illegible]que ab ipſo quam à veteribus, absque ulla ſolidi conſideratione, in-ſp[illegible]um fuiſſe, reperturi ſint. Quas itaque curvas eâ ratione pertracta-[illegible], ut non ſolum inde dimanet ortus ſecundi generis curvarum (quas quidem omnes ſimili methodo in plano delineavit ac per ſpecies diſtinxit,) verum etiam ulteriorum graduum curvæ ſponte quaſi ex eodem fonte fluant atque deriventur. Futurum ſperans, ut ſi primitiæ hujus fœtus ad illas viam ſternentes operâ meâ in lucem emitterentur, iisque extrema imponeretur manus; quilibet judicaturus ſit, & Literatorum commodo, & hujus viri otio in abſolvendis, quæ de Super-ſolidis Locis adinvenit, omni niſu à me fuiſſe conſultum ac proſpectum. Denique in Methodi hujus Geometriæ dignitas ſplendorque omni ex parte in aperto eſſet, & cuique etiam pateret ejusdem calculo demonſtrationes quoque Geometricas inniti aut ex eo elici poſſe, quales à Veteribus introductæ adhuc apud Recentiores paſſim in uſu ſunt, atque longâ propoſitionum ſerie ac lemmatum permixtione afferri ſolent, continuæ ſchematum animadverſioni obnoxiæ: placuit coronidis loco & in operis complementum ſubnectere tractatum, in quo artem, iisdem Veteribus in difficiliorum hujusmodi demonſtrationum compoſitione uſitatam, occaſione diverſarum quæſtionum, exponerem, ut, ſcilicet, his ſimilibuſque exemplis viam præeundo, non tantùm ejusmodi demonſtrationes alias ex calculo facile depromi oſtenderem; verùm etiam hoc pacto inventionis modum, quem in majorem admirationem ſuorum inventorum artificiosè ſuppreſſerant, indicarem, atque Matheſeos ſtudioſos ad hujus Methodi calculum ceu demonſtrationum amuſſim, omni ambage ac ingenii defatigatione evitata, ablegarem. Quibus quidem omnibus, ſi ſingulis ſatisfacere non licet, habeo ſaltem de quo abundè mihi gratuler, quòd noſtros in hoc ſtudiorum genere labores rerum æſtimatoribus haud diſplicuiſſe nec diſplicere ſciam. Vale. Scripſi Leidæ, anno reparatæ ſalutis CIƆ IƆ CLIX.

INDEX MATERIARUM,

IN HAC

GEOMETRIA

CONTENTARUM.

LIBER I.

De Problematis, quæ conſtrui poſſunt adhibendo tantum rectas lineas & circulos.

QUomodo computatio Arithmetica referatur ad operationes Geometricas. *Pag.* 1
Quomodo Geometrice fiat Multiplicatio, Diviſio, & radicis Quadratæ Extractio. 2
Quo pacto notis uti liceat in Geometria. *ib.*
Quomodo ad Æquationes perveniendum ſit, quæ reſolvendis Problematis inſerviunt. 4
Quænam ſint Problemata Plana & quomodo ipſa reſolvantur. 5 & 6
Quæſtio deſumpta ex Pappo. [illegible]
Reſponſum ad Quæſtionē Pappi. 11
Quomodo ponendi ſint termini in hac Quæſtione, ut ad Æquationem deveniatur. 13
Qui pacto cognaſcatur, Problema hoc eſſe planum, quando illud in quinque tantùm lineis eſt propoſitum. 15

LIBER II.

De natura linearum curvarum.

QUænam ſint curvæ lineæ, quæ in Geometriam recipi poſſunt. 17
Ratio diſtingvendi eas in certa genera. Et cognoſcendi relationem, quam omnia illarum puncta habent ad puncta linearūm rectarum. 21
Continuatio explicationis Quæſtionis, quæ præcedenti libro ex Pappo fuit allata. 24
Solutio hujus Quæſtionis, cum ipſa in 3 aut 4 tantum lineis eſt propoſita. 25
Demonſtratio ejusdē ſolutionis. 32
Quid intelligendum ſit per loca Plana, & Solida: Et ratio ipſa inveniendi. 34
Quænam ſit prima & ſimpliciſſima linearum curvarum, Veterum Quæſtioni inſervientium, cùm ipſa Quæſtio in 5 lineis eſt propoſita. 35
Quænam curvæ lineæ in Geometriam ſint recipiendæ, quæ deſcribuntur, inveniendo plura earum puncta. 38
Quænam etiam illæ ſint, quæ ope fili deſcribuntur, & ibidem recipi poſſunt. 39
Quod ad inveniendum omnes linearum curvarum proprietates, ſufficiat ſcire relationem, quam omnia illarum puncta habent ad pun-

puncta linearum rectarum, & modum ducendi lineas rectas, quæ ipſas ſecent in omnibus illis punctis ad angulos rectos. 40
Modus generalis inveniendi lineas rectas, quæ ſecent datas curvas, vel earum contingentes, ad angulos rectos. *ibid.*
Exemplum hujus operationis in Ellipſi; Et in Parabola ſecundi generis. 41 & 42
Aliud Exemplum in Ellipſi ſecundi generis. 42
Exemplum conſtructionis hujus Problematis in Conchoide. 49
Explicatio quatuor generum novarum Ovalium, Opticæ inſervientium. 50
Proprietates harum Ovalium, concernentes reflexiones & refractiones. 55
Demonſtratio harum proprietatum. 57
Quomodo vitrum fieri poſſit, cujus una ſuperficies tam convexa aut concava ſit, quàm libuerit, quod radios omnes, qui ex uno dato puncto prodeunt, colligat rurſus in altero dato puncto. 61
Quomodo aliud fieri poſſit, quòd idem præſtet, cujus convexitas unius ſuperficiei datam rationem habeat ad convexitatem vel concavitatem alterius. 63
Quomodo id omne, quod hic de lineis curvis, in plana ſuperficie deſcriptis, dictum fuit, applicari poſſit ad illas, quæ deſcribuntur in ſpatio trium dimenſionum ſive ſuperficie aliqua curva. 65

LIBER III.

De conſtructione Problematum Solidorum, & Solida excedentium.

Quænam curvæ lineæ adhiberi poſſint ad conſtructionem cujusque Problematis. 67
Exemplum concernens inventionem plurium mediarum proportionalium. *ibid.*
De natura Æquationum. 69
Quot haberi poſſint radices in qualibet Æquatione. *ib.*
Quænam ſint falſæ radices. *ib.*
Quomodo diminui poſſit dimenſionum numerus alicujus Æquationis, quando cognoſcitur aliqua ex ejus radicibus. *ib.*
Quâ ratione indagari queat, num data quantitas ſit valor alicujus radicis. 70
Quot haberi poſſint veræ radices in qualibet Æquatione. *ib.*
Quomodo faciendum ſit, ut falſæ radices Æquationis evadant veræ, & veræ falſæ. *ib.*
Quomodo augeri vel diminui poſſint Æquationis radices, ipſis non cognitis. 71
Quòd, augendo veras radices, falſæ diminuantur, & contra. 72
Quâ ratione ſecundus terminus Æquationis tolli poſſit. *ib.*
Quo pacto fiat ut falſæ radices Æquationis evadant veræ, nec tamen veræ fiant falſæ. 74

Quo-

Quomodo faciendum ſit, ut loca omnia Æquationis ſint completa. *ibid.*
Quomodo multiplicari vel dividi poſſint Æquationis radices, ipſis incognitis. 75
Quâ ratione fracti numeri alicujus Æquationis reducantur ad integros. *ibid.*
Quo pacto quantitas cognita alicujus termini Æquationis æqualis fiat cuicunque alteri datæ. 76
Quod radices tam veræ quàm falſæ poſſint eſſe reales, vel imaginariæ. *ib.*
Reductio Æquationum Cubicarum, cùm Problema eſt Planũ. *ib.*
Modus dividendi Æquationem per binomium, quod illius continet radicem. 77
Quænam Problemata ſint Solida, Æquatione exiſtente Cubica. 79
Reductio Æquationum quatuor dimenſionum, cum Problema eſt Planum. Et quænam illa ſint, quæ Solida ſunt dicenda. *ib.*
Reductio Æquationis Quadratoquadratæ ad Cubicam. *ib.*
Exemplum oſtendens uſum harum reductionum. 82
Regula generalis reducendi Æquationes omnes, quæ Quadratoquadratum excedunt. 84
Modus generalis conſtruendi omnia Problemata Solida, reducta ad Æquationem trium, quatuorve dimenſionum. 85
Inventio duarum mediarum proportionalium. 91
Ratio dividendi angulum in tres partes æquales. *ib.*
Quod omnia Solida Problemata reduci poſſint ad haſce duas conſtructiones. 92
Modus exprimendi valorem radicum omnium, Æquationum Cubicarum, ac per conſequens illarum omniumꝗ, quæ Quadratoquadratum non excedunt. 94
Cur Problemata Solida conſtrui non poſſint absque ſectionibus Conicis, nec quæ magis compoſita ſint ſine aliis lineis, magis compoſitis. 96
Modus generalis conſtruendi Problemata omnia, reducta ad Æquationem, ſex dimenſiones non excedentem. 97
Inventio quatuor mediarum proportionalium. 104

RENATI

RENATI DES CARTES
GEOMETRIÆ
LIBER PRIMUS.

De Problematibus, quæ conſtrui poſſunt, adhibendo tantùm rectas lineas & circulos.

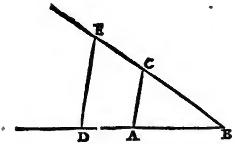
OMNIA Geometriæ Problemata facilè ad hujuſmodi terminos reduci poſſunt, ut deinde ad illorum conſtructionem, opùs tantùm ſit rectarum quarundam linearum longitudinem cognoſcere.

Quomodo computatio Arithmetica referatur ad operationes Geometricas.

Et quemadmodum Arithmetica tota ex quatuor aut quinque ſolummodo operationibus conſtat, quæ ſunt Additio, Subtractio, Multiplicatio, Diviſio, & Radicum Extractio, (quæ pro quadam Diviſionis ſpecie haberi poteſt :) Ita ſimiliter in Geometria, quod ſpectat ad lineas, quæ quæruntur, præparandas, ut cognitæ fiant, aliud faciendum non eſt, quàm A
ut vel ipſis addantur, vel ab iiſdem ſubtrahantur aliæ;
vel etiam ſi una ſit, (quæ vocetur unitas, ut eò commo- B, C
diùs ad numeros referatur, quamque communiter pro libitu aſſumere licet) atque præter hanc adhuc aliæ duæ, ut ad ipſas inveniatur quarta, quæ ſit ad alterutram, D
ut eſt altera ad unitatem, quod idem eſt, atque Multiplicatio; vel ut per ipſas inveniatur quarta, quæ ſit ad E
unam ex illis duabus, ut unitas ad alteram, quod convenit cum Diviſione; vel denique, ut inter unitatem & aliam quandam rectam inveniantur una, aut duæ, plu-

Quomodo Geometricè fiat: réſve mediæ proportionales, quod idem eſt, quod radicis Quadratæ, aut Cubicæ, &c. extractio. Neque enim hoſce Arithmetices terminos, ut faciliùs intelligi poſſim, in Geometriam introducere verebor.

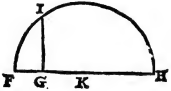
Multiplicatio,



Sit, exempli gratiâ, A B unitas, oporteatque multiplicare B D per B C: jungo puncta A & C, ductâque D E parallelâ A C, erit B E productum hujus multiplicationis.

Diviſio, Vel ſi dividenda ſit BE per B D, junctis punctis E & D, duco A C parellelam ipſi D E, eritque BC quotiens hujus Diviſionis.

Extractio radicis Quadratæ.



Vel denique ſi ex G H extrahere oporteat radicem Quadratam, adjungo ipſi in directum lineam rectam F G, quæ unitas eſt; diviſâque F H bifariam in puncto K, centro K intervallo F K ſeu K H deſcribo circulum; quo facto, erit G I, quæ ex puncto G perpendicularis ducitur ſuper F H uſque ad I, radix quæſita.

Nihil hîc de radice Cubica, nec de aliis dico, quòd de iis in ſequentibus commodiùs ſim acturus.

Quo pacto notis uti liceat in Geometria. At verò ſæpe non eſt opùs, hacce lineas ita in charta ducere, ſed ſufficit illas litteris quibuſdam deſignare, ſingulas ſingulis. Ut ad addendam lineam B D lineæ G H, voco unam a & alteram b, ſcribóque $a+b$; Et $a-b$, ad ſubtrahendam b ex a; Et ab, ad multiplican-

plicandam unam per alteram; Et $\frac{a}{b}$, ad dividendam a per b; Et aa, ſeu a^2, ad multiplicandam a in ſe; Et a^3, ad eandem adhuc ſemel multiplicandam per a, atque ita in infinitum; Et $\sqrt{a^2+b^2}$, ad extrahendam radicem Quadratam ex a^2+b^2; Et $\sqrt{C.\, a^3-b^3+abb}$, ad extrahendam radicem Cubicam ex a^3-b^3+abb, & ſic de cæteris.

Vbi notandum eſt, quòd per a^2 vel b^3, ſimiléſve, communitèr, non niſi lineas omnino ſimplices concipiam, licèt illas, ut nominibus in Algebra uſitatis utar, Quadrata aut Cubos, &c. appellem.

Deinde etiam notandum, quòd omnes ejuſdem lineæ partes, quando unitas in quæſtione non eſt determinata, æque-multis ſemper dimenſionibus exprimi debeant, ut hîc a^3 tot habet dimenſiones, quot abb, aut b^3, ex quibus compoſita eſt linea, quam nominavi $\sqrt{C.\, a^3-b^3+abb}$; Sed hoc non eſt neceſſe, cùm unitas determinata exiſtit, quoniam illa ubique ſubintelligi poteſt, ubi vel nimis multæ, vel nimis paucæ dimenſiones reperiuntur. Vt ſi radix Cubica ſit extrahenda ex $aabb-b$, cogitandum eſt, quantitatem $aabb$ ſemel diviſam eſſe per unitatem, atque alteram quantitatem b bis per eandem eſſe multiplicatam. F

Cæterùm ut quis facilè linearum nominum recordetur, oportet ſemper illa in catalogum referre, prout ſupponuntur vel mutantur, ſcribendo exempli causâ

A B ∞ 1, hoc eſt, A B æqualis eſt 1, ſeu unitati,
G H ∞ a
B D ∞ b, &c.

Reſoluturus igitur aliquod Problema, conſiderabit illud primâ fronte, ut jam factum, nominaque imponet lineis omnibus, quæ ad conſtructionem ipſius neceſſa- G

Quomodo ad Æquationes perveniendum.

ſit, quæ reſolvendis Problematis inſerviunt. ceſſariæ videbuntur, tam iis, quæ incognitæ ſunt, quàm quæ cognitæ. Deinde nullo inter lineas haſce cognitas & incognitas facto diſcrimine, evolvenda eſt Problematis difficultas, eo ordine, quo omnium naturaliſſimè pateat, quâ ratione dictæ lineæ à ſe invicem dependeant, donec inventa fuerit via eandem quantitatem duobus modis exprimendi, id quod Æquatio vocatur; æquales enim ſunt termini modi unius terminis modi alterius. Jam verò tot hujuſmodi Æquationes invenire oportebit, quot ſuppoſitæ fuerint incognitæ lineæ.

G G Vel ſi totidem non inveniantur, nec tamen quidquam eorum, quæ in quæſtione deſiderantur, omittatur, argumentum eſt, illam non penitùs eſſe determinatam. Tunc enim ab arbitrium aſſumi poſſunt lineæ cognitæ pro incognitis, quibus non reſpondet aliqua Æquatio.

G G G Poſtea verò ſi plures adhuc ſuperſint, ordine quoque utendum erit unaquâque Æquationum reliquarum, ſive illam conſiderando ſeparatim, ſive ipſam comparando cum aliis, ad explicandam unamquamque ex incognitis H lineis; atque ita, reducendo illas, efficere oportet, ut tantùm una remaneat, æqualis alteri cognitæ, aut cujus quadratum, ſive cubus, ſive quadrato-quadratum, ſive ſurde-ſolidum, ſive quadrato-cubus, &c. æqualis ſit ei, quod provenit ex additione vel ſubtractione duarum, pluriúmve aliarum quantitatum, quarum una quidem cognita ſit, reliquæ autem compoſitæ ex quibuſdam mediis proportionalibus inter unitatem & dictum quadratum, ſive cubum, ſive quadrato-quadratum, &c. multiplicatis per alias cognitas. Quod hoc pacto deſigno.

$z \propto b$, aut
$z^2 \propto -az + b^2$, aut
$z^3 \propto +az^2 + b^2 z - c^3$, aut
$z^4 \propto +az^3 + b^2 z^2 - c^3 z + d^4$, &c.

Hoc

Digitized by Google

Hoc eſt, z, quam pro quantitate incognita ſumo, eſt æqualis ipſi b; aut quadratum à z æquale eſt quadrato ex b, minus producto ex a in z; aut cubus à z æqualis eſt producto ex a in quadratum ipſius z, plus quadrato ex b ducto in z, minus cubo ex c. & ſic de cæteris.

Poſſunt autem ſemper quantitates incognitæ ita ad unam ſolam reduci, atque tum Problema conſtrui per rectas lineas & circulos, aut per ſectiones Conicas, aut denique per aliam quandam lineam, quæ nonniſi uno duobúſve gradibus magis ſit compoſita.

Sed nolo hîc prolixus eſſe, ut hoc magis particulatim explicem, eò quod vobis voluptatem præriperem diſcendi id ipſum veſtro marte, & utilitatem ingenium veſtrum excolendi, dum vos in eo exercetis, quæ, meo quidem judicio, præcipua eſt, quam ex hac ſcientia percipere licet. Deinde etiam, quòd nihil hîc adeò difficile deprehendam, ut ab illis, qui utcunque in Geometria communi atque Algebra verſati ſunt, & obſervaturi porrò ſunt, quæ tractatu hoc continentur, inveniri non poſſit.

Atque ideo ſufficiet, Vos monere, ſi quis in reducen- I
dis hiſce Æquationibus non omiſerit uti diviſionibus omnibus quæ fieri poſſunt, ipſum quoque infallibiliter habiturum ſimpliſſimos terminos, ad quos quæſtio reduci poſſit.

Quænam ſint Problemata Plana.

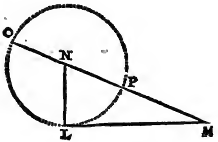
Jam verò ſi illa per Geometriam communem reſolvi poteſt, hoc eſt, utendo tantùm rectis lineis & circularibus, in plana aliqua ſuperficie deſcriptis, poſtquam ultima Æquatio omnino fuerit reducta, relinquetur nil præter quadratum aliquod incognitum, æquale ei, quod provenit ex additione vel ſubtractione ejus radicis, multiplicatæ per quantitatem ali-

quam cognitam, & alterius cujuſdam quantitatis cognitæ.

Quomodo ipſa reſolvantur.

Tuncque radix illa, ſive incognita linea, facilè invenitur. Nam ſi, exempli gratiâ, habeatur

$$zz \infty az + bb,$$



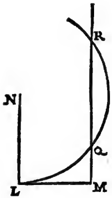
facio triangulum rectangulum NLM, cujus unum latus LM ſit æquale b, radici videlicet quadratæ quantitatis cognitæ bb; alterum autem latus LN æquale $\frac{1}{2}a$, ſemiſſi nimirum reliquæ quantitatis cognitæ, quæ multiplicata eſt per z, quam ſuppono lineam eſſe incognitam. Deinde productâ MN, baſe ejuſdem trianguli, uſque ad O, ita ut NO ſit æqualis NL:
K erit tota OM æqualis z, lineæ quæſitæ. Quæ quidem ſic exprimitur

$$z \infty \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + bb}.$$

Quòd ſi verò habeatur $yy \infty -ay + bb$, atque y ſit quantitas, quam invenire oportet, facio rurſus idem triangulum NLM, & à baſe ejus MN aufero NP, æ-
L qualem NL, eritque reliqua PM, æqualis y, radici quæ-
M ſitæ. Ita ut fiat $y \infty -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Nec aliter fit, ſi proponatur $x^4 \infty -ax^2 + b^2$. PM enim eſſet x^2, & haberetur $x \infty \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$: atque ita de aliis.

Deni-

Digitized by Google



Denique ſi habeatur

$$zz \propto az - bb:$$

facio NL æqualem $\frac{1}{2}a$, & LM æqualem b, ut ante. Deinde non duco lineam per puncta M & N, ut in duobus aliis caſibus, ſed duco MQR parallelam ipſi LN; centroque N deſcripto per L circulo, ſecante MQR in punctis Q & R, erit MQ vel MR æqualis lineæ quæſitæ z. Hoc enim caſu illa duobus modis exprimitur, nimirum $z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel etiam $z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

Quòd ſi circulus centrum ſuum habens in puncto N, tranſienſque per punctum L, non ſecet nec tangat lineam rectam MQR, nullam itidem Æquatio radicem admittet, ita ut inde aſſerere liceat conſtructionem Problematis propoſiti eſſe impoſſibilem. N

Cæterùm poſſunt hæ ipſæ radices infinitis fermè aliis modis inveniri; ſed prædictos tantùm in medium afferre volui, velut admodum ſimplices, ut hâc ratione pateat: Problemata omnia Geometriæ communis conſtrui poſſe, faciendo tantùm ea pauca, quæ quatuor præcedentibus figuris expoſui. Quod quidem non credo à Veteribus fuiſſe animadverſum, cum aliàs laborem eâ de re tantos libros conſcribendi non ſuſcepiſſent, in quibus vel ſolus ordo propoſitionum ſatis nobis oſtendit, quòd ipſis non conſtiterit vera ratio inveniendi omnes, ſed quòd ſolummodo collegerint illas, in quas fortè inciderunt.

Quod etiam ex iis, quæ Pappus initio ſui ſeptimi libri ſcribit, evidentiſſimè liquet. Vbi poſtquam aliquamdiu *Quæſtio deſumpta ex Pappo.*

Digitized by Google

diu in recenſendis illis omnibus, quæ ab anteceſſoribus ſuis in Geometria ſcripta ſunt, occupatus fuit, tandem de quæſtione quadam loquitur, quam nec Euclides, nec Apollonius, nec quiſquam alius penitùs reſolvere potuerat, his verbis:

Quem autem dicit (Apollonius) in tertio libro locum ad tres, & quatuor lineas ab Euclide perfectum non eſſe, neque ipſe perficere poterat, neque aliquis alius: ſed neque paululum quid addere iis, quæ Euclides ſcripſit, per ea tantùm Conica, quæ uſque ad Euclidis tempora præmonſtrata ſunt, &c.

Paulò autem poſt explicat, quæſtionem illam eſſe hanc ſequentem.

At locus ad tres & quatuor lineas, in quo (Apollonius) magnificè ſe jactat, & oſtentat, nullâ habitâ gratiâ ei, qui priùs ſcripſerat, eſt hujuſmodi. Si poſitione datis tribus rectis lineis ab uno & eodem puncto, ad tres lineas in datis angulis rectæ lineæ ducantur, & data ſit proportio rectanguli contenti duabus ductis ad quadratum reliquæ: punctum contingit poſitione datum ſolidum locum; hoc eſt, unam ex tribus conicis ſectionibus. Et ſi ad quatuor rectas lineas poſitione datas in datis angulis lineæ ducantur; & rectanguli duabus ductis contenti ad contentum duabus reliquis proportio data ſit: ſimiliter punctum datam coni ſectionem poſitione continget. Si quidem igitur ad duas tantùm, locus planus oſtenſus eſt. Quòd ſi ad plures quàm quatuor, punctum continget locos non adhuc cognitos, ſed lineas tantùm dictas; quales autem ſint, vel quam habeant proprietatem, non conſtat: earum unam, neque primam, & quæ maniſeſtiſſima videtur, compoſuerunt, oſtendentes utilem eſſe. Propoſitiones autem ipſarum hæ ſunt.

Si ab aliquo puncto, ad poſitione datas rectas lineas, quinque ducantur rectæ lineæ in datis angulis, & data ſit proportio ſolidi parallelepipedi rectanguli, quod tribus ductis lineis continetur, ad ſolidum parallelepipedum rectangulum, quod continetur

tur

Digitized by Google

tur reliquis duabus, & datâ quâpiam lineâ, punctum poſitione datam lineam continget. Si autem ad ſex, & data ſit proportio ſolidi tribus lineis contenti ad ſolidum, quod tribus reliquis continetur; rurſus punctum continget poſitione datam lineam. Quòd ſi ad plures quàm ſex, non adhuc habent dicere, an data ſit proportio cujuſpiam contenti quatuor lineis, ad id, quod reliquis continetur: quoniam non eſt aliquid contentum pluribus quàm tribus dimenſionibus.

Ubi velim ut ex occaſione notetis, Veteres Mathematicos, ex eo, quòd vocabulis in Arithmetica uſitatis, ad operationes Geometricas ſignificandas, liberè uti noluerint, ſæpe in modos eas explicandi valde intricatos & obſcuros incidiſſe, cujus rei non alia potuit cauſa eſſe, quàm quòd non ſatis accuratè perceperint, quænam ſit inter illas duas ſcientias affinitas. Pergit enim Pappus hoc modo.

Acquieſcunt autem his, qui paulò ante talia interpretati ſunt, neque unum aliquo pacto comprehenſibile ſignificantes, quod his continetur. Licebit autem per conjunctas proportiones hæc, & dicere, & demonſtrare universè in dictis proportionibus, atque his in hunc modum. Si ab aliquo puncto ad poſitione datas rectas lineas ducantur recta linea in datis angulis, & data ſit proportio conjuncta ex ea, quam habet una ductarum ad unam, & altera ad alteram, & alia ad aliam, & reliqua ad datam lineam, ſi ſint ſeptem; ſi verò octo, & reliqua ad reliquam: punctum continget poſitione datas lineas. Et ſimiliter quotcunque ſint impares vel pares multitudine, cum hæc, ut dixi, loco ad quatuor lineas reſpondeant, nullum igitur poſuerunt, ita ut linea nota ſit &c.

Quæſtio itaque quam Euclides reſolvere inceperat atque Apollonius continuaverat, ſed quæ à nemine fuit perfecta, erat hujuſmodi.

Datis poſitione tribus, quatuórve, aut pluribus rectis lineis;

lineis; quæritur primò punctum, à quo totidem aliæ rectæ lineæ, ſingulæ ad ſingulas datarum duci poſſint, quæ cum ipſis datos efficiant angulos, & quarum rectangulum, ſub duabus contentum, datam habeat rationem ad quadratum tertiæ, ſi ſint tres; vel ad rectangulum reliquarum duarum, ſi ſint quatuor; Aut ſi quinque ſint, ut parallelepipedum, quod ſub tribus ex illis comprehenditur, datam habeat rationem ad parallelepipedum, quod ſub duabus reliquis comprehenditur & alia quadam data; Aut ſi ſex ſint, ut parallelepipedum ſub tribus contentum datam habeat rationem ad parallelepipedum ſub tribus reliquis comprehenſum; Aut ſi ſint ſeptem, ut hoc, quod producitur ex multiplicatione quatuor ductarum in ſe invicem, datam habeat rationem ad illud, quod ex mutua multiplicatione reliquarum trium & alia quadam data producitur; Aut ſi ſint octo, ut id, quod ex quatuor ductis inter ſe multiplicatis producitur, datam habeat rationem ad productum ex reliquis quatuor. Atque ita porrò quæſtionem hanc, ad omnem alium linearum numerum, extendere licet.

Deinde, quia ſemper infinita ſunt puncta, quæ ſatisfacere poſſunt iis, quæ hîc quæruntur, requiritur inſuper, ut cognoſcatur atque deſcribatur linea, in quá illa omnia reperiantur.

Dicit autem Pappus, ſi tantùm 3 aut 4 lineæ dentur, lineam illam tunc aliquam ex ſectionibus Conicis exiſtere. Verùm non ſuſcipit ipſam determinare neque deſcribere, non magis quàm explicare lineas illas, in quibus quæſita puncta inveniri debent, quando quæſtio propoſita eſt in pluribus lineis. Tantùm addit, quòd Veteres unam ex illis ſibi imaginati fuerint, quam ibidem utilem eſſe monſtrarunt, ſed quæ manifeſtiſſima videretur, nec tamen prima exiſteret. Quod occaſionem mihi præ-

hi præbuit tentandi, num illâ, quâ utor, methodo, æquè ongè, quàm illi pervenerunt, progredi liceret.

Primò autem inveni, quòd, dum hæc quæſtio in tribus, quatuórve, aut quinque duntaxat lineis proponitur, puncta quæſita per ſimplicem ſemper Geometriam inveniri queant; hoc eſt, ut non niſi regulâ atque circino utamur; nec aliud quidquam, quàm quod jam traditum eſt, faciamus. Præterquam ſi quinque lineæ dantur, quæ omnes inter ſe parallelæ fuerint. Quo caſu, ut & quum quæſtio in 6, 7, 8, aut 9 lineis proponitur, quæſita puncta per Solidorum Geometriam inveniri poſſunt; hoc eſt, adhibendo, ad conſtructionem, aliquam ex tribus Conicis ſectionibus. Excepto tantùm, ſi novem lineæ datæ fuerint, quæ omnes inter ſe parallelæ exiſtant. Quo caſu, ut & quum quæſtio in 10, 11, 12, aut 13 lineis propoſita eſt, quæſita puncta per curvam lineam, quæ uno tantùm gradu magis compoſita eſt, quàm ſectiones Conicæ, inveniri poſſunt. Excepto in 13, quæ omnes inter ſe ſint parallelæ. quo caſu, ut & in 14, 15, 16, & 17 lineis, linea curva adhiberi debet, quæ uno gradu ſupra præcedentem compoſita eſt. Atque ita in infinitum. *Reſponſum ad Quæſtionem Pappi.*

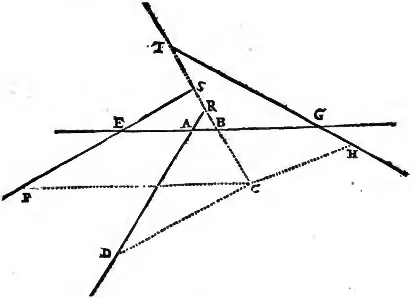
Deinde inveni quoque, ſi tantùm tres aut quatuor lineæ datæ fuerint, quæſita puncta, non modò in aliqua trium Conicarum ſectionum, ſed interdum etiam in circuli circumferentia, aut in recta linea reperiri. Et ſi 5, 6, 7, aut 8 lineæ datæ fuerint, tum puncta illa incidere in aliquam ex lineis, uno gradu magis compoſitis, quam ſectiones Conicæ. Quarum quidem nullam, quæ ad hanc quæſtionem non ſit utilis, imaginari licet. Sed poſſunt rurſus illa etiam in ſectione Conica, aut in Circulo, aut linea recta reperiri. Similiter ſi 9, 10, 11, aut 12 lineæ datæ fuerint, reperientur hæc puncta in aliqua linea, quæ non niſi uno gradu ſupra præcedentes poterit eſſe

B 2 com-

Digitized by Google

compoſita : quemadmodum etiam nullam earum imaginari licet , quæ ibidem utilis eſſe non poſſit. Atque ita porrò in infinitum.

Denique prima & poſt Conicas ſectiones ſimpliciſſima, ea eſt, quæ per Parabolæ & rectæ lineæ interſectionem deſcribi poteſt, quemadmodum pòſt explicabitur. Adeò ut exiſtimem, me prorſus ſatisfeciſſe iis, quæ Pappus nobis commemorat hîc à Veteribus fuiſſe quæſita. Quorum quidem demonſtrationem paucis ſubjicere conabor. Quippe me tædet jam multa hac de re ſcripſiſſe.



Sint AB, AD, EF, GH, &c. lineæ quotcunque poſitione datæ, oporteâtque invenire punctum, ut C, a quo ſi ducantur totidem aliæ ad poſitione datas, ut CB, CD, CF & CH, in datis angulis CBA, CDA, CFE, CHG, &c. ut hoc, quod producitur ex multiplicatione certarum quarundam harum linearum, ſit

æquale

Digitized by Google

æquale illi, quod producitur ex multiplicatione reliquarum; vel etiam ut unum ad alterum datam habeat rationem. Id enim quæſtionem difficiliorem non reddit.

Quomodo ponendi ſint termini in hac Quæſtione, ut ad Æquationem deveniatur.

Primò itaque rem ut jam factam ſuppono, atque ut ex harum omnium linearum confuſione me expediam, conſidero unam ex datis, atque unam ex quæſitis, exempli gratiâ, A B & C B, velut præcipuas, & ad quas reliquas omnes referre conor. Ponendo nimirum ſegmentum lineæ A B, quod intra puncta A & B continetur, vocari x. BC autem vocari y, aliáſque lineas datas omnes productas eſſe, donec ſecent haſce duas, etiam productas, ſi opùs fuerit, & ipſis non ſint parallelæ. Quemadmodum hîc apparet illas ſecare, lineam quidem A B in punctis A, E, & G; B C verò in punctis R, S, & T. Deinde quia omnes anguli trianguli A R B dati ſunt, data quoque erit ratio, quæ eſt inter ejus latera A B & B R, quam pono ut z ad b, ita ut, cum A B ſit x, R B futura ſit $\frac{bx}{z}$, C R autem $y+\frac{bx}{z}$: ſiquidem punctum B cadit inter puncta C & R; nam ſi R caderet inter C & B, C R eſſet $y-\frac{bx}{z}$; ſin verò C caderet inter B & R, C R foret $-y+\frac{bx}{z}$. Similiter, dantur quoque tres anguli trianguli D R C, unde & ratio, quæ eſt inter latera C R & C D, quam pono ut z ad c; ita ut, cum C R ſit $y+\frac{bx}{z}$, C D futura ſit $\frac{cy}{z}+\frac{bcx}{zz}$. Poſtea, quia lineæ A B, A D, & E F poſitione datæ ſunt, data quoque erit diſtantia puncti A à puncto E: quæ ſi nominetur k, habebitur E B æqualis $k+x$; foret autem ipſa $k-x$, ſi punctum B caderet inter E & A; at verò $-k+x$, ſi E caderet inter A & B. Rurſus, quoniam anguli trianguli E S B omnes dantur, dabitur quoque ratio lateris B E ad B S; quam ſi ponam eſſe ut z ad d, B S

 fiet

fiet $\frac{dk+dx}{z}$, C S verò $\frac{zy+dk+dx}{z}$; quæ quidem foret $\frac{zy-dk-dx}{z}$, ſi punctum S caderet inter B & C; at verò $\frac{-zy+dk+dx}{z}$, ſi C caderet inter B & S. Porrò dantur tres anguli trianguli F S C, & conſequenter ratio ipſius C S ad C F, quæ ſit ut z ad e, unde tota C F erit $\frac{ezy+dek+dex}{zz}$. Eodem modo, data eſt A G, quam voco l, unde B G erit $l-x$, & quia in triangulo B G T ratio ipſius B G ad B T data eſt, quæ ſit ut z ad f, erit B T ∞ $\frac{fl-fx}{z}$, & C T ∞ $\frac{zy+fl-fx}{z}$. Rurſus, propter triangulum T C H, data eſt ratio ipſius C T ad C H: quam ſi ponamus ut z ad g, habebitur C H ∞ $\frac{+gzy+fgl-fgx}{zz}$.

Atque ita videre eſt, quòd, poſitione datis quotcunque lineis, ex puncto C ſemper totidem aliæ ad illas duci poſſint in datis angulis, (juxta quæſtionis tenorem;) quæ ſingulæ exprimantur ad ſummum per tres terminos; quorum quidem unus compoſitus ſit ex quantitate incognitâ y, multiplicatâ aut diviſâ per aliam quandam cognitam; ſecundus verò ex incognitâ quantitate x, etiam multiplicatâ aut diviſâ per aliam quandam cognitam; ac tertius denique ex quantitate aliquâ omnino cognitâ. Excepto tantùm, ſi datæ lineæ ſint omnes parallelæ, vel lineæ A B, (quo caſu terminus ex quantitate x compoſitus evaneſcet;) vel etiam lineæ C B, (quo caſu terminus ex quantitate y compoſitus evaneſcet;) quemadmodum id plus ſatis per ſe manifeſtum eſt, nec prolixiori explicatione eget. Quod autem ſpectat ad ſigna $+$ & $-$, quibus hi termini conjunguntur, ipſa quidem variari poſſunt modis omnibus, quos imaginari licet.

Deinde videre etiam licet, quòd multiplicando ita haſce

haſce lineas in ſe invicem, quantitates x & y, quæ in producto reperiuntur, ſingulæ non plures dimenſiones habere poſſint, quàm extiterint lineæ, (quarum explicationi inſerviunt,) quæ ita ſunt multiplicatæ. Adeò ut nunquam plures duabus habituræ ſunt dimenſiones, ubi productum illud ex duarum tantùm linearum multiplicatione naſcitur; nec plures tribus, cùm productum illud ex trium tantùm linearum multiplicatione genitum fuerit, & ſic in infinitum.

Quo pacto cognoſcatur, Problema hoc eſſe planum, quando illud in quinque tantùm lineis eſt propoſitum.

Cæterùm quia ad determinandum punctum C una duntaxat conditio adimplenda eſt, nimirum ut hoc quod ex multiplicatione certi numeri harum linearum producitur ſit æquale, vel (quod nihilo difficilius) datam habeat rationem ad illud quod provenit ex reliquarum multiplicatione; poſſumus ad libitum aſſumere alterutram quantitatem incognitam x vel y, atque alteram invenire per hanc Æquationem. Vbi liquet, ſi quæſtio in quinque tantùm lineis propoſita fuerit, quantitatem x, quæ quidem expreſſioni primæ lineæ non inſervit, poſſe ſemper non plures quàm duas dimenſiones recipere. Ita ut, ſi pro y ſumatur quantitas aliqua cognita, relinquatur tantùm $xx \propto + \text{ vel } - ax + \text{ vel } - bb$. Et tum quidem quantitatem x invenire poterimus regulæ atque circini beneficio, quemadmodum ſuperiùs explicatum fuit. Adeóque ſi in infinitum alia atque alia magnitudo ſumatur pro linea y, invenietur quoque in infinitum alia atque alia pro linea x, atque ita obtinebitur infinitus numerus punctorum, cujuſmodi eſt punctum C, quorum ope quæſita curva linea deſcribetur.

Fieri etiam poteſt, quum quæſtio in ſex aut pluribus lineis proponitur, ſi inter datas fuerint, quæ ipſi A B vel B C parallelæ exiſtant, ut una duarum quantitatum, x, y, duas tantùm aut etiam unam in Æquatione dimenſiones

nes

nes habeat, adeò ut punctum C regulæ ac circini beneficio inveniri poſſit. Sed contra, ſi omnes ſint parallelæ, etiamſi quæſtio in quinque tantùm lineis propoſita fuerit; non poterit tamen punctum C dictâ ratione inveniri: quia, dum quantitas x nuſquam in Æquatione reperitur: permiſſum non erit ampliùs pro illa, quæ y vocata fuit, quantitatem cognitam aſſumere, cum hæc ea ipſa futura ſit, quam quærere oportet. Et quandoquidem illa tres dimenſiones habebit, non poterit ipſa niſi radicem ex Cubica Æquatione eliciendo inveniri. Quod quidem in genere, niſi ad id aliqua ad minimum Conica ſectio adhibeatur, fieri nequit. Rurſus, licèt lineæ ad novem uſque datæ ſint, dummodo non ſint omnes parallelæ, ſemper fieri poteſt, ut Æquatio non altiùs quàm ad quadrato-quadratum aſcendat. Quare ipſa per Conicas ſectiones reſolvi quoque ſemper poterit, eo modo, quem poſtea ſum explicaturus. Ac denique, licèt habeantur uſque ad 13 lineas, efficere ſemper poſſumus, ut Æquatio quadrato-cubum non excedat. Ita ut illam deinde reſolvere queamus beneficio lineæ, quæ uno duntaxat gradu ſupra ſectiones Conicas eſt compoſita, quemadmodum etiam poſt explicabitur. Atque hoc primum eſt, quod hîc eram demonſtraturus; ſed antequam ad ſecundum progrediar, opùs eſt ut in genere aliquid de curvarum linearum natura dicam.

GEO-

GEOMETRIÆ
LIBER SECUNDUS.
De natura linearum curvarum.

Quænam ſint curvæ lineæ, quæ in Geometriam recipi poſſunt.

VEteres optimè conſiderârunt, quòd Geometriæ Problematum alia ſint Plana; alia Solida; alia denique Linearia; hoc eſt, quòd quædam eorum conſtrui poſſint, ducendo tantùm rectas lineas & circulos; cum alia conſtrui nequeant, niſi ad minimum adhibeatur Conica aliqua ſectio; ac reliqua denique, quin ad conſtructionem eorum aſſumatur alia quædam linea magis compoſita.

Verùm ſatis mirari non poſſum, quòd non ulteriùs progreſſi lineas haſce magis compoſitas in certos diſtinxerint gradus; neque etiam planè capio, cur illas potiùs Mechanicas, quàm Geometricas nominaverint. Etenim, ſi dicatur, ideo id fuiſſe factum, quòd inſtrumento quodam, ad illas in plano deſcribendas, uti opùs ſit, circuli quoque & rectæ lineæ ob eandem rationem rejiciendæ eſſent: cum abſque circino & regula, quæ non minùs inſtrumenta dicenda ſunt, in charta deſcribi non poſſint. Neque etiam ideo, quòd inſtrumenta, quæ deſcribendis illis inſerviunt, utpote magis compoſita quàm regula & circinus, nequeant eſſe tam exacta: quandoquidem ob hanc rationem potiùs repudiandæ forent ex Mechanica, ubi tantùm accurata operis convenientia, quæ à manu proficiſcitur, deſideratur, quàm ex Geometria, ubi ſolùm ſpectatur exacta ratiocinatio; quippe quæ procul dubio, tam haſce lineas quàm illas concernens, æquè perfecta eſſe poteſt. Neque tandem

Digitized by Google

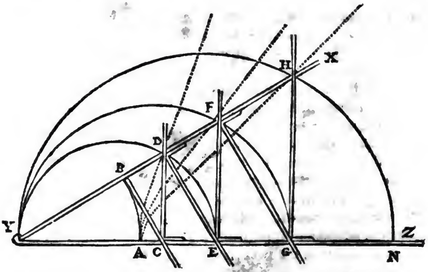
ea de cauſa, quòd numerum poſtulatorum ſuorum augere noluerint; quódque contenti fuerint, modò liceret, data duo puncta rectâ conjungere lineâ, atque ex dato centro circulum deſcribere, tranſeuntem per datum punctum: cum ulteriùs, ut de Conicis ſectionibus tractarent, ſupponere veriti non fuerint, datum Conum dato plano ſecare. Ubi ſanè ad deſcribendum lineas omnes curvas, quas hîc introducere inſtituo, nihil aliud ſupponere eſt opùs: quàm ut duarum pluriúmve linearum una per alteram moveri poſſit, ita ut illarum interſectiones alias deſignent; ſiquidem id nihilo difficilius mihi videtur. Verum equidem eſt, quòd ſectiones Conicas non omnino in Geometriam ſuam receperint; neque etiam nomina, quæ uſu approbata ſunt, immutare volo; veruntamen evidens admodum eſt, ut mea fert opinio, quòd, ſi Geometricum cenſeamus illud, (ut fieri ſolet) quod omnino perfectum atque exactum eſt, & Mechanicum quod ejuſmodi non exiſtit; atque Geometriam conſideremus ut ſcientiam, quæ generaliter menſuras omnium corporum cognoſcere docet, non magis ex ea excludendæ erunt lineæ maximè compoſitæ, quàm omnium ſimpliciſſimæ: ſiquidem illas, per motum aliquem continuum, aut per plures, qui ſe mutuò conſequantur, quorumque poſteriores à prioribus regantur, imaginari poſſumus. Hâc enim ratione exactam ſemper illarum menſuræ cognitionem habere licet. Verùm enimverò fieri poteſt, ut ſcrupulus, quem ſibi Veteres Geometræ in recipiendis lineis, magis quàm ſectiones Conicæ compoſitis, injecerunt, fuerit, quòd primæ, quas conſiderarunt, fortè extiterint Spiralis, Quadratrix, atque ſimiles; quæ reverâ non niſi ad Mechanicas pertinent, nec ex illarum numero ſunt, quas hîc recipiendas autumo: quandoquidem illas duobus motibus deſcribi imaginamur, qui à ſe invicem ſunt diverſi,

diverſi, nec ullam inter ſe relationem habent, quæ exa-ctè menſurari poſſit. Nam licèt poſtea examinaverint quoque Conchoïdem, Ciſſoïdem, & alias quaſdam; tamen, quia fortè illarum proprietates non ſatis perſpe-ctas habuerunt, neque etiam majorem earum quàm præcedentium rationem habuêre. Vel etiam videntes, quòd nondum niſi pauca, quæ ad Conicas ſectiones pertinerent, cognoſcerent, & quòd multa illorum, quæ regulæ ac circini ope perfici poſſunt, quæ ignorarent, ſupereſſent, crediderunt, non oportere, ut materiam aliquam difficiliorem aggrederentur. Sed quoniam ſpero, quòd, qui in utendo calculo Geometrico, hîc propoſito, exercitati erunt, non facilè quid in poſterum reperturi ſint, in quo hæreant, quod ad Plana, & Solida Problemata attinet: confido, non abs re fore, ſi illos ad alia inveſtiganda, ubi ipſis nunquam materia ſe exercendi defutura ſit, invitem.

Sunto lineæ A B, A D, A F, & ſimiles, quas ſuppono deſcriptas eſſe ope inſtrumenti X Y Z, quod compoſitum eſt ex pluribus regulis, ita junctis, ut, cùm illa, quæ deſignatur per Y Z, ſuper lineam A N immota manet, angulus X Y Z aperiri claudique poſſit; &, illo omnino clauſo exiſtente, puncta B, C, D, E, F, G, H omnia in punctum A cadant; Sed prout aperitur, ut regula B C, quæ ipſi X Y in puncto B normaliter adfixa eſt, propellat versùs Z regulam C D, quæ ſuper Y Z incedit, faciens continuò cum illa angulos rectos; & rurſus, ut C D propellat D E, quæ ſimiliter ſuper Y X incedit, parallela manens ipſi B C; deinde ut D E propellat E F; E F verò ipſam F G; hæcque denuo ipſam G H. Atque ita in infinitum, concipiendo ſemper alias atque alias, quarum ſucceſſivè una alteram eodem modo propellit, & quarum aliæ eoſdem

C 2 per-

Digitized by Google



perpetuò angulos faciunt cum Y X, atque aliæ cum Y Z.

Jam verò dum ſic aperitur angulus X Y Z, punctum B deſcribit lineam A B, quæ circulus eſt; puncta autem D, F, H, ubi cæterarum regularum interſectiones fiunt, deſcribunt alias curvas A D, A F, A H, quarum poſteriores ordine magis compoſitæ ſunt quàm prima, hæcque magis quam circulus. Verùm non video quid impedire poſſit, quò minùs accuratè atque diſtinctè hujus primæ deſcriptionem concipiamus quàm circuli, aut Conicarum ſaltem ſectionum; neque etiam quid impedire queat, cur non ſecundam, tertiam cæteráſque omnes, quæ ſic deſcribi poſſunt, æquè bene concipiamus atque primam; nec per conſequens cur non omnes recipiantur, ut Geometriæ contemplationibus inſerviant.

Ratio diſtinguendi eas in certa

Poſſem huc adferre plures alios modos deſcribendi atque concipiendi lineas curvas, quæ magis magiſque grada-

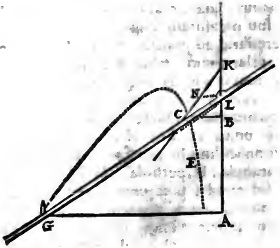
gradatim in infinitum eſſent compoſitæ ; verùm ut has omnes , quæ in rerum natura ſunt, ſimul comprehendam , eaſque in certa genera ordine diſtinguam : aptiùs quidquam afferre neſcio , quàm ut dicam , quòd puncta omnia illarum , quæ Geometricæ appellari poſſunt , hoc eſt , quæ ſub menſuram aliquam certam & exactam cadunt , neceſſariò ad puncta omnia lineæ rectæ , certam quandam relationem habeant , quæ per æquationem aliquam , omnia puncta reſpicientem , exprimi poſſit. Et quòd , cùm æquatio hæc non ultra rectangulum duarum quantitatum indeterminatarum , aut non ultra quadratum unius ex illis aſcendit , linea curva tunc primi & ſimpliciſſimi ſit generis; (ſub quo tantùm Circulus , Parabola , Hyperbola , & Ellipſis ſunt comprehenſæ :) ſed quòd , poſtquam æquatio ad tertiam aut quartam dimenſionem duarum , aut unius è duabus quantitatibus indeterminatis aſcendit , (ſiquidem hìc duæ ad relationem unius ad alterum punctum explicandam requiruntur) linea illa tunc ſecundi ſit generis; & quòd , prout æquatio ad quintam aut ſextam dimenſionem aſcendit, illa tunc ſit tertii generis ; & ſic in infinitum de aliis.

genera ; Et cognoſcendi relationem, quam omnia illarum puncta habent ad puncta linearum rectarum.

Ut ſi ſcire cupiam cujus generis ſit linea E C , quam ſuppono deſcriptam eſſe per interſectionem regulæ G L & plani rectilinei C N K L ; cujus latus K N indefinitè productum eſt versùs C ; quodque , dum movetur ſupra planum deorſum in recta linea , (hoc eſt, ut diameter ejus K L perpetuò adplicata reperiatur alicubi lineæ B A , utrinque indefinitè continuatæ ;) facit, ut regula G L rotetur circa punctum G, quoniam ipſi continuò ſic admovetur , ut ſimul quoque ſemper tranſeat per punctum L : eligo rectam aliquam lineam , veluti A B , ut ad diverſa ejus puncta referam omnia puncta

Digitized by Google

hujus curvæ lineæ C E: deinde eligo etiam punctum aliquod in A B, veluti A, ad ordiendum ab eo calculum. Dico autem, me utrumque eligere, quoniam li-



berum eſt, illa aſſumere, prout volumus. Nam licèt plurimi referat, quo pacto illa eligam, ut æquatio poſſit reddi brevior & facilior; tamen, quocunque tandem modo ſumantur, fieri poteſt, ut linea ejuſdem generis eſſe appareat. Quemadmodum facilè demonſtrari poteſt.

Iam verò ad libitum ſumens aliquod punctum in curva, ut C, ſuper quod ſuppono inſtrumentum, quod deſcriptioni ejus inſervit, eſſe adplicatum, duco ex C lineam C B parallelam ipſi G A. Deinde quia C B & B A duæ ſunt quantitates indeterminatæ & incognitæ, voco unam y, & alteram x. Porrò ut inveniam relationem unius ad alteram, conſidero etiam quantitates cognitas, quæ hujus curvæ lineæ deſcriptionem determinant, ut G A, quam voco a; KL, quam voco b; & N L pa-

NL parallelam ipſi GA, quam voco c. Tum dico, ut NL eſt ad LK, vel c ad b, ita CB, vel y, eſt ad BK, quæ ideo erit $\frac{by}{c}$: ac proinde BL $\frac{by}{c} - b$, & AL $x + \frac{by}{c} - b$. Denique ut CB eſt ad BL, vel y ad $\frac{by}{c} - b$, ita eſt GA, vel a, ad LA, vel $x + \frac{by}{c} - b$. adeò ut, ſi multiplicem ſecundam lineam per tertiam, producatur $\frac{aby}{c} - ab$, quod æquale erit $xy + \frac{byy}{c} - by$, ei ſcilicet, quod producitur multiplicando primam lineam per ultimam. Atque ita æquatio, quæ invenienda erat, eſt hujuſmodi, $y^2 \infty cy - \frac{cxy}{b} + ay - ac$. Ex qua cognoſcitur, lineam EC eſſe primi generis, quemadmodum A illa re ipsâ nulla alia eſt quàm Hyperbola.

Quòd ſi in inſtrumento quod ipſi deſcribendæ inſervit, loco rectæ lineæ CNK ſumatur inventa hæc Hyperbola, aut alia quæpiam primi generis curva linea, quæ planum terminet CNKL; interſectio hujus lineæ & regulæ GL, loco Hyperbolæ EC, aliam curvam deſcribet, quæ ſecundi erit generis. Ut ſi CNK fuerit Circulus, cujus centrum L, deſcribetur prima Conchoïdes Veterum; & ſi Parabola fuerit, cujus diameter KB, deſcribetur curva linea, quam paulò ante dixi primam eſſe ac ſimpliciſſimam pro quæſtione Pappi, cùm quinque tantùm lineæ poſitione datæ ſunt. Sed ſi loco alicujus harum linearum primi generis ſumatur quædam ſecundi, quæ terminet planum CNKL, deſcribetur ejus ope alia tertii generis; aut ſi quædam tertii generis ſumatur, deſcribetur aliqua quarti, & ſic in infinitum. Ut facilè ex calculo eſt cognoſcere. Et ſanè quocunque tandem modo curvæ alicujus lineæ deſcriptionem quis imaginatus fuerit, modò ipſa ex illarum numero, quas Geometricas voco, extiterit, poterit

Vide Pappum ad prop. 22. lib. 4; & Eutocium in commentariis in ſecund. librum Archimedis de ſphæra & cylindro.

Digitized by Google

rit ſemper inveniri æquatio, quâ omnia ejus puncta hâc ratione determinentur.

Cæterùm lineas curvas, quæ faciunt ut æquatio hæc ad Quadrato-quadratum adſcendat, ejuſdem generis eſſe pono cum illis, quæ ipſam tantùm ad Cubum perducunt. Atque illas, quarum æquatio ad Quadrato-cubum adſcendit, ejuſdem generis cum illis, quæ ipſam tantùm ad Surdeſolidum perducunt. Et ſic de cæteris.

Cujus rei ratio eſt, quòd generalis regula habeatur reducendi ad Cubum difficultates omnes, quæ aſcendunt ad Quadrato-quadratum; & ad Surdeſolidum omnes illas, quæ aſcendunt ad Quadrato-cubum, ita ut magis compoſitæ cenſeri non debeant.

Notandum autem eſt, quòd inter lineas cujuſque generis, licèt major pars æqualiter ſit compoſita, ita ut ad eorundem punctorum determinationem ſervire poſſint, atque ad eadem Problemata conſtruenda; tamen quædam illarum ſint, quæ ſimpliciores exiſtant, quæque non tantam in ſua potentia extenſionem habeant. Ut, inter lineas primi generis, præter Ellipſin, Hyperbolam, & Parabolam, quæ æqualiter ſunt compoſitæ, etiam Circulus eſt comprehenſus, qui manifeſtò ſimplicior eſt. Et inter illas ſecundi generis, numeratur quoque Conchoïdes vulgaris, quæ ſuam originem ex Circulo ducit; quemadmodum & aliæ præterea reperiuntur, quæ, etiamſi non tantam extenſionem habeant, quantam maxima illarum pars, quæ ejuſdem generis ſunt, tamen inter lineas primi generis poni non poſſunt.

Continuatio explicationis quæſtionis, quæ præcedenti libro ex Pappo ſuis allata.

Reductis igitur curvis lineis ad certa genera, facilè erit progredi in demonſtratione reſponſi, quod pauló ante dedi ad quæſtionem Pappi. Primùm enim, cum ſupra oſtenderim, quòd, quando tantùm 3 aut 4 lineæ rectæ dantur, æquatio, quæ ad quæſita puncta determinanda

nanda inſervit, non ultra quadratum aſcendat: evidens eſt, lineam curvam, in qua hæc puncta reperiuntur, neceſſariò aliquam eſſe primi generis: quandoquidem hæc æquatio relationem, quam omnia linearum primi generis puncta habent ad puncta lineæ rectæ, explicat. Et quòd, cum non plures quàm 8 lineæ rectæ datæ ſunt, æquatio hæc tum ad ſummum non ultra Quadrato-quadratum aſcendat, ac per conſequens quæſita linea non niſi ſecundi aut inferioris generis eſſe poſſit. Et quòd, cum non plures quàm 12 lineæ rectæ datæ ſunt, æquatio tum non ultra Quadrato-cubum aſcendat, ac per conſequens, quæſita linea ſolummodo tertii aut inferioris generis exiſtat. Atque ita de reliquis. Quin etiam, quoniam datarum rectarum poſitio omnifariam variari poteſt, & per conſequens mutare tam quantitates cognitas, quàm ſigna + & — ipſius æquationis, modis omnibus, quos ſibi quis imaginari queat; evidens eſt nullam primi generis curvam lineam reperiri, quæ ad hanc quæſtionem non ſit utilis, quando illa in 4 lineis eſt propoſita; neque ullam ſecundi, quæ ibidem non inſerviat, quando illa in 8 lineis eſt propoſita; neque etiam ullam tertii, quando illa in 12 lineis eſt propoſita. Et ſic de reliquis.

Adeò ut nulla curva linea, quæ ſub calculum cadit, atque in Geometriam recipi poteſt, reperiatur, quæ ibidem ad aliquem linearum numerum non ſit utilis.

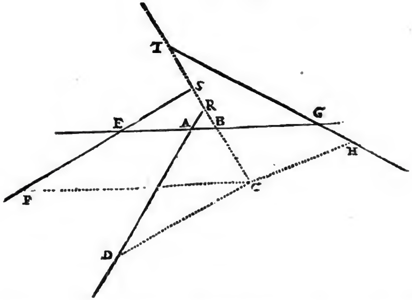
Solutio hujus quæſtionis, cùm ipſa in 3 aut 4 tantùm lineis eſt propoſita.

Sed oportet ut de his ſpecialiùs agam, atque rationem inveniendi lineam quæſitam, cuilibet caſui inſervientem, exhibeam, quando tantùm 3 aut 4 lineæ datæ ſunt; atque eâdem operâ videbitur, quòd primum linearum curvarum genus alias nullas, præter tres Sectiones Conicas & Circulum, complectatur.

Repetamus itaque quatuor lineas AB, AD, EF, &
D GH,

GH, ſuperiùs datas, oporteátque aliam invenire lineam, in quâ infinita reperiantur puncta, quale eſt C, unde ſi ducantur quatuor lineæ CB, CD, CF, & CH, in datis angulis ad poſitione datas: ut CB multiplicata per CF tantundem producat ac CD multiplicata per CH. hoc eſt, poſitâ CB $\infty\ y$, CD $\infty\ \frac{czy+bcx}{zz}$, CF ∞ $\frac{ezy+dek+dex}{zz}$, & CH $\infty\ \frac{gzy+fgl-fgx}{zz}$: æquatio erit

$$yy\ \infty\ \frac{\left.\begin{matrix}-dekzz\\+cfglz\end{matrix}\right\}y\ \left.\begin{matrix}-dezzx\\-cfgzx\\+bcgzx\end{matrix}\right\}y\ \begin{matrix}+bcfglx\\-bcfgxx\end{matrix}}{ez^3-cgzz}$$



B Saltem ſi ſupponamus quantitatem ez majorem quàm cg; nam ſi minor foret, mutanda eſſent omnia ſigna + & —. Unde ſi in hac æquatione quantitas y nulla ſit, aut
BB minor quàm nihil, poſtquam punctum C ſuppoſuimus in angulo DAG, oporteret & illud ſupponere in angulo DAE,

DAE, aut EAR, aut etiam RAG, mutando ſigna $+$ & $-$, prout ad effectum hunc requireretur. Quòd ſi verò in quatuor hiſce poſitionibus valor ipſius y nullus reperiretur, indicio eſſet, quæſtionem caſu propoſito eſſe impoſſibilem. Sed ſupponamus illam hîc poſſibilem eſſe, & ad abbreviandum ejus terminos, loco quantitatum $\frac{cfglz - dekzz}{ez^3 - cgzz}$ ſcribamus $2m$, & loco $\frac{dezz + cfgz - bcgz}{ez^3 - cgzz}$ ſcribamus $\frac{2n}{z}$; ſicque habebimus $yy \infty 2my - \frac{2n}{z}xy \frac{+bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}$, cujus æquationis radix eſt

$$y \infty m - \frac{nx}{z} + \sqrt{mm - \frac{2mnx}{z} + \frac{nnxx}{zz} + \frac{bcfglx - bcfgxx}{ez^3 - cgzz}}.$$

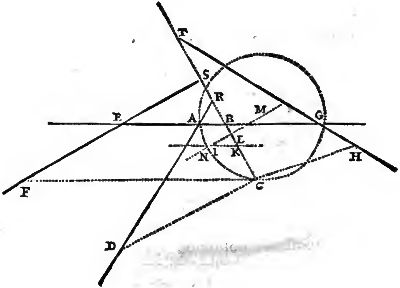
Rurſus autem abbreviandi causâ, pro $-\frac{2mn}{z} + \frac{bcfgl}{ez^3 - cgzz}$ ſcribamus o, & pro $\frac{nn}{zz} - \frac{bcfg}{ez^3 - cgzz}$ ſcribamus $\frac{p}{m}$. Cum enim quantitates hæ omnes datæ ſint, illas, ut placuerit, nominare poſſumus. Atque ita habebimus

$$y \infty m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + ox + \frac{p}{m}xx},$$ quæ longitudo eſſe debet lineæ B C, relinquendo A B, ſeu x, indeterminatam.

Ubi patet, ſi quæſtio in tribus aut quatuor tantùm lineis eſt propoſita, ſemper ejuſmodi terminos inveniri poſſe; præterquam quòd quidam ex illis interdum abeſſe poſſint, ſignáque $+$ & $-$ diverſimodè mutari.

His peractis, duco K I parallelam & æqualem ipſi A B, ita ut ex B C ſegmentum auferat B K, æquale ipſi m: quandoquidem hîc habetur $+m$; quod quidem aliàs addidiſſem ipſi B C, ducendo hanc lineam I K ad alteram partem, ſi illic fuiſſet $-m$; eamque nullo modo duxiſſem, ſi quantitas m prorſus defuiſſet. Deinde duco I L, ita ut linea I K ſit ad K L, ſicut z ad n; hoc

eſt, ut, cùm IK eſt x, KL ſit $\frac{nx}{z}$. Atque hàc ratione innoteſcit etiam ratio, quæ eſt inter KL & IL, quam pono eandem, quæ eſt inter n & a; ita ut, cùm KL eſt



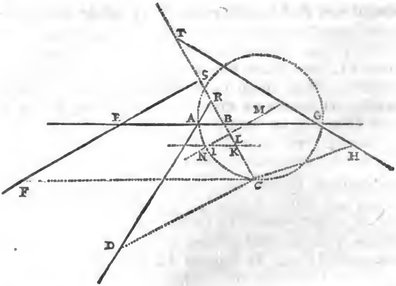
$\frac{nx}{z}$, IL ſit $\frac{ax}{z}$: & facio ut punctum K cadat inter L & C; ſiquidem hîc habetur $-\frac{nx}{z}$; ubi aliàs L ſumpſiſſem inter K & C, ſi habuiſſem $+\frac{nx}{z}$. Neque omnino duxiſſem hanc lineam IL, ſi $\frac{nx}{z}$ defuiſſet.

C Hinc nihil mihi ampliùs reſtare video pro linea LC præter hoſce terminos: LC $\infty \sqrt{mm + ox + \frac{p}{m}xx}$. Unde cognoſco, quòd, ſi nulli fuiſſent, punctum C repertum fuiſſet in linea recta IL; & ſi tales extitiſſent, ut inde radix extrahi potuiſſet, hoc eſt, ut, mm & $\frac{p}{m}xx$ ſigno

ſigno + notatis, oo fuiſſet æqualis $4pm$, ſive etiam termini mm & ox, aut ox & $\frac{p}{m}xx$ nihilo fuiſſent æquales, punctum hocce C in aliam rectam lineam cecidiſſet, quæ quidem inventu difficilior non fuiſſet quàm I L. Sed ſi hoc non fiat, punctum C reperietur ſemper in aliqua trium Conicarum ſectionum, aut in Circulo, cujus una ex diametris ſit in linea I L, & linea L C una ex iis, quæ ad hanc diametrum ordinatim adplicantur; vel contra, L C erit parallela diametro, ad quam illa, quæ eſt in linea I L, ordinatim adplicatur. Nimirum, ſi terminus $\frac{p}{m}xx$ non reperiatur, erit Conica hæc ſectio Parabola; at verò ſi denotetur ſigno +, erit Hyperbola; ac denique ſi ſigno —, erit Ellipſis. Excepto tantùm, cùm quantitas aam eſt æqualis quantitati pzz, & angulus I L C rectus: quo caſu, loco Ellipſis Circulus obtinebitur. CC

Quòd ſi hæc ſectio Parabola exiſtit, latus rectum æquale erit $\frac{oz}{a}$, diametérque ſemper in linea IL; atque ad inveniendum punctum N, quod illius vertex eſt, oportebit I N æqualem ſumere $\frac{amm}{oz}$; ita ut punctum I cadat inter L & N, ſi termini fuerint $+ mm + ox$; aut etiam, ut punctum L cadat inter I & N, ſi illi fuerint $+ mm - ox$; aut denique ut N cadat inter I & L, ſi habeatur $- mm + ox$. Sed nunquam illic haberi poteſt $- mm$, eo modo, quo termini hîc ſunt poſiti. Poſtremò verò punctum N erit idem quod punctum I, ſi quantitas mm nulla ſit. Quâ quidem ratione inde facile eſt invenire hanc Parabolam per Problema 1^{mum} primi libri Conicorum Apollonii. CCC

Quòd ſi quæſita linea eſt Circulus, aut Ellipſis, aut denique Hyperbola, oportet primò invenire pun-

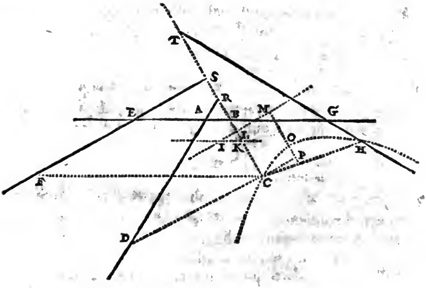


ctum M, quod illius centrum eſt, quódque ſemper in lineâ recta I L cadit, ubi invenitur, ſumendo $\frac{aom}{2pz}$ pro I M. Ita ut, ſi quantitas o nulla eſt, centrum hocce cadat ſemper in punctum I. Et ſi quæſita linea eſt Circulus, aut Ellipſis, erit punctum M ex eadem parte puncti L ſumendum, reſpectu puncti I, ſi habeatur $+ox$; at ſi habeatur $-ox$, ſumendum erit illud ex altera parte. Sed contra in Hyperbola, ſi habeatur $-ox$, centrum illud ſumi debebit versùs L; & ſi habeatur $+ox$, debebit illud ſumi versùs alteram partem. Poſtea figuræ rectum latus ſumendum erit $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$, cùm habetur $+mm$, & quando quæſita linea eſt Circulus, aut Ellipſis; vel etiam cùm habetur $-mm$, & quando quæſita linea eſt Hyperbola. Vel denique $\sqrt{\frac{oozz}{aa}-\frac{4mpzz}{aa}}$, quando quæſita linea eſt Circulus, aut

aut Ellipſis, & habetur $-mm$; vel etiam quando Hyperbola, & quantitas oo major eſt quàm $4mp$, & cùm habetur $+mm$. Quòd ſi verò quantitas mm non reperiatur, latus hocce rectum erit $\frac{oz}{a}$, & ſi ox nulla ſit, id ipſum erit $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$. Deinde ad inveniendum latus tranſverſum, debet inveniri linea, quæ ſit ad hoc latus rectum, ut aam ad pzz, nimirum ſi latus hocce rectum ſtatuatur $\sqrt{\frac{oozz}{aa}+\frac{4mpzz}{aa}}$, tranſverſum erit $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}+\frac{4aam^3}{pzz}}$. Atque in omnibus hiſce caſibus ſectionis diameter erit in linea I M, erítque L C una earum, quæ ad ipſam ordinatim adplicantur. Ita ut ſi fecerimus M N æqualem dimidio lateris tranſverſi, atque illam ex eadem parte puncti M ſumpſerimus quá punctum L, habebitur punctum N pro vertice ipſius diametri. Unde porrò facilè eſt dictam ſectionem invenire, per 2^{dum} & 3^{tium} Problema 1^{mi} Libri Conicorum Apollonii. D

Sed ſi, ſectione Hyperbolâ exiſtente, habeatur $+mm$; & quidem quantitas oo nulla ſit, aut minor quàm $4pm$; oportebit ex centro M lineam ducere M O P parallelam ipſi L C, nec non C P ipſi L M, atque M O æqualem facere $\sqrt{mm-\frac{oom}{4p}}$; aut etiam æqualem m, ſi non reperiatur quantitas ox. Deinde conſiderare oportebit punctum O tanquam verticem Hyperbolæ, cujus diameter ſit O P, & linea C P, quæ ad illam ſit ordinatim adplicata, cujúſque latus rectum ſit $\sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4}-\frac{a^4oom^3}{p^3z^4}}$, tranſverſum verò $\sqrt{4mm-\frac{oom}{p}}$. Excepto tantùm cùm ox nulla eſt; ſiquidem eo caſu latus rectum E

ſit



fit $\frac{2aamm}{pzz}$, & transſverſum $2m$. Ita ut inde facile ſit illam invenire per 3^{ium} Problema 1^{mi} libri Conicorum Apollonii.

Demonſtratio ejusdem ſolutionis.

Quorum quidem demonſtrationes perſpicuæ ſunt. Etenim, ſi componatur ſpatium aliquod ex quantitatibus, quas recto & tranſverſo lateri aſſignavi, atque etiam ſegmento diametri N L, vel O P, juxta ſenſum 11^{mi}, 12^{mi}, & 13^{tii} Theorematum primi libri Conicorum Apollonii, invenientur iidem omnes termini, ex quibus compoſitum eſt quadratum lineæ C P, vel C L, quæ huic diametro ordinatim eſt adplicata. Ut in hoc exemplo, auferendo I M, quæ eſt $\frac{aom}{2pz}$, ab N M, quæ eſt $\frac{am}{2pz}\sqrt{oo + 4mp}$, relinquitur I N; cui ſi addatur I L, quæ eſt $\frac{a}{z}x$, fit ſumma N L; quæ ideo erit

$\frac{a}{z}x$ —

$\frac{a}{z}x - \frac{aom}{2pz} + \frac{am}{2pz}\sqrt{oo + 4mp}$. Hæc autem multiplicata per $\frac{z}{a}\sqrt{oo + 4mp}$, quæ eſt figuræ latus rectum, provenit $x\sqrt{oo + 4mp} - \frac{om}{2p}\sqrt{oo + 4mp} + \frac{moo}{2p} + 2mm$, pro rectangulo. A quo auferendum eſt ſpatium, quod ſit ad quadratum ex N L, ut latus rectum ad latus tranſverſum. Hinc cum quadratum ex N L ſit $\frac{aa}{zz}xx - \frac{aaom}{pzz}x + \frac{aam}{pzz}x\sqrt{oo + 4mp} + \frac{aaoomm}{2ppzz} + \frac{aam^3}{pzz} - \frac{aaomm}{2ppzz}\sqrt{oo + 4mp}$, oportebit id ipſum dividere per aam, & multiplicare per pzz, propterea quòd hi termini rationem, quæ eſt inter latus tranſverſum & rectum, explicent, fietque $\frac{p}{m}xx - ox + x\sqrt{oo + 4mp} + \frac{oom}{2p} - \frac{om}{2p}\sqrt{oo + 4mp} + mm$. Hoc ergo ſi auferatur ex rectangulo præcedenti, invenietur $mm + ox - \frac{p}{m}xx$ pro quadrato lineæ C L: quæ proinde una eſt ex ordinatim adplicatis in Ellipſi, aut Circulo, ad ſegmentum diametri N L.

Jam verò ſi datas omnes quantitates numeris velimus explicare, ponendo, exempli gratiâ, $EA \infty 3$, $AG \infty 5$, $AB \infty BR$, $BS \infty \frac{1}{2}BE$, $GB \infty BT$, $CD \infty \frac{3}{2}CR$, $CF \infty 2CS$, $CH \infty \frac{2}{3}CT$; & quòd angulus ABR ſit 60 graduum; ac denique quòd rectangulum ſub duabus lineis C B & C F, ſit æquale rectangulo ſub duabus reliquis C D & C H; (quandoquidem hæc omnia data requiruntur, ut quæſtio ſit penitus determinata;) & quòd præterea A B ſit ∞x, & C B ∞y: inveniemus per modum, ſupra explicatum, $yy \infty 2y - xy + 5x - xx$, & $y \infty 1 - \frac{1}{2}x + \sqrt{1 + 4x - \frac{3}{4}xx}$: Ita ut BK fieri debeat

beat 1, & K L ſemiſſis ipſius K I vel A B. Cumque angulus I K L ſit 60 graduum, angulus I L K erit rectus. Quoniam autem I K ſeu A B vocata eſt x, K L erit $\frac{1}{2}x$, I L verò $x\sqrt{\frac{3}{4}}$; & quantitas, quæ paulò ante nominabatur z, erit 1; quæ autem a, erit $\sqrt{\frac{3}{4}}$; quæ m, erit 1; quæ o, erit 4; & quæ appellabatur p, erit $\frac{3}{4}$: ita ut habeatur $\sqrt{\frac{16}{3}}$ pro I M, & $\sqrt{\frac{19}{3}}$ pro N M. Et quia aam, quæ eſt $\frac{3}{4}$, hic æquatur pzz, atque angulus I L C eſt rectus, linea curva N C invenitur eſſe circulus. Eodem modo reliqui caſus omnes facilè examinari poſſunt.

Quid intelligendum ſit per loca Plana, & Solida; Et ratio ipſa inveniendi.

Cæterùm, quia æquationes, quæ ultra Quadratum non aſcendunt, omnes in eo ſunt comprehenſæ, quod jam explicavi; non ſolùm Veterum Problema in 3 & 4 lineis hic penitus ad finem perductum eſt; ſed etiam illud, quod ad id, quod Solidorum Locorum Compoſitionem vocabant, pertinet; adeoque etiam locorum
F Planorum, cum illa in Solidis contineantur. Quippe hæc loca nihil aliud ſunt, quàm cùm in quæſtione aliqua eſt inveniendum punctum, in quâ una deficit conditio, ut ipſa prorſus ſit determinata. Quemadmodum in hoc exemplo, ubi omnia ejuſdem lineæ puncta pro eo accipi poſſunt, quod eſt quæſitum. Etenim lineâ illâ exiſtente rectâ aut circulari, locus vocatur Planus. At ſi illa eſt Parabola, vel Hyperbola, vel Ellipſis, tum locus ille nominatur Solidus. Quotieſcunque autem id evenit, poteſt perveniri ad æquationem, quæ duas quantitates incognitas continet, quæque alicui ex illis, quas jam reſolvi, ſimilis exiſtit. Quòd ſi verò linea, quæ ſic quæſitum punctum determinat, uno gradu magis quàm ſectiones Conicæ ſit compoſita, ipſam eodem modo locum Surſolidum appellare licebit, atque ita
G de cæteris. At verò duabus conditionibus deficientibus ad hujus puncti determinationem, locus, in quo illud

Digitized by Google

lud reperitur, ſuperficies eſt, quæ ſimiliter aut plana, aut ſphærica, aut magis compoſita eſſe poteſt. Verùm ſummus ſcopus, quem ſibi in hac materia Veteres præfixère, fuit, ut ad Solidorum Locorum compoſitionem pervenirent; Et veriſimile eſt, omne illud, quod Apollonius de Conicis ſectionibus ſcripſit, eò tantùm, ut illam indagaret, reſpexiſſe.

Præterea apparet etiam, illud, quod pro primo linearum curvarum genere ſumpſi, non poſſe alias ullas præter Circulum, Parabolam, Hyperbolam, & Ellipſim complecti. Quod quidem id omne eſt, quod demonſtrare ſuſceperam.

Quænam ſit prima & ſimpliciſſima linearum curvarum, Veterum quæſtioni inſervientium, cùm ipſa quæſtio in 5 lineis eſt propoſita.

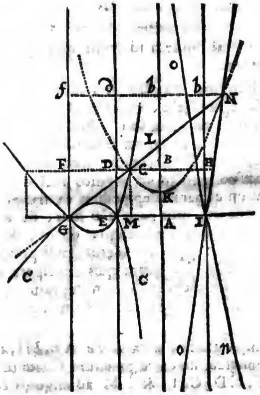
Quòd ſi Veterum quæſtio in 5 lineis eſt propoſita, quæ omnes ſunt parallelæ; evidens eſt, quæſitum punctum ſemper in linea recta fore. Sed ſi in 5 lineis propoſita fuerit, ita ut 4 illarum ſint parallelæ, & quæ à quinta ad angulos rectos ſecentur; tum etiam, ut lineæ omnes à quæſito puncto ad angulos rectos illis occurrant; ac demum ut parallelepipedum ex tribus lineis ita ductis ad tres ex iis, quæ parallelæ ſunt, ſit æquale parallelepipedo ex duabus ad reliquas ductis, & ex tertia quadam data linea: (qui, ut videtur, poſt præcedentem ſimpliciſſimus caſus eſt, quem quis concipere poteſt:) punctum quæſitum cadet in lineam curvam, quæ motu Parabolæ deſcribitur, quemadmodum ſuperiùs eſt explicatum.

Sint, exempli gratiâ, datæ lineæ AB, IH, ED, GF, & GA; & oporteat invenire punctum C; ita ut, ducendo CB, CF, CD, CH, & CM ad angulos rectos ad poſitione datas, parallelepipedum ex tribus CF, CD, & CH compoſitum, ſit æquale parallelepipedo compoſito ex duabus reliquis CB, CM, & tertia data linea, quæ ſit AI.

 Pono

Pono C B ∞ y, C M ∞ x, A I vel A E vel G E ∞ a; ita ut, exiſtente puncto C inter lineas A B & D E, habeam C F ∞ $2a - y$, C D ∞ $a - y$, & C H ∞ $y + a$; & multiplicando haſce tres in ſe invicem, habeam $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3$, æquale producto trium reliquarum, quod eſt axy.

Poſt hæc conſidero lineam curvam C E G, quam



imaginor deſcriptam eſſe per interſectionem Parabolæ C K N, interea dum movebatur in linea recta A B, atque ſecabatur à regula G L, rotata circa punctum G, ſemperque tranſeunte per punctum L, in plano Parabolæ·

bolæ. Et facio K L ∞ a, latusque principale, hoc eſt, quod ad axem Parabolæ pertinet, itidem æquale a, G A verò ∞ $2a$, C B ſeu M A ∞ y, & C M ſeu A B ∞ x. Deinde propter ſimilitudinem triangulorum G M C & C B L, G M ſeu $2a - y$ eſt ad M C ſeu x, ut C B ſeu y ad B L, quæ ideo eſt $\frac{xy}{2a-y}$. Unde cum L K ſit a, B K erit $a - \frac{xy}{2a-y}$, ſeu $\frac{2aa-ay-xy}{2a-y}$. Denique, quoniam eadem B K, quæ diametri Parabolæ eſt ſegmentum, ſe habet ad B C, quæ ipſi ordinatim eſt adplicata, ut B C ſe habet ad latus rectum, quod eſt a: calculus monſtrat, quòd $y^3 - 2ayy - aay + 2a^3$ æquabitur axy, & per conſequens, quòd punctum C erit illud, quod quærebatur. Quod quidem, ubicunque libuerit, in linea C E G aſſumi poteſt; vel etiam in ejus adjuncta c E G c, quæ eodem modo deſcribitur, præterquam quòd Parabolæ vertex versùs alteram partem vergat; vel denique in earundem oppoſitis N I o, n I O, quæ per interſectionem, quam linea G C facit in altero Parabolæ latere K N, deſcribuntur.

Jam verò etiamſi datæ parallelæ A B, I H, E D, & G F non æqualiter inter ſe diſtantes eſſent, nec G A ipſas ad rectos angulos ſecaret, neque etiam lineæ à puncto C ad eaſdem ductæ; tamen non minùs hocce punctum C reperiretur ſemper in linea curva, quæ ejuſdem eſſet naturæ. Quemadmodum id etiam aliquando contingere poteſt, licèt nullæ ex datis lineis ſint parallelæ. Sed quando ita quatuor parallelæ ſunt, & quinta eaſdem ſecans; & quidem parallelepipedum ex tribus, à quæſito puncto ductis, quarum una ſuper quintam cadat, & aliæ duæ ſuper duas ex parallelis, æquetur parallelepipedo ſub duabus ad duas reliquas parallelas, & tertia quadam data linea: punctum quæſitum

reperietur in linea curva, quæ alterius erit naturæ; ſcilicet in una, cujus omnes ordinatim adplicatæ ad diametrum æquales ſunt ordinatim adplicatis ad diametrum ſectionis Conicæ, cujúſque ſegmenta diametri inter verticem & ordinatim adplicatas interjecta, eandem rationem habent ad datam aliquam lineam, quam hæc ipſa ad ſimilia diametri ſegmenta ſectionis Conicæ, quibus illæ lineæ ordinatim ſunt adplicatæ. Neque aſſeverare auſim, hanc lineam non ſimpliciorem eſſe præcedenti; quam tamen pro prima ſumendam putavi: propterea quòd deſcriptio ejus ac calculus aliquo modo ſint faciliores.

Quod ad lineas attinet, quæ reliquis caſibus inſerviunt, non immorabor iis per ſpecies diſtinguendis, neque enim omnia dicere ſuſcepi: Sed quia modum inveniendi infinita puncta, per quæ tranſire debent, explicui, ſimul modum, quo deſcribendæ ſunt, me ſatis oſtendiſſe puto.

Quanam curvæ lineæ in Geometriam ſint recipiendæ, quæ deſcribuntur inveniendo plura earum puncta.

Ac proinde non abs re fuerit, hîc conſiderare, magnum eſſe diſcimen inter hunc modum inveniendi plura puncta, ad deſcribendam aliquam curvam lineam, atque illum, quo utimur in deſcriptione Spiralis & ſimilium. Quandoquidem hoc poſteriore modo, non indifferenter omnia quæſitæ lineæ puncta inveniuntur, ſed tantùm ea, quæ per menſuram aliquam ſimpliciorem determinari poſſunt, quàm eſt ea, quæ ad illam componendam requiritur. Atque ita propriè loquendo nullum ex ejus punctis invenitur, hoc eſt, nullum eorum, quæ ipſi ita propria ſunt, ut non niſi per illam inveniri poſſint. Sed è contra nullum habetur punctum in lineis, quæ quæſtioni propoſitæ inſerviunt, quod nòn inter illa, quæ modo ſupra explicato determinantur, inveniri queat. Cum autem modus deſcribendi lineam curvam,

Digitized by Google

curvam, indifferenter plura ejus puncta inveniendo, ad illas tantùm ſe extendat, quæ itidem per motum aliquem ordinatum & continuum deſcribi poſſunt, non erit is omnino à Geometria rejiciendus.

Quemadmodum non magis etiam ex ea rejiciendus eſt modus, in quo filo ſeu chordâ complicatâ utimur, ad determinandam ſummam vel differentiam duarum pluriúmve linearum rectarum, quæ à quolibet quæſitæ curvæ puncto duci poſſunt ad certa quædam alia puncta, vel lineas in certis angulis, ſicut in Dioptrica fecimus, ad explicandam Ellipſin & Hyperbolam. Nam licèt in Geometria nullæ lineæ, quæ chordis ſimiles videntur, hoc eſt, quæ modò rectæ, modò curvæ ſunt, recipi poſſint; (cùm ratio, quæ inter rectas & curvas exiſtit, non cognita ſit, nec etiam ab hominibus (ut arbitror) cognoſci queat; nihilque inde, quod exactum atque certum eſt, concludere poſſimus;) Tamen, quia non aliter chordis illis in dictis conſtructionibus utimur, quàm ut earum beneficio lineas rectas determinemus, quarum longitudo exactè cognoſcitur, efficere hoc non debet ut rejiciantur.

Quæ etiam illæ ſint, quæ ope fili deſcribuntur, & ibidem recipi poſſint.

Jam verò ex hoc ſolo, quòd ſcitur relatio, quam omnia lineæ curvæ puncta habent ad puncta omnia lineæ rectæ, modo illo, quem ſupra explicavi; facile quoque eſt invenire relationem, quam habent ad omnia alia puncta & datas lineas: atque exinde cognoſcere diametros, axes, centra, aliasque lineas, & puncta, ad quæ unaquæque curva linea relationem habebit ſpecialiorem vel ſimpliciorem quàm ad alia: atque ita imaginari diverſos modos illas deſcribendi, ex quibus faciliores eligi poſſunt. Immo verò, poteſt quoque ex hoc ſolo inveniri propemodum omne id, quod determinari poteſt, atque ad ſpatii, quod comprehendunt, magnitudinem

H

Quòd, ad inveniendum omnes linearum curvarum proprietates, ſufficiat ſcire relationem, quam omnia illarum puncta habent ad puncta linearum rectarum; &

Digitized by Google

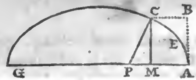
modum ducendi lineas rectas, quæ ipſas ſecent in omnibus illis punctis ad angulos rectos.

nem ſpectat: ita ut non opùs ſit de his agere apertiùs. Et denique quantum ad omnes reliquas proprietates, quas lineis curvis attribuere poſſumus, ipſæ tantummodo ab angulorum, quos cum certis quibuſdam aliis lineis efficiunt, amplitudine dependent. Sed ſi lineæ rectæ duci poſſint, quæ illas in punctis, ubi aliæ, cum quibus angulos faciunt, quos menſurare volumus, ipſis occurrunt, ſecent ad angulos rectos, vel, quod hîc pro eodem haberi volo, quæ earum contingentes ſecent: magnitudo horum angulorum non erit inventu difficilior, quàm ſi à duabus rectis lineis comprehenſi eſſent. Atque ideo confidam, me expoſuiſſe hîc omnia illa, quæ pro curvarum linearum elementis requiruntur, poſtquam generalem modum ducendi rectas lineas, quæ eas ad rectos angulos in quibuſvis ipſarum punctis ſecent, oſtendero. Nec verebor dicere, Problema hoc non modò eorum, quæ ſcio, utiliſſimum & generaliſſimum eſſe; ſed etiam eorum, quæ in Geometria ſcire unquam deſideraverim.

I

K

Modus generalis inveniendi lineas rectas, quæ ſecent datas curvas, vel earum contingentes, ad angulos rectos.

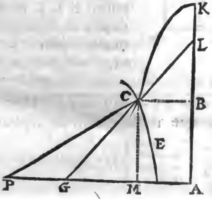


Sit C E linea curva, oporteatque per punctum C rectam lineam ducere, facientem cum ipſa angulos rectos.

Suppono rem tanquam jam factam, lineamque quæſitam eſſe C P, quam produco uſque ad punctum P, ut occurrat rectæ G A, quam ſuppono illam eſſe, ad cujus puncta referenda ſunt puncta omnia lineæ C E: ita ut faciendo M A ſeu C B ∞ y, & C M ſeu B A ∞ x, habeam æquationem aliquam, quæ mihi relationem, quæ eſt inter x & y, explicet. Deinde facio P C ∞ s, & P A ∞ v, ſeu P M ∞ $v - y$. Unde propter triangulum

Digitized by Google

lum rectangulum PMC invenio ss, quod eſt quadratum baſis, æquale $xx + vv - 2vy + yy$, quadratis duorum laterum, hoc eſt, invenio $x \infty \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, aut $y \infty v - \sqrt{ss - xx}$. Cujus æquationis ope aufero ex æquatione altera, (quæ mihi relationem explicat, quam puncta curvæ CE habent ad puncta rectæ GA) alterutram è duabus quantitatibus indeterminatis x vel y. Quod quidem facile eſt, ſi ubique pro x ponamus $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, & quadratum hujus ſummæ pro xx, & ejus cubum pro x^3, & ita porrò; ſi fuerit x, quam tollere velimus; aut ſi fuerit y, ponendo ejus loco $v - \sqrt{ss - xx}$, & quadratum, cubúmve, &c. hujus ſummæ, loco yy, aut y^3, &c. Ita ut inde ſemper reſtet æquatio, in qua non niſi una habeatur quantitas indeterminata x, vel y.

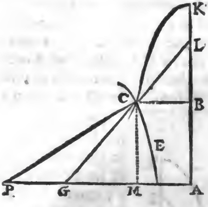


Quemadmodum ſi CE eſt Ellipſis, in qua MA L ſit ſegmentum diametri ad quam CM ſit ordinatim *Exemplum hujus Operationis in Ellipſi.* adplicata, quódque pro latere recto habeat r; pro tranſverſo autem q: fiet per 13^{tium} Theorema 1^{mi} libri Conicorum Apollonii: $xx \infty ry - \frac{r}{q}yy$. Unde tollendo xx, reſtabit $ss - vv + 2vy - yy \infty ry - \frac{ryy}{q}$, vel $yy \frac{+qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$ æquale nihilo.

F Præ-

Præſtat enim hoc loco ita totam ſummam conſiderare, quàm unam ejus partem alteri parti adæquare.

M
Aliud Exemplum in Parabola ſecundi generis.



Eodem modo, ſi C E ſit curva linea, per motum Parabolæ deſcripta, ut ſuperiùs fuit explicatum, & pro G A ponatur b, pro K L, c; & d pro latere recto pertinente ad Parabolæ diametrum K L: æquatio explicans relationem, quæ eſt inter x & y, erit $y^3 - byy - cdy + bcd + dxy \infty 0$. E qua auferendo x, habebitur $y^3 - byy - cdy + bcd + dy\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$. Hoc eſt, ordinando æquationem ope multiplicationis, prodibit

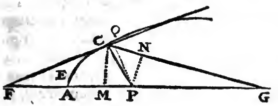
$$y^6 - 2by^5 \left.\begin{matrix}-2cd\\+bb\\+dd\end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix}+4bcd\\-2ddv\end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix}-2bbcd\\+ccdd\\-ddss\\+ddvv\end{matrix}\right\} yy - 2bccddy + bbccdd \infty 0.$$

Atque ita de aliis.

Quinetiam, licèt puncta lineæ curvæ ad puncta lineæ rectæ ſeſe eo, quo dixi, modo non haberent; ſed alio quolibet, quem ſibi quis imaginari poſſet: poterit tamen nihilominus ſemper æquatio ejuſmodi inveniri.

Tertium exemplum in Ovali, ſive Ellipſi ſecundi generis.

Quemadmodum ſi C E eſt linea, habens ejuſmodi relationem ad tria puncta F, G, & A, ut lineæ rectæ, à quolibet ejus puncto, ut C, ad punctum F ductæ, excedant lineam F A, quantitate aliqua, quæ datam habeat rationem ad quantitatem, quâ G A excedit lineam, quæ ab eodem puncto C ducitur ad punctum G: facio G A ∞ b, A F ∞ c, ſumendoque punctum C ad libitum



bitum in curva, ſuppono, quantitatem, quà C F ſuperat F A, eſſe ad illam, quà G A ſuperat G C, ſicut d ad e: ita ut ſi prior illa quantitas indeterminata vocetur z, F C ſit $c + z$, G C verò $b - \frac{ez}{d}$. Deinde ponendo M A ∞ y, G M erit $b - y$, & F M $c + y$: & quandoquidem triangulum C M G rectangulum eſt, ſi auferam quadratum ex G M à quadrato ex G C, relinquetur quadratum ex C M, $\frac{ee}{dd}zz - \frac{2be}{d}z + 2by - yy$. Non ſecus, ſi à quadrato ex F C auferam quadratum ex F M, relinquetur itidem quadratum ex C M in aliis terminis, videlicet $zz + 2cz - 2cy - yy$. Unde cum hi termini præcedentibus ſint æquales, oſtendunt y ſeu M A fore $\frac{ddzz + 2cddz - eezz + 2bdez}{2bdd + 2cdd}$. Ac proinde, ſubſtituendo hanc ſummam loco y in quadrato ex C M, invenietur, illud exprimendum eſſe hiſce terminis $\frac{bddzz + ceezz + 2bcddz - 2bcdez}{bdd + cdd} - yy$.

Porrò ſuppono, lineam rectam P C occurrere curvæ C E ad angulos rectos in puncto C, faciendóque P C ∞ s, & P A ∞ v, ut ante, P M erit $v - y$; habebiturque propter triangulum rectangulum P C M, $ss - vv + 2vy - yy$ pro quadrato ex C M. Ubi ſi rurſus pro y ſubſtituamus ſummam ipſi æqualem, exurget

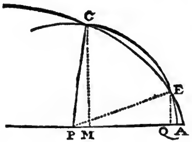
$$zz \frac{+2bcddz - 2bcdez - 2cddvz - 2bdevz - bddss + bddvv - cddss + cddvv}{bdd + cee + eev - ddv} \infty 0,$$

pro æquatione, quam quærebamus.

Poſtquam igitur invenimus talem æquationem, non eâ utemur ad cognoſcendas quantitates x, y, vel z, quæ hìc

hic datæ ſunt, quia punctum C eſt datum, ſed ad inveniendam quantitatem v vel s, quæ quæſitum punctum P determinant. In quem finem conſiderari debet: ſi punctum P tale eſt, quale deſideratur, quòd circulus, cujus id ipſum eſt centrum, quique per punctum C tranſit, tangat ibidem curvam lineam C E, nec ipſam ſecet. Sed quòd, ſi idem punctum P propiùs aut remotiùs ſumatur à puncto A, quàm oportet, circulus hic non ſolùm in puncto C, ſed etiam neceſſariò in alio quodam puncto curvam C E ſit ſecturus.

Deinde conſiderandum quoque eſt, quòd, quando hic circulus lineam curvam C E ſecat, æquatio, per quam quantitas x vel y, vel quædam alia ſimilis quæritur, ſupponendo P A & P C eſſe cognitas, neceſſariò duas contineat radices, quæ ſunt inæquales. Nam ſi, exempli gratiâ, circulus hic ſecet curvam CE, in punctis C & E, ac ducatur E Q parallela ipſi C M: nomina quantitatum indeterminatarum x & y æquè bene convenient lineis E Q & Q A, atque ipſis C M & M A, exiſtente P E æquali P C, propter circulum. Adeò ut, quærendo lineas E Q & Q A, per P E & P A, (quæ tanquam cognitæ ſupponuntur) eandem habituri ſimus æquationem, quam ſi quærerentur C M & M A per P C & P A. Unde liquidò conſtat, ipſius x, vel y, vel



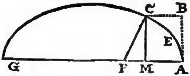
alterius ejuſmodi quantitatis, quam ſuppoſuerimus, valorem, in hac æquatione fore duplicem, hoc eſt, æquationem duas admiſſuram radices, quæ ſunt inæquales; quarum quidem una futura eſt C M, & altera E Q, ſi fuerit

Digitized by Google

fuerit x, quam quærimus ; aut quarum una futura eſt M A, & altera Q A, ſi fuerit y, quæ quæritur. Verum equidem eſt, quòd, cùm punctum E non ad eandem curvæ partem reperitur cum puncto C, una tantùm duarum harum radicum ſit vera, & altera inverſa ſeu minor quàm nihil : ſed quò hæc puncta C & E ſibi invicem ſunt propiora, eò quoque differentia inter radices haſce erit minor, quæ denique omnino inter ſe æquales futuræ ſunt, ſi bina hæc puncta in unum punctum cadant; hoc eſt, ſi circulus, qui per C tranſit, curvam CE ibidem tangat, nec omnino ſecet.

Præterea conſiderandum eſt, quòd æquatio, in qua duæ ſunt radices æquales, neceſſariò eandem formam habeat, ac ſi in ſe ipſam multiplicetur quantitas, quam velut incognitam ſupponimus, multata quantitate cognitâ ſibi æquali : & deinde hæc ultima ſumma, ſi non tot dimenſiones habet, quot præcedens, rurſus per aliam ſummam multiplicetur, totidem, quot alteri deſunt, dimenſiones habentem, ſic ut ſeparatim æquatio inter ſingulos unius atque ſingulos alterius terminos haberi poſſit.

Ut, exempli causâ, dico, primam æquationem ſupra inventam, nimirum : $yy \frac{+qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$, eandem formam habituram, quam illa, quæ producitur, faciendo e æqualem y, atque multiplicando $y - e$ in ſe, unde exſurgit $yy - 2ey + ee$; ita ut ſeparatim ſingulos earum terminos inter ſe



comparare poſſimus, ac dicere : quòd, poſtquam primus terminus, qui eſt yy, in utraque æquatione planè idem

eſt, ſecundus, qui in una eſt $\frac{qry - 2qvy}{q - r}$, ſit æqualis ſecundo alterius, qui eſt $-2ey$. Unde quærendo quantitatem v, quæ quantitatem lineæ P A deſignat, invenietur $v \propto e - \frac{r}{q}e + \frac{1}{2}r$; vel quia e æqualem ſuppoſuimus ipſi y, habebitur $v \propto y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r$. Non ſecus inveniri quoque poſſet s per tertium terminum $ee \propto \frac{qvv - qss}{q - r}$; ſed quia quantitas v ſatis determinat punctum P, quod ſolum quærebamus, neceſſe non erit ulteriùs progredi.

Eádem ratione ſecunda æquatio ſuperiùs inventa: nempe,

$$y^6 - 2by^5 \left.\begin{array}{l} -2cd \\ +bb \\ +dd \end{array}\right\} y^4 \left.\begin{array}{l} +4bcd \\ -2ddv \end{array}\right\} y^3 \left.\begin{array}{l} -2bbcd \\ +ccdd \\ -ddss \\ +ddvv \end{array}\right\} yy - 2bccddy + bbccdd.$$

eandem debet habere formam, quam ſumma, quæ producitur multiplicando $yy - 2ey + ee$ per $y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4$, quæ eſt

$$y^6 \left.\begin{array}{l} +f \\ -2e \end{array}\right\} y^5 \left.\begin{array}{l} +gg \\ -2ef \\ +ee \end{array}\right\} y^4 \left.\begin{array}{l} +h^3 \\ -2egg \\ +eef \end{array}\right\} y^3 \left.\begin{array}{l} +k^4 \\ -2eh^3 \\ +eegg \end{array}\right\} yy \left.\begin{array}{l} -2ek^4 \\ +eeh^3 \end{array}\right\} y + eek^4.$$

ità ut ex binis hiſce æquationibus alias ſex eliciam, quæ ad inveniendas ſex quantitates f, g, h, k, v, & s inſerviunt.

Unde facilè eſt intelligere, quòd, cujuſcunque generis linea curva propoſita eſſe poſſit, tot ſemper hoc procedendi modo æquationes reſultent, quot quantitates incognitas ſupponere coacti fuerimus. Verùm ut ordine æquationes haſce disjungamus, tandemque quantitatem v (quæ quidem ea ſola eſt, qua indigemus, & cujus occaſione cæteræ quæruntur) inveniamus: oportet primò per ſecundum terminum quærere f, primam quantitatum incognitarum ultimæ ſummæ, invenieturque $f \propto 2e - 2b$.

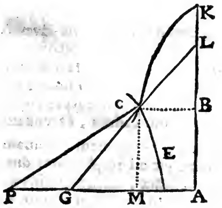
Dein-

Deinde per ultimum quærenda eſt k, ultima quantitatum incognitarum ejuſdem ſummæ, fitque $k^4 \infty \frac{bbccdd}{ee}$.

Porrò per tertium terminum quærenda eſt g, ſecunda quantitas, & fit $gg \infty 3ee - 4be - 2cd + bb + dd$.

Denique per penultimum invenienda eſt h, penultima quantitas, & fit $h^3 \infty \frac{2bbccdd}{e^3} - \frac{2bccdd}{ee}$. Atque ita eodem ordine uſque ad ultimam progrediendum eſſet, ſi plures ejuſmodi quantitates in eadem ſumma haberentur; ſiquidem hoc eodem ſemper modo fieri poteſt.

Præterea per terminum, qui in hoc ipſo ordine ſequitur, atque hic quartus eſt, oportet inveſtigare v, & fit



$$v \infty \frac{2e^3}{dd} - \frac{3bee}{dd} + \frac{bbe}{dd} - \frac{2ce}{d} + e + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{ee} - \frac{bbcc}{e^3}.$$

vel, ponendo y loco e, quæ ipſi eſt æqualis, habebitur

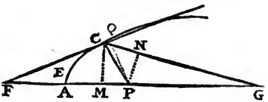
$$v \infty \frac{2y^3}{dd} - \frac{3byy}{dd} + \frac{bby}{dd} - \frac{2cy}{d} + y + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{yy} - \frac{bbcc}{y^3},$$

pro linea A P.

Simi-

Similiter quoque tertia æquatio, quæ eſt

$$zz\ \frac{+2bcddz-2bcdez-2cddvz-2bdevz-bddss+bddvv-cddss+cddvv}{bdd+cee+eev-ddv}$$, eandem formam habet, quam $zz-2fz+ff$, ſupponendo f æqualem z: ita ut obtineatur rurſus æquatio inter $-2f$, vel $-2z$ & $\frac{+2bcdd-2bcde-2cddv-2bdev}{bdd+cee+eev-ddv}$. Unde cognoſcitur quantitatem v fore $\frac{bcdd-bcde+bddz+ceez}{caa+bae-eez+ddz}$.



Ideoque ſi componamus lineam AP ex hac ſumma, ipſi v æquali, cujus quantitates omnes ſunt cognitæ, atque à puncto ſic invento P rectam lineam ducamus versùs C, ſecabit ipſa ibidem curvam CE ad angulos rectos. Quod faciendum erat. Nec video quid impedire poſſit, quò minùs Problema hoc eodem modo ad omnes lineas curvas, quæ ſub calculum aliquem Geometricum cadunt, extendatur.

Et quidem quod ad ultimam ſummam attinet, quæ pro libitu ſumpta eſt ad implendum dimenſionum numerum alterius ſummæ, quando in illa quædam dimenſiones deſunt, quemadmodum paulò ante ſumpſimus $y^4+fy^3+ggyy+h^3y+k^4$, operæ pretium eſt ut advertamus, ſigna + & — talia ibi ſupponi poſſe, qualia quis voluerit, nec propterea lineam v, ſeu AP diverſam inveniri, ut facilè experienti conſtabit. Si enim demonſtrandis Theorematis omnibus, quorum hîc mentionem aliquam facio, immorarer, conſcribenuds mihi eſſet liber multò major, quàm quidem mihi eſſet animus,

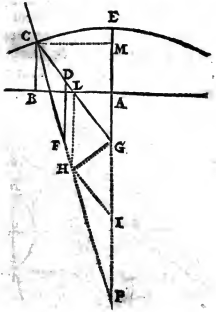
Digitized by Google

mus. Attamen obiter vos monere volo, quòd inventio hæc ſupponendi duas ejuſdem formæ æquationes, ad comparandum ſeparatim omnes terminos unius cum omnibus terminis alterius, ut inde ex una ſola naſcantur plures aliæ, (cujus hîc exempla vidiſtis,) infinitis aliis Problematis inſervire poſſit, neque una ex minimis, methodi, quá utor, exiſtat.

Non adjungo conſtructiones, ſecundùm quas contingentes, ſive perpendiculares quæſitæ, poſt calculum, quem jam explicavi, ſunt ducendæ: quandoquidem illæ ſemper facilè inveniri poſſunt; etiamſi aliquá ſæpe induſtriâ, ut breves atque ſimplices reddantur, opùs ſit.

Ut, exempli causâ, ſi CE eſt prima Conchoïdes Veterum, cujus G ſit Polus, & AB regula, cujus ope ducta N

Exemplum conſtructionis hujus Problematis in Conchoïde.

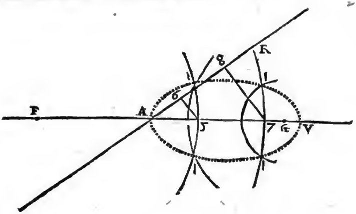


eſt; adeò ut lineæ omnes rectæ, quæ tendunt versùs G, atque intra curvam CE, & rectam AB continentur,

(ut E A & CL) ſibi invicem ſint æquales : Velimuſque rectam lineam ducere C F , quæ ſecet hanc Conchoïdem in dato puncto C ad angulos rectos : Quærendo juxta methodum, à nobis expoſitam , in linea A B punctum , per quod dicta linea C F tranſire debet , incidemus in calculum , nullo præcedentium breviorem ; & nihilominus conſtructio inde elicienda valde brevis eſt. O Oportet enim duntaxat in linea recta C G ſumere C D æqualem C B, quæ perpendiculariter cadit in B A , & deinde ex puncto D ducere D F , parallelam G A, ac æqualem L G : quâ ratione habebitur punctum F, per quod quæſita linea C P eſt ducenda.

Explicatio quatuor generum novarum Ovalium Opticæ inſervientium.

Cæterùm ut ſciatis , conſiderationem curvarum linearum , hîc propoſitarum , non carere uſu, & quòd illæ diverſas habeant proprietates , quæ nullâ ratione cedunt proprietatibus ſectionum Conicarum , libet præterea hîc ſubjicere explicationem certarum quarundam Ovalium , quas ad Catoptricæ & Dioptricæ Theoriam utiliſſimas eſſe videbitis. Modus autem quo illas deſcribo, talis eſt.



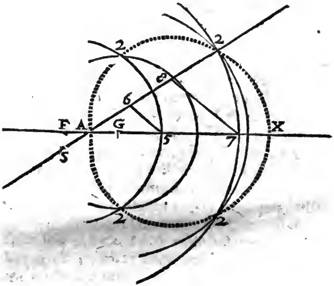
Primùm ductis rectis lineis F A & A R , ſeſe interſecan-

ſecantibus in puncto A, ad quoslibet angulos, ſumo ad arbitrium in una ex ipſis punctum F, hoc eſt, propiùs aut remotiùs ab A puncto, prout Ovales haſce majores aut minores deſcribere animus eſt; atque ex puncto F, ceu centro, deſcribo circulum, tranſeuntem aliquantulum ultra A, ut per punctum 5. Deinde ex hoc puncto 5 duco lineam rectam 5, 6, ſecantem alteram in puncto 6; ita ut A 6 minor ſit quàm A 5, juxta quamlibet rationem datam, nimirum eam, quæ refractiones menſurat, ſi eâ in Dioptrica uti velimus. Quo facto, ad libitum quoque ſumo punctum G in linea F A, ex eadem parte, quâ punctum 5 eſt ſumptum, hoc eſt, faciendo, ut lineæ A F & G A eam inter ſe rationem habeant, quam volumus. Poſtea poſitâ R A æquali G A in linea A 6, deſcribo alium circulum ex centro G, cujus radius æqualis ſit lineæ R 6, priorem ab utraque parte lineæ F G in puncto 1 ſecantem; quod quidem unum eſt ex illis, per quæ prima quæſitarum Ovalium tranſire debet. Similiter, deſcribo rurſus circulum ex centro F, qui tranſeat aliquantulum ultra citráve punctum 5, ut per punctum 7; ductâque lineâ rectâ 7, 8, parallelâ ipſi 5, 6, ex centro G deſcribo alium circulum intervallo lineæ R 8, priorem, qui per punctum 7 tranſit, ſecantem in puncto 1, quod aliud præterea punctum eſt ejuſdem Ovalis. Atque ita invenire licet tot alia puncta, quot voluerimus, ducendo ſemper alias atque alias lineas ipſi 7, 8 parallelas, nec non alios alióſque circulos ex centris F & G.

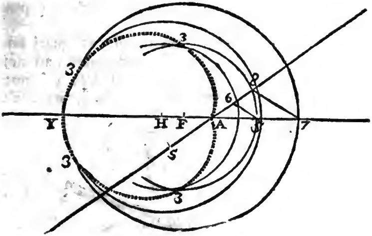
Quod ad ſecundæ Ovalis deſciptionem attinet, ibi nulla quidem alia differentia advertenda occurrit, quàm quòd loco A R ſumere oporteat A S ipſi A G æqualem, ex altera parte puncti A, & quòd radius circuli, ex centro G deſcripti, ad ſecandum eum, qui ex centro F per

Digitized by Google

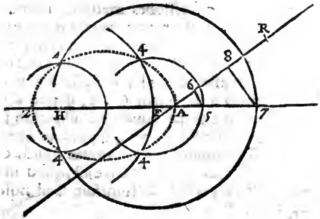
punctum 5 deſcriptus eſt, æqualis ſumendus ſit lineæ S 6; aut etiam æqualis lineæ S 8, ſi illum, qui per punctum 7 tranſit, ſecare debeat. Atque ita de aliis. Quâ
O O quidem ratione hi circuli in punctis 2, 2 ſeſe interſecabunt, per quæ ſecunda hæc Ovalis erit ducenda.



Porrò quod ſpectat ad tertiam & quartam, loco lineæ A G ſumenda erit A H ex altera parte puncti A, nimirum ex eadem parte, qua punctum F eſt ſumptum. Ubi ampliùs obſervandum venit, lineam hanc A H excedere debere ipſam A F, quæ quoque nulla eſſe poteſt, ita ut punctum F idem ſit, quod punctum A, in deſcriptione omnium harum Ovalium. Deinde poſtquam lineæ A R & A S ſic ipſi A H ſunt æquales factæ, ad deſcribendam tertiam Ovalem A 3 Y, deſcribo circulum ex centro H, cujus radius ſit æqualis lineæ S 6, circulum ex centro F, deſcriptum per punctum 5, ſecantem



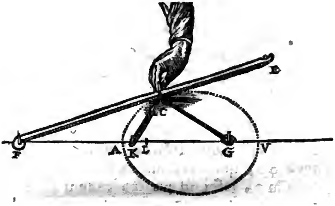
tem in puncto 3; ſimiliterque alium ex centro H, intervallo lineæ S 8, qui circulum ex centro F, deſcriptum per punctum 7, ſecet in puncto itidem notato 3. atque ita de aliis. Denique pro ultima, deſcribo circulos ex



 centro

centro H, quorum radii ſint æquales lineis R 6, & R 8, atque ſimilibus, qui reliquos circulos ſecent in punctis notatis 4.

Poſſent præterea infiniti alii modi excogitari ad deſcribendas haſce Ovales. Ut, exempli cauſâ, ad deſcribendam primam A V, quando lineæ F A & A G ponuntur æquales; divido totam F G in puncto L; ita ut F L ſit



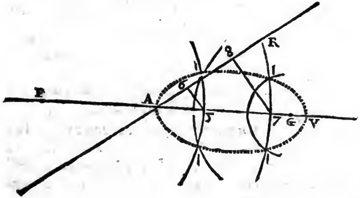
ad L G, ſicut A 5 ad A 6, hoc eſt, ut ipſæ inter ſe rationem ſervent, quæ refractiones metitur. Deinde ſectâ A L bifariam in K, facio rotare regulam aliquam, ut F E, circa punctum F, interea dum juxta ipſam velùt agglutinata tenetur chorda E C, quæ, uno extremo annexa extremitati regulæ versùs E, ſe flectit à C versùs K, atque deinde rurſus à K versùs C, ac denuo à C versùs G, ubi alterum ejus extremum eſt alligatum; ſic ut longitudo ipſius compoſita ſit ex longitudine lineæ G A plus A L, plus F E, minus A F, & motus puncti C Ovalem hanc deſcribat: ad imitationem ejus, quod in Dioptrica de Ellipſi & Hyperbola dictum fuit. Sed nolo huic argumento diutiùs immorari.

Ad hæc, etiamſi hæ Ovales ejusdem fermè naturæ viden-

videntur, ipſæ nihilominus quatuor diverſorum ſunt generum, quorum unumquodque ſub ſe infinita alia genera continet, & unumquodque rurſus tot diverſas ſpecies, quot facit Ellipſium aut Hyperbolarum genus. Etenim prout ratio, quæ inter lineas A 5 & A 6, ſimiléſve, conſiſtit, diverſa eſt, genus quoque ſubalternum harum Ovalium fit diverſum. Deinde prout ratio inter lineas A F & A G vel A H mutatur, Ovales quoque cujuſque ſubalterni generis mutantur ſpecie. Prout autem A G vel A H major vel minor eſt, ipſæ magnitudine quoque differunt. Quòd ſi verò lineæ A 5 & A 6 æquales ſumantur, loco Ovalium primi aut tertii generis, deſcribentur tantùm lineæ rectæ; ſed loco ſecundi, omnes Hyperbolæ; & loco ultimi, omnes Ellipſes.

Proprietates harum Ovalium concernentes reflexiones & refractiones.

Ulteriùs in qualibet harum Ovalium conſiderandæ ſunt etiam duæ partes, quæ diverſas proprietates habent; quippe in prima pars illa, quæ eſt versùs A, facit ut radii, qui in aëre exiſtentes ex puncto F prodeunt, detorqueantur omnes versùs G punctum, poſtquam in convexam vitri ſuperficiem inciderunt, qualis hîc eſt 1 A 1. Et in quo vitro refractiones ſic fiunt, ut juxta ea,



quæ

quæ in Dioptricis dicta ſunt, illæ omnes per rationem, quæ inter lineas A 5 & A 6, aut ſimiles, quarum ope hæc Ovalis deſcripta eſt, obtinetur, menſurari poſſint.

Verùm pars illa, quæ eſt versùs V, facit ut radii, qui ex puncto G prodeunt, omnes versùs F reflectantur, ſi in ſuperficiem concavam ſpeculi inciderint, cujus figu-
P ra ſit 1 V 1; & quod ex tali materia conſtet, ut vim horum radiorum, ſecundùm rationem, quæ inter lineas A 5 & A 6 reperitur, diminuat. Quandoquidem ex eo, quod in Dioptrica demonſtravimus, liquet, hoc poſito, futurum, ut etiam reflexionum anguli non ſecus ac refractionum inæquales exiſtant, atque eodem modo menſurari poſſint.

In ſecunda Ovali, pars 2 A 2 ſimiliter reflexionibus inſervit, quarum anguli inæquales ſupponuntur. Si enim illa ſuperficiem ſpeculi, ex eadem materia, qua præcedens, confecti, referret, faceret ut radii omnes, qui ex puncto G venirent, ſic reflecterentur, perinde ac ſi poſt reflexionem illam viderentur procedere ex puncto F. Et notandum eſt, quòd, ſi linea AG multò major ſit aſſumpta quàm AF, ſpeculum hoc in medio versùs A convexum ſit futurum, atque concavum in extremitatibus. Quippe hujus lineæ figura talis exiſtit, ut potiùs cor quàm Ovalem repræſentet.

At verò altera ejus pars 2 X 2 refractionibus inſervit, facitque ut radii, qui in aëre ſunt, ac tendunt versùs F, ſe omnes incurvent versùs G, tranſeundo ſuperficiem vitri, quod figuram illam habet.

Tertia Ovalis tota refractionibus inſervit, facitque ut radii, qui in aëre exiſtentes versùs F tendunt, in vitro ſe omnes versùs H recipiant, poſtquam ſuperficiem
PP ejus tranſiêrunt, cujus figura eſt A 3 Y 3, quæ undique eſt convexa; præterquam versùs A, ubi paululùm con-
cava

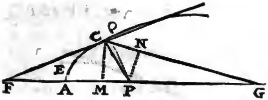
Digitized by Google

cava exiſtit, ita ut ipſa pariter atque præcedens cordi haud ſit abſimilis. Differentia autem, quæ eſt inter duas ejus partes, in eo conſiſtit, quòd punctum F uni ex illis propius ſit, quàm punctum H; quódque ab altera remotius quàm idem punctum H exiſtat.

Eodem modo ultima Ovalis omnino reflexionibus inſervit, facitque, ut radii, qui ex puncto H veniunt, atque in ſuperficiem concavam alicujus ſpeculi ejuſdem cum præcedentibus materiæ incidunt, cujuſque figura eſt A 4 Z 4, reflectantur omnes versùs F.

Ita ut puncta F, & G ſeu H Focos harum Ovalium appellare liceat, ad exemplum eorum, quæ in Ellipſibus & Hyperbolis habentur, atque in Dioptrica ita nominata ſunt.

Omitto multas alias refractiones & reflexiones, quæ harum Ovalium ope diriguntur: cum enim harum ſolummodo converſæ aut contrariæ ſint, ex iis facilè deduci poterunt.

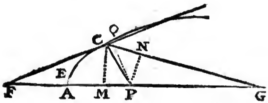


Verùm non omittenda eſt demonſtratio ejus, quod dixi. In quem finem ſumamus, exempli causâ, punctum C pro libitu in priore parte primæ harum Ovalium; deinde ducamus lineam rectam C P, quæ ſecet hanc curvam in C, ad angulos rectos. Quod quidem facile eſt, per Problema præcedens. Etenim, ſumendo b pro A G, c pro A F, $c + z$ pro F C; ſupponendoque, quòd ratio, quæ eſt inter d & e, (quam hic *Demonſtratio harum proprietatum.*

ſemper pro ea ſumam, quæ propoſiti vitri refractiones metitur) illam quoque, quæ eſt inter lineas A ſ, & A 6, ſimiléſve, quibus in Ovalis hujus deſcriptione uſi ſumus, deſignet: ipſi G C attribuit $b - \frac{ez}{d}$, inveniturque lineam A P eſſe $\frac{bcdd - bcde + bddz + ceez}{bde + cdd + ddz - eez}$, ut ſupra eſt oſtenſum.

Porrò ex puncto P deductâ ſuper rectam F C perpendiculari P Q, nec non P N perpendiculari ſuper G C, conſiderandum eſt, num P Q ſit ad P N, ſicut *d* ad *e*, hoc eſt, ut lineæ, quæ vitri convexi A C refractiones metiuntur: hoc enim ſi fiat, radius, qui à puncto F venit ad punctum C, ita ſe ibidem incurvare debebit, intrando hocce vitrum, ut inde versùs G tendat. Quemadmodum ex iis, quæ in Dioptrica tradidi, manifeſtiſſimum eſt. Atque eapropter per calculum exploremus, num verum ſit, P Q eſſe ad P N, ſicut *d* ad *e*. Ut ſequitur.

Triangula rectangula P Q F & C M F ſimilia ſunt, unde liquet, C F eſſe ad C M, ut F P ad P Q; ac proin-



de F P multiplicatam per C M atque diviſam per C F, eſſe æqualem ipſi P Q. Eodem modo, triangula rectangula P N G & C M G ſimilia ſunt; unde ſequitur, G P multiplicatam per C M & diviſam per C G, eſſe æqualem ipſi P N. Deinde, quia multiplicationes vel diviſiones duarum quantitatum per eandem, rationem

Digitized by Google

nem quæ inter ipſas eſt, non mutant: ſi F P multiplicata per C M, & diviſa per C F, eſt ad G P, etiam multiplicatam per C M, & diviſam per C G, ſicut d ad e: dividendo utramque ſummam per C M, & deinde multiplicando utramque per C F, ac denuo per C G: relinquitur, F P multiplicatam per C G, in eadem ratione eſſe ad G P multiplicatam per C F, ut eſt d ad e. At verò per conſtructionem F P eſt $c \frac{+bcdd - bcde + bddz + ceez}{bde + cdd + ddz - eez}$, ſive F P $\infty \frac{bcdd + ccdd + bddz + cddz}{bde + cdd + ddz - eez}$, & C G eſt $b - \frac{ez}{d}$. Unde ſi multiplicemus F P per C G, proveniet

$$\frac{bbcdd + bccdd + bbddz + bcddz - bcdez - ccdez - bdezz - cdezz}{bde + cdd + ddz - eez}.$$

Similiter G P eſt $b \frac{-bcdd + bcde - bddz - ceez}{bde + cdd + ddz - eez}$, ſive G P $\infty \frac{bbde + bcde - beez - ceez}{bde + cdd + ddz - eez}$, & C F eſt $c + z$. Ideo ſi multiplicemus G P per C F, exurget

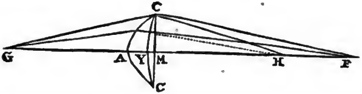
$$\frac{bbcde + bccde - bceez - cceez + bbdez + bcdez - beezz - ceezz}{bde + cdd + ddz - eez}.$$

Et quia prima harum ſummarum diviſa per d, eadem eſt quæ ſecunda diviſa per e; manifeſtum eſt, quòd F P multiplicata per C G ſit ad G P, multiplicatam per C F, hoc eſt, quòd P Q ſit ad P N, ſicut d ad e. Quod demonſtrandum erat.

Ubi ſciendum, demonſtrationem hanc ſe extendere ad omne illud, quod de aliis refractionibus aut reflexionibus, quæ in expoſitis Ovalibus fiunt, dictum eſt. Præterquam quòd aliud nihil quàm ſigna + & — in calculo ſit mutandum. Quæ ideo unuſquiſque proprio marte examinare poterit, ita ut huic rei diutiùs immorari non ſit opùs.

Sed oportet, ut nunc id præſtem, quod in Dioptrica omiſi, cùm ibi oſtenſum eſt, plurium diverſarum figurarum vitra haberi poſſe, quæ ſingula faciunt, ut radii,

dii, ab eodem objecti puncto venientes, coëant rurſus omnes in aliud punctum, poſtquam per illa tranſièrunt; & quòd horum vitrorum illa, quæ ab una parte admodum convexa ſunt, & concava ab altera, majorem efficaciam ad comburendum habeant, quàm illa, quæ ab utraque parte æqualiter ſunt convexa; cum hæc poſteriora contra pro perſpicillis ſint meliora: Contentus enim ibi fui explicare tantùm illa, quæ ad praxin exiſtimavi fore optima, habendo præcipuè rationem difficultatis, quæ artificibus in iis expoliendis occurrere poſſit. Adeoque ne quid, quod ad ejus ſcientiæ Theoriam ſpectat, deſiderari queat, explicanda hîc mihi ſupereſt vitrorum figura, quæ unam ex ſuperficiebus ſuis tam convexam aut concavam habeant, quàm quis voluerit, & nihilominus efficiant, ut radii omnes, qui ab uno puncto effunduntur, aut paralleli ſunt, colligantur rurſus in alio puncto: Quemadmodum etiam figura vitrorum, quæ idem præſtant, & æqualiter ab utraque parte ſunt convexa; aut in quibus convexitas unius ſuperficiei datam habet rationem ad convexitatem alterius.



Quomodo vitrum fieri poſſit, cujus una ſuperficies tam convexa aut conca-

Ponamus igitur pro primo caſu, quòd, cùm dantur puncta G, Y, C, & F, radii omnes, qui ex puncto G veniunt, aut ipſi G A ſunt paralleli, colligi debeant in puncto F, poſtquam vitrum tranſierint, ita concavum, ut, Y in medio ejus ſuperficiei interioris exiſtente, extremitas

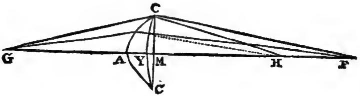
Digitized by Google

mitas ſit in punƈto C; ita ut chorda C M C, & ſagitta Y M, arcus C Y C datæ ſint. Quæſtio eò recidit, ut primò conſiderandum ſit, cujuſnam ex Ovalibus jam explicatis ſuperficies vitri Y C figuram requirat, ad faciendum, ut radii omnes, qui intra illud exiſtentes versùs idem punƈtum, ut H, quod nondum eſt cognitum, tendunt, egrediendo ſe versùs aliud punƈtum recipiant, ut F. Quippe nullus effeƈtus eſt, rationem, quâ hi radii reflexione aut refraƈtione detorquentur, concernens, qui per aliquam harum Ovalium produci non poſſit. Atque facilè cognoſcitur, hunc produci poſſe per tertiæ Ovalis partem, pauló ante vocatam 3 A 3; aut etiam per ejuſdem partem, nominatam 3 Y 3; aut denique per ſecundæ partem, appellatam 2 X 2. Et quia hæ tres ſub eundem hîc calculum cadunt, pro una pariter atque pro altera punƈtum Y ſumendum erit pro ipſarum vertice; C autem pro uno ex punƈtis, quæ in ipſarum ſunt circumferentia; & F pro uno ex focis; poſt quæ tantùm punƈtum H quærendum reſtat, quod alter focus eſſe debet. Illud autem invenitur, conſiderando, quòd differentia, quæ eſt inter lineas F Y & F C, ſe habere debeat ad differentiam, quæ eſt inter lineas H Y & H C, ſicut *d* eſt ad *e*, hoc eſt, ut major linearum, quæ vitri propoſiti refraƈtiones metiuntur, ad minorem. Quemadmodum ex harum Ovalium deſcriptione perſpicere licet. Et quoniam lineæ F Y & F C datæ ſunt, datur quoque ipſarum differentia, & per conſequens etiam illa, quæ eſt inter lineas H Y & H C: quandoquidem ratio, quæ inter duas haſce differentias conſiſtit, data eſt. Ampliùs, quia Y M eſt data, datur quoque differentia, quæ eſt inter M H & H C; ac tandem, quia C M eſt data, ſupereſt tantùm inveniendum M H, latus trianguli reƈtanguli C M H, cujus latus

va ſit, quàm libuerit, quod radios omnes, qui ex uno dato punƈto prodeunt, colligat rurſus in altero dato punƈto.

tus C M datum eſt, quemadmodum etiam differentia, quæ eſt inter C H baſin, & M H latus quæſitum. Unde illud facilè inveniri poteſt. Si enim ſumatur k pro exceſſu, quo C H excedit M H, & n pro longitudine lineæ C M, habebitur $\frac{nn}{2k} - \frac{1}{2}k$ pro M H.

Poſtquam igitur ſic inventum eſt punctum H, ſi illud longiùs reperiatur diſſitum à puncto Y, quàm inde diſtat punctum F, linea C Y debet eſſe prima pars Ova-



lis tertii generis, quæ ante nominata fuit 3 A 3: ſed ſi H Y minor eſt quàm F Y, aut in tantum H F ſuperat, ut differentia ipſarum, ratione totius F Y, major ſit, quàm eſt e, minor linearum, quæ refractiones metiuntur, comparata cum d majore, hoc eſt, ut faciendo H F ∞ c, & H Y ∞ $c+h$, dh ſit major quàm $2ce+eh$, & tunc C Y debet eſſe ſecunda pars ejuſdem tertiæ Ovalis, quæ paulò antè vocata fuit 3 Y 3; ſed erit ſecunda pars Ovalis ſecundi generis, quæ ſupra nominata fuit 2 X 2, ſi dh æqualis vel minor eſt quàm $2ce+eh$. Et denique ſi punctum H illud ipſum eſt, quod punctum F, quod quidem non contingit, niſi cùm F Y & F C ſunt æquales, tum dicta linea Y C erit Circulus.

Poſt hæc quærenda eſt C A C altera hujus vitri ſuperficies, quæ debet eſſe Ellipſis, cujus focus H, ſi radii incidentes paralleli ſupponantur. Quo etiam caſu facile eſt illam invenire. Sed ſi ſupponantur à puncto G veni-

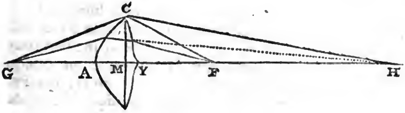
Digitized by Google

G venire, tum quidem ſuperficies illa debet eſſe prima pars Ovalis primi generis, cujus bini foci ſint G & H, quæque tranſeat per punctum C: unde porro invenitur punctum A, vertex ipſius Ovalis; conſiderando ſcilicet, quòd G C excedere debeat G A, quantitate aliquâ, quæ ſit ad illam, quâ H A ſuperat H C, ſicut d ad e. Etenim, ſumptâ k pro differentiâ, quæ eſt inter C H & H M; ſi pro A M ſupponatur x, habebitur $x - k$ pro differentia, quæ eſt inter A H & C H. Deinde ſi ſumatur g pro differentia, quæ eſt inter G C & G M, quæ datæ ſunt, habebitur $g + x$ pro illa, quæ eſt inter G C & G A. Et quandoquidem hæc ultima $g + x$ eſt ad alteram $x - k$, ſicut d ad e, habebitur $ge + ex \propto dx - dk$, hoc eſt, $\frac{ge + dk}{d - e}$, pro linea x vel A M, per quam determinatur punctum A, quod quærebatur.

Quomodo aliud fieri poſſit, quod idem præſtet, cujuſque convexitas unius ſuperficiei datam rationem habeat ad convexitatem vel concavitatem alterius.

Ponamus jam pro caſu altero, quòd tantùm dentur puncta G, C, & F, ut & ratio, quæ eſt inter lineas A M & M Y, & quòd invenienda ſit figura vitri A C Y, quæ faciat ut radii omnes, à puncto G venientes, coëant rurſus in punctum F.

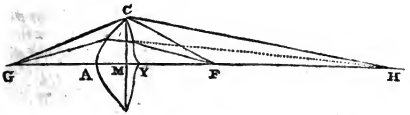
Hîc autem rurſus duabus Ovalibus uti poſſumus, quarum una A C pro focis habeat puncta G & H, altera



autem C Y puncta F & H. Qui igitur ut inveniantur, ſupponendo primùm punctum H, quod utrique eſt com-

commune, eſſe cognitum, quæro A M per tria puncta G, C, & H, ratione modò explicatâ; nimirum ſumendo k pro differentia, quæ eſt inter C H & H M, & g pro eâ, quæ eſt inter G C & G M. Unde cùm A C eſt prima pars Ovalis primi generis, invenio $\frac{ge+dk}{d-e}$ pro A M. Deinde quæro etiam M Y per tria puncta F, C, & H, ita ut C Y ſit prima pars Ovalis tertii generis; ſumendóque y pro M Y, & f pro differentia, quæ eſt inter C F & F M, habebo $f+y$ pro ea, quæ eſt inter C F & F Y: hinc cum habeam k pro illa, quæ eſt inter C H & H M, habebo $k+y$ pro ea, quæ eſt inter C H & H Y, quam ſcio eſſe debere ad $f+y$, ſicut e ad d, propter Ovalem tertii generis: unde invenio y ſeu M Y eſſe $\frac{fe-dk}{d-e}$; ita ut addendo ſimul quantitates inventas pro A M & M Y, habeam $\frac{ge+fe}{d-e}$ pro tota A Y. E quibus manifeſtum fit, quòd, ad quamcunque partem punctum H ſuppoſitum fuerit, dicta linea A Y ſemper compoſita ſit ex quantitate aliqua, quæ ſit ad differentiam, quâ G C & C F ſimul ſumptæ ſuperant G F, ut eſt e minor duarum linearum, quæ dimetiendis refractionibus vitri propoſiti inſerviunt, ad $d-e$, differentiam, quâ major minorem excedit. Quod quidem ſatis ſcitum eſt Theorema.

Poſtquam igitur ſic inventa eſt tota linea A Y, ſecanda eſt ipſa juxta rationem, quam inter ſe ſervare debent ejus partes A M & M Y; quibus mediantibus, (quia jam habetur punctum M) invenientur quoque puncta A & Y; & per conſequens punctum H, per Problema præcedens. Verùm conſiderandum eſt priùs, num linea A M ſic inventa, ſit major quàm $\frac{ge}{d-e}$, an minor, an verò ipſi æqualis. Nam ſi major fuerit, cognoſcitur



ſcitur inde, quòd curva A C eſſe debeat prima pars Ovalis primi generis, & C Y prima tertiæ, quemadmodum hic ſuppoſitæ fuère: cum aliàs, ſi minor fuerit, id indicet, quòd C Y debeat eſſe prima pars Ovalis primi generis, & A C prima pars tertiæ. Et denique ſi A M æqualis fuerit ipſi $\frac{ge}{d-e}$, quòd duæ hæ curvæ A C & C Y debeant eſſe duæ Hyperbolæ.

Poſſent extendi hæc duo Problemata ad infinitos alios caſus, quibus quidem deducendis ſuperſedeo, quòd nullum eorum uſum in Dioptricis deprehenderim.

Poſſem quoque ulteriùs progredi, & dicere, cùm una ex vitri ſuperficiebus data eſt, modò illa ſit aut plana, aut à ſectionibus Conicis, aut Circulo effecta, quomodo altera ejus ſuperficies confici debeat, ut radios omnes ab uno dato puncto venientes tranſmittat ad aliud punctum etiam datum. Neque enim hoc ullo modo difficilius eſt, quàm quod modò explicavi; immo verò res multò facilior eſt, quoniam via illuc perveniendi jam aperta eſt. Verùm malo alios id quærere, ut, ſi inter inveſtigandum negotii adhuc aliquid repererint, eò pluris inventionem rerum hic demonſtratarum æſtiment.

Cæterùm in toto hoc libro locutus ſum tantùm de *Quomodo id omne,*
 lineis

quod hic de lineis curvis, in plana ſuperficie deſcriptis, dictum fuit, applicari poſſit ad illas, quæ deſcribuntur in ſpatio trium dimenſionum ſive ſuperficie aliqua curva.

lineis curvis, quæ in ſuperficie aliqua plana deſcribi poſſunt; verùm facile eſt, quæ de iis dixi, etiam ad omnes alias referre, quas imaginari poſſumus formatas eſſe, motu aliquo ordinato punctorum alicujus corporis in ſpatio trium dimenſionum. Nimirum demittendo duas perpendiculares à quolibet puncto lineæ curvæ, quam conſiderare volumus, ad duo plana, ad angulos rectos ſe invicem ſecantia, unam ad unum, & alteram ad alterum: quippe perpendicularium harum extremitates ſingulæ duas alias curvas lineas deſcribunt, unam in uno, & alteram in altero plano, quarum puncta omnia modo ſuperiùs explicato determinari ac referri poſſunt ad puncta lineæ rectæ, quæ utrique plano eſt communis, ut hâc ratione puncta curvæ, tres dimenſiones habentis, omnino ſint determinata. Ita etiam ſi rectam lineam ducere velimus, quæ hanc curvam in dato puncto ad angulos rectos ſecet, opùs tantùm eſt duas alias rectas lineas ducere, unam in uno, & alteram in altero plano, quarum ſingulæ ſingulas curvas ibidem ſecent in punctis, ubi cadunt perpendiculares, quæ à dato puncto ad utrumque planum ſunt deductæ. Etenim poſtquam duo alia plana, unum ſuper unam, & alterum ſuper alteram, erecta ſunt, quæ ad utrumque planum, in quibus lineæ illæ ſunt, recta exiſtant, erit horum duorum planorum communis interſectio linea recta quæſita. Atque ita arbitror me omnia tradidiſſe Elementa, quæ ad curvarum linearum cognitionem ſunt neceſſaria.

GEO-

Digitized by Google

GEOMETRIÆ

LIBER TERTIUS,

De Conſtructione Problematum Solidorum, & Solida excedentium.

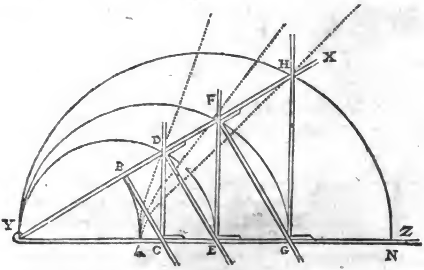
TAmetſi omnes lineæ curvæ, quæ motu aliquo ordinato deſcribi poſſunt, in Geometriam ſunt recipiendæ, non ideò tamen permiſſum eſt uti indifferenter quâlibet, quæ primùm occurrat, ad Problematis cujuſque conſtructionem; ſed cura ſemper adhibenda eſt, ut ſimpliciſſimam, cujus ope id ipſum ſolvi queat, eligamus. Ubi quidem obſervandum eſt, per ſimpliciſſimas non ſolùm intelligendas eſſe illas, quæ omnium facillimè deſcribi poſſunt; neque quæ propoſiti Problematis conſtructionem vel demonſtrationem faciliorem reddunt; ſed præſertim, quæ ſimpliciſſimi ſunt generis, quod ad quantitatem quæſitam determinandam inſervire queat.

Quænam curvæ lineæ adhiberi poſſint ad conſtructionem cujuſque Problematis.

Quemadmodum, exempli cauſsâ, ad inveniendas tot medias proportionales, quot libuerit, non opinor modum ullum faciliorem dari, nec cujus demonſtratio evidentior ſit, quàm ſi curvæ lineæ adhibeantur, quæ per inſtrumentum X Y Z (ſupra explicatum) deſcribuntur. Etenim ſi inter Y A & Y E duas medias proportionales invenire libeat, oportet tantùm circulum deſcribere, cujus diameter ſit Y E, qui curvam A D ſecet in puncto D, eritque Y D una ex quæſitis mediis proportionalibus. Cujus rei demonſtratio ex ſola inſtrumenti hujus ad lineam Y D adplicatione perſpicua eſt.

Exemplum concernens inventionem plurium mediarum proportionalium.

Nam



Nam ſicut YA ſeu YB, quæ ipſi eſt æqualis, ſe habet ad YC; ſic YC ſe habet ad YD; & YD ad YE.

Eodem modo ad inveniendas 4 medias proportionales inter YA & YG; aut ad inveniendas 6 inter YA & YN, deſcribendus eſt tantùm circulus YFG, qui ſecans curvam AF in puncto F determinat lineam rectam YF, quæ una eſt ex quatuor quæſitis proportionalibus; aut circulus YHN, qui ſecans curvam AH in puncto H determinat ipſam YH, quæ una eſt ex ſex quæſitis proportionalibus. Et ſic de cæteris.

Verùm quia linea curva AD ſecundi eſt generis, & duæ mediæ proportionales inveniri poſſunt per ſectiones Conicas, quæ ſunt primi generis; tum etiam, quoniam 4 & 6 mediæ proportionales inveniri queunt beneficio linearum, generum non adeò compoſitorum atque AF & AH: peccatum eſſet in Geometria, ſi illæ hîc adhiberentur. Quemadmodum etiam ex altera parte pro peccato reputandum eſſet, ſi quis inutiliter in con-

conſtruendo Problemate aliquo per genus linearum ſimplicius, quàm natura ejus permittit, deſudaret.

De natura Æquationum.

Quocirca ut hìc adducere poſſim regulas quaſdam, quibus utrumque peccatum evitetur, opùs eſt, ut in genere aliquid dicam de natura Æquationum; hoc eſt, de ſummis, quæ ex pluribus terminis ſunt compoſitæ, partim cognitis, partim verò incognitis, quorum alii aliis ſunt æquales, vel potiùs, qui omnes ſimul conſiderati nihilo ſunt æquales. Quippe ſæpe præſtat illos hâc ratione conſiderare.

Quot habere poſſint radices in quâlibet Æquatione.

Sciendum itaque, quòd incognita quantitas in quâlibet Æquatione, tot diverſas radices ſeu diverſos valores habere poſſit, quot ipſa habet dimenſiones. Nam ſi, exempli gratiâ, x ſupponatur æqualis 2, ſeu $x - 2$ æqualis nihilo; & rurſus $x \infty 3$, ſeu $x - 3 \infty 0$; & multiplicetur $x - 2 \infty 0$ per $x - 3 \infty 0$: habebitur $xx - 5x + 6 \infty 0$, ſeu $xx \infty 5x - 6$. quæ Æquatio eſt, in qua quantitas x valet 2, & præterea etiam 3. Quòd ſi rurſus fiat $x \infty 4$, atque $x - 4 \infty 0$ multiplicetur per $xx - 5x + 6 \infty 0$, producetur $x^3 - 9xx + 26x - 24 \infty 0$. quæ alia eſt Æquatio, in qua x habens tres dimenſiones, tres quoque habet valores, qui ſunt 2, 3, & 4.

A

Quænam ſint falſæ radices.

Verùm ſæpe accidit, quòd quædam harum radicum ſint falſæ, ſeu minores quàm nihil: ut, ſi ſupponatur x deſignare quoque defectum alicujus quantitatis, utpute 5, ita ut habeatur $x + 5 \infty 0$, quæ multiplicata per $x^3 - 9xx + 26x - 24 \infty 0$, faciat $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \infty 0$, pro Æquatione, in qua quatuor ſunt radices, nimirum tres veræ, quæ ſunt 2, 3, & 4, atque una falſa, quæ eſt 5.

B

Quomodo diminui poſſit dimenſionum numerus ali-

Unde liquidò conſtat, quòd Æquationis ſumma, quæ plures radices continet, dividi ſemper poſſit per binomium, quod compoſitum eſt ex quantitate inco-

cujus Æquationis, quando cognoſcitur aliqua ex ejus radicibus.

gnita, minus valore alicujus ex veris radicibus, quæcunque illa tandem ſit, aut plus valore alicujus ex falſis; cujus diviſionis ope dimenſiones ejus in tantum diminuuntur.

C

Quâ ratione indagari queas, num data quantitas ſit valor alicujus radicis.

Et viciſſim ſi Æquationis ſumma dividi non poſſit per binomium, conſtans ex quantitate incognita + vel — certa alia quadam quantitate; indicio eſt, quantitatem hanc non eſſe valorem alicujus ex ejus radicibus. Quemadmodum hæc ultima $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \infty 0$, dividi quidem poteſt per $x - 2$, per $x - 3$, per $x - 4$, & per $x + 5$; ſed nullo modo per $x +$ vel — quacunque alia quantitate. Id quod oſtendit, ipſam non poſſe admittere alias radices præter haſce quatuor 2, 3, 4, & 5.

D

Quot haberi poſſint veræ radices in qualibet Æquatione.

Ex quibus etiam cognoſcitur, quot veræ & quot falſæ radices in unaquaque Æquatione haberi poſſint. Nimirum, tot in ea veras haberi poſſe, quot variationes reperiuntur ſignorum + & —; & tot falſas, quot vicibus ibidem deprehenduntur duo ſigna +, vel duo ſigna —, quæ ſe invicem ſequuntur. Ut in ultima, quia poſt $+ x^4$ habetur $- 4x^3$, quæ eſt una variatio ſigni + in —, & poſt $- 4x^3$ habetur $- 19xx$, quæ ſunt duo ſigna ſimilia; & poſt $-19xx$ habetur $+ 106x$; & poſt $+ 106x$ habetur $- 120$, quæ ſunt adhuc duæ aliæ variationes: cognoſcitur quòd illa tres admittat veras radices, & unam falſam, propter duo ſigna — terminorum $4x^3$ & $19xx$, quæ ſe invicem ſequuntur.

E

Quomodo faciendum ſit, ut falſæ radices Æquationis evadant veræ, & veræ falſæ.

Porrò facile eſt efficere, ut in una eademque Æquatione radices omnes, quæ falſæ erant, evadant veræ; & ut eádem operá omnes illæ, quæ veræ erant, falſæ fiant. Nimirum mutando ſigna omnia + & —, quæ in 2do, 4to, 6to, aliíſve locis reperiuntur, qui per numeros pares deſignantur; reliquis 1mi, 3tii, 5ti, ſimiliumque locorum,

rum, qui per impares numeros deſignantur, non mutatis.

Ut ſi loco

$$+x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \infty 0,$$

ſcribatur

$$+x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \infty 0,$$

habebitur Æquatio, in quâ una tantùm eſt vera radix, quæ eſt 5; & tres falſæ, quæ ſunt 2, 3, & 4.

Quòd ſi verò non cognito radicum alicujus Æquationis valore, ipſas augere vel diminuere velimus quantitate aliquâ cognitâ, oportet tantùm in locum incogniti termini ſubſtituere alium, qui eâdem hâc quantitate major ſit vel minor, eumque ubique primi loco ſubrogare. *Quomodo augeri vel diminui poſſint Æquationis radices, ipſis non cognitis.*

Ut ſi augere velimus 3^{nario} radicem hujus Æquationis $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \infty 0$, ſumenda eſt y loco x, & cogitandum, quantitatem hanc y majorem eſſe quàm x, exceſſu 3, ita ut $y - 3$ ipſi x ſit æqualis; loco autem xx ſcribendum eſt quadratum ex $y - 3$, quod eſt $yy - 6y + 9$; & loco x^3 ſumendus eſt ejus cubus, qui eſt $y^3 - 9yy + 27y - 27$; & denique loco x^4 ponendum eſt ejus quadrato-quadratum, quod eſt $y^4 - 12y^3 + 54yy - 108y + 81$. Unde ſi ſcribamus F ſummam præcedentem, ſubſtituendo ubique y pro x, invenietur

$$\begin{array}{rrrrr} y^4 - 12y^3 & + 54yy & - 108y & + 81 \\ + \; 4y^3 & - 36yy & + 108y & - 108 \\ & - 19yy & + 114y & - 171 \\ & & - 106y & + 318 \\ & & & - 120 \end{array}$$

$$y^4 - 8y^3 - 1yy + 8y * \infty 0, \text{ vel } y^3 - 8yy - 1y + 8 \infty 0.$$

ubi vera radix, quæ erat 5, jam eſt 8, propter ternarium ipſi additum.

Sin

Sin verò contra ternario radicem ejuſdem Æquationis diminuere velimus, facienda eſt $y + 3 \infty x$, & $yy + 6y + 9 \infty xx$. Atque ita porrò. Ita ut loco

$$x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \infty 0$$

ſcribatur

$$\begin{array}{rrrrr} y^4 + 12y^3 & + 54yy & + 108y & + 81 \\ + 4y^3 & + 36yy & + 108y & + 108 \\ & - 19yy & - 114y & - 171 \\ & & - 106y & - 318 \\ & & & - 120 \\ \hline y^4 + 16y^3 & + 71yy & - 4y & - 420 \infty 0. \end{array}$$

Quòd, augendo veras radices, falſæ diminuantur, & contra.

Ubi notandum eſt, dum veræ radices alicujus Æquationis augentur, falſas eâdem quantitate diminui; & contra, dum veræ diminuuntur, falſas augeri: Et quidem tum has tum illas prorſus evaneſcere, ſi quantitate ipſis æquali diminuantur; ſi verò quantitate ipſas ſuperante, tum ex veris falſas evadere, & ex falſis veras. Ut hic, augendo ternario veram radicem, quæ erat 5, diminuitur ternario quælibet ex falſis; ita ut illa, quæ erat 4, non valeat plus quàm 1; & quæ erat 3, ſit cyphra ſeu 0; & quæ erat 2, facta ſit vera, ſitque 1 (cum $-2+3$ faciat $+1$.) Adeò ut in hac Æquatione $y^3 - 8yy - 1y + 8 \infty 0$, non plures quàm tres ſint radices, inter quas duæ veræ exiſtunt, utpote 1 & 8; & una falſa, quæ etiam eſt 1: Et in hac altera $y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 \infty 0$, una tantùm vera, quæ eſt 2, (quia $+5 - 3$ facit $+2$;) & tres falſæ, quæ ſunt 5, 6, & 7.

Quâ ratione ſecundus terminus Æquationis tolli poſſit.

Jam verò beneficio modi hujus mutandi valorem radicum, ipſis non cognitis, duo fieri poſſunt, quæ in ſequentibus uſum aliquem habebunt. Unum eſt, quòd ſemper ſecundus terminus Æquationis, quam examinamus, tolli poſſit; Nimirum, diminuendo veras radices

dices, quantitate cognitâ ſecundi termini diviſâ per numerum dimenſionum primi, ſi unus ex hiſce duobus terminis notatus fuerit ſigno +, & alter ſigno —; aut augendo illas eâdem quantitate, ſi uterque eodem ſigno fuerit adfectus.

Ut ad tollendum ſecundum terminum ultimæ Æquationis

$$y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 \infty 0,$$

diviſis 16 per 4, propter 4or dimenſiones termini y^4, proveniet rurſus 4: hinc facio $z - 4 \infty y$, & ſcribo,

$$\begin{array}{rrrrr} z^4 - 16z^3 & + 96zz & - 256z & + 256 \\ + 16z^3 & - 192zz & + 768z & - 1024 \\ & + 71zz & - 568z & + 1136 \\ & & - 4z & + 16 \\ & & & - 420 \\ \hline z^4 \quad * & - 25zz & - 60z & - 36 \infty 0. \end{array}$$

ubi vera radix, quæ erat 2, eſt 6, cum ipſa quaternario ſit aucta; & falſæ, quæ erant 5, 6, & 7, tantummodo ſunt 1, 2, & 3, cum illæ quaternario ſingulæ ſint diminutæ.

Eodem modo ſi tollere velimus ſecundum terminum Æquationis

$$x^4 - 2ax^3 \begin{smallmatrix} +2aa \\ -cc \end{smallmatrix} xx - 2a^3x + a^4 \infty 0:$$

quoniam diviſis $2a$ per 4, quotiens fit $\frac{1}{2}a$, faciendum eſt $z + \frac{1}{2}a \infty x$, ac ſcribendum

$$\begin{array}{rrrrr} z^4 + 2az^3 & + \frac{3}{2}aazz & + \frac{1}{2}a^3z & + \frac{1}{16}a^4 \\ - 2az^3 & - 3aazz & - \frac{3}{2}a^3z & - \frac{1}{4}a^4 \\ & + 2aazz & + 2a^3z & + \frac{1}{2}a^4 \\ & - cczz & - accz & - \frac{1}{4}aacc \\ & & - 2a^3z & - a^4 \\ & & & + a^4 \\ \hline z^4 \quad * & + \frac{1}{2}aazz & - a^3z & + \frac{5}{16}a^4 \infty 0: \\ & - cc & - acc & - \frac{1}{4}aacc \end{array}$$

ubi

ubi poſtquam innotuit valor ipſius z, addendo ipſi $\frac{1}{2}a$, habebitur valor radicis x.

Quo pacto fiat ut falſæ radices Æquationis evadant veræ, nec tamen veræ fiant falſæ.

Alterum, quod hîc poſteà uſum aliquem habebit, eſt, quòd, dum augetur valor verarum radicum, quantitate majore aliquâ ex falſis, radices omnes veræ ſemper fieri poſſint, ita ut non habeantur duo ſigna +, aut duo ſigna —, quæ ſe invicem ſequantur; & inſuper, ut quantitas cognita tertii termini quadrato ſemiſſis ſecundi major ſit. Nam licèt id fiat, etiamſi falſæ radices incognitæ ſint; tamen facile eſt de illarum magnitudine præterpropter judicare, atque quantitatem aliquam aſſumere, quæ ipſas in tantum vel plus ſuperet, quantum ad effectum hunc requiritur.

H Ut ſi habeatur

$$x^6 + nx^5 - 6nnx^4 + 36n^3x^3 - 216n^4x^2 + 1296n^5x - 7776n^6 \propto 0:$$

faciendo $y - 6n \propto x$, invenietur

$$\begin{array}{l}
y^6 \left.\begin{array}{r} -36n \\ +n \end{array}\right\} y^5
\left.\begin{array}{r} +540nn \\ -30nn \\ -6nn \end{array}\right\} y^4
\left.\begin{array}{r} -4320n^3 \\ +360n^3 \\ +144n^3 \\ +36n^3 \end{array}\right\} y^3
\left.\begin{array}{r} +19440n^4 \\ -2160n^4 \\ -1296n^4 \\ -648n^4 \\ -216n^4 \end{array}\right\} yy
\left.\begin{array}{r} -46656n^5 \\ +6480n^5 \\ +5184n^5 \\ +3888n^5 \\ +2592n^5 \\ +1296n^5 \end{array}\right\} y
\begin{array}{r} +46656n^6 \\ -7776n^6 \\ -7776n^6 \\ -7776n^6 \\ -7776n^6 \\ -7776n^6 \\ -7776n^6 \end{array} \\
\hline
y^6 - 35ny^5 + 504nny^4 - 3780n^3y^3 + 15120n^4yy - 27216n^5y \; * \propto 0.
\end{array}$$

Ubi manifeſtum eſt, quòd $504nn$ (quantitas cognita tertii termini) major ſit quadrato à $\frac{35}{2}n$ (ſemiſſe quantitatis cognitæ ſecundi termini.) Neque ullus alius eſt caſus, in quo quantitas, quâ veræ radices augentur, ad hoc efficiendum, ratione earum quæ datæ ſunt, major requiritur.

Quoniam autem ultimus terminus hîc nullus reperitur, ſi id quidem non deſideretur, augendus eſt adhuc aliquantillo valor radicum, quod ſanè tam parum eſſe non poteſt, quin id ad effectum hunc ſit ſatis.

Quomodo faciendum ſit, ut loca omnia

Eodem modo ſi augere velimus dimenſionum numerum alicujus Æquationis, & facere ut loca omnia termino-

Digitized by Google

minorum ejus ſint repleta (ut ſi loco $x^5 **** - b \infty 0$, deſideretur Æquatio, in quâ incognita quantitas ſex dimenſiones habeat, & in qua nullus terminus deſit) : oportet primùm pro $x^5 **** - b \infty 0$, ſcribere $x^6 **** - bx \infty 0$; deinde factâ $y - a \infty x$, habebitur

Æquationis ſint completa.

$$\begin{array}{l} y^6 - 6ay^5 + 15aay^4 - 20a^3y^3 + 15a^4yy - 6a^5y + a^6 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - b \quad + ab \end{array} \infty 0.$$

Ubi liquet, quòd, quantula etiam ſuppoſita fuerit quantitas a, omnia tamen Æquationis loca non deſinant eſſe repleta.

Præterea poſſunt quoque radices alicujus Æquationis, etiamſi ſint incognitæ, multiplicari aut dividi per quantitatem aliquam cognitam, quam libuerit.

Quomodo multiplicari vel dividi poſſint Æquationis radices, ipſis incognitis.

Quod fit, ſupponendo, quantitatem incognitam, multiplicatam aut diviſam per quantitatem, quæ multiplicare aut dividere debet radices, eſſe æqualem alicui alteri. Deinde multiplicando aut dividendo quantitatem cognitam ſecundi termini per hanc ipſam, quæ multiplicare aut dividere debet radices; & per ipſius quadratum, quantitatem tertii; & per ipſius cubum, quantitatem quarti, atque ita porrò uſque ad ultimum. Id quod inſervire poteſt, ut ad integros & rationales numeros reducantur fracti; aut ſæpe etiam ſurdi, qui in Æquationum terminis reperiuntur.

Quâ ratione fracti numeri alicujus Æquationis reducantur ad integros.

Ut ſi habeatur

$$x^3 - xx\sqrt{3} + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27\sqrt{3}} \infty 0,$$

& ipſius loco alia deſideretur, cujus omnes termini per numeros rationales exprimantur, oportet ſupponere $y \infty x\sqrt{3}$, & multiplicare per $\sqrt{3}$ quantitatem cognitam ſecundi termini, quæ quoque eſt $\sqrt{3}$; & per ipſius quadratum, quod eſt 3, quantitatem tertii, quæ eſt $\frac{26}{27}$; & per ipſius cubum, qui eſt $3\sqrt{3}$, quantitatem ultimi, videlicet $\frac{8}{27\sqrt{3}}$, id quod facit $y^3 - 3yy + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9} \infty 0$.

 Dein-

Deinde ſi hujus loco adhuc alia requiratur, in qua quantitates omnes cognitæ ſolis integris numeris exprimantur; ſupponendo $z \propto 3\,y$, & multiplicando 3 per
I 3, $\frac{26}{9}$ per 9, & $\frac{8}{9}$ per 27, fiet Æquatio

$$z^3 - 9\,zz + 26\,z - 24 \propto 0.$$

Ubi, cum radices ſint 2, 3, & 4, ſequitur alterius radices eſſe $\frac{2}{3}$, 1, & $\frac{4}{3}$; & prioris Æquationis $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, & $\frac{4}{9}\sqrt{3}$.

Quo pacto quantitas cognita alicujus termini Æquationis æqualis fiat cuicunque alteri datæ.

Quæ operatio ſervire quoque poteſt ad faciendam quantitatem cognitam alicujus termini in Æquatione æqualem alicui alteri datæ. Ut ſi habeatur
$x^3 * - bbx + c^3 \propto 0$, & ipſius loco alia ſit invenienda Æquatio, in qua quantitas cognita tertii termini, nimirum ea, quæ hic eſt bb, ſit $3\,aa$, non autem bb: ſup-
K ponendum eſt $y \propto x\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$, deinde verò ſcribendum,

$$y^3 * - 3\,aay + \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} \propto 0.$$

Quòd radices, tam veræ quàm falſæ, poſſint eſſe reales, vel imaginariæ.

Cæterùm radices tam veræ quàm falſæ non ſemper ſunt reales, ſed aliquando tantùm imaginariæ: hoc eſt, ſemper quidem in qualibet Æquatione tot radices quot dixi, imaginari licet; verùm nulla interdum eſt quantitas, quæ illis, quas imaginamur, reſpondet. Quemadmodum, tametſi tres imaginari poſſimus in hac, $x^3 - 6\,xx + 13\,x - 10 \propto 0$; tamen una tantùm eſt realis, nempe 2; & quod ad reliquas duas attinet, quamvis illæ augeantur, diminuantur, aut multiplicentur, ſicut jam expoſui; tamen non niſi imaginariæ fieri poſſunt.

Reductio Æquationum Cubicarum, cùm Problema eſt Planum.

Jam verò, poſtquam ad inveniendam conſtructionem alicujus Problematis pervenimus ad Æquationem, in quâ incognita quantitas tres habet dimenſiones: Primùm ſi quantitates cognitæ, quæ in ea reperiuntur, numeros fractos continent, ipſi ad integros, beneficio multiplicationis, modò explicatæ, reducendi ſunt; At ſi ſurdos continent, tum quantùm fieri poteſt, ſimiliter

ad

ad rationales ſunt reducendi, tam per eandem hanc multiplicationem, quàm per diverſos alios modos, inventu ſatis faciles. Deinde examinando ordine quantitates omnes, quæ abſque fractione ultimum terminum dividere poſſunt, videndum eſt, num aliqua ex ipſis, juncta cum quantitate incognita per ſignum $+$ vel $-$, componere poſſit binomium, quod dividat totam ſummam; id enim ſi contingat, Problema erit Planum, hoc eſt, conſtrui poterit regulâ atque circino. Etenim E aut quantitas cognita hujus binomii erit radix quæſita; aut Æquatio, per ipſum diviſa, ad duas dimenſiones erit reducta; ita ut deinde radix ejus, per ea, quæ primo libro ſunt oſtenſa, inveniri queat.

Exempli gratiâ, ſi habeatur

$y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 \propto 0$: ultimus terminus, qui eſt 64, dividi poteſt abſque fractione per 1, 2, 4, 8, 16, 32, & 64. Quare ordine examinando hanc Æquationem, num dividi poſſit per aliquod ex binomiis $yy - 1$ aut $yy + 1$, $yy - 2$, aut $yy + 2$, $yy - 4$ aut $yy + 4$, &c. invenitur dividi poſſe per $yy - 16$, hoc modo:

$$\begin{array}{cccc} +\,y^6 & -\,8y^4 & -\,124yy & -\,64 \propto 0 \\ +\,1y^6 & +\,8y^4 & +\,4yy & -\,64 \\ \hline 0 & -\,16y^4 & -\,128yy & \\ & 16 & 16 & \\ \hline +\,y^4 & +\,8yy & +\,4 \propto 0 & \end{array}$$

Modus dividendi Æquationem per binomium, quod illius continet radicem.

Incipio ab ultimo termino, & divido -64 per -16, quod facit $+4$, quæ repono in quotiente; deinde multiplico $+4$ per $+yy$, & fit $+4yy$, quare in ſumma dividenda repono $-4yy$. Quippe ſcribendum ſemper eſt ſignum $+$ vel $-$ planè contrarium illi, quod producitur per multiplicationem. Addendo autem $-124yy$ ad $-4yy$, invenio $-128yy$, quod rurſus divido per

 -16,

— 16, & provenit + $8yy$, reponendum in quotiente. Multiplicando verò hoc ipſum per yy, exſurgit — $8y^4$, addendum termino dividendo, qui etiam eſt — $8y^4$. quæ quidem ſimul conficiunt — $16y^4$, quod per — 16 divido, & fit + $1y^4$ pro quotiente, & — $1y^6$ addendum ipſi + $1y^6$, id quod facit o, monſtratque diviſionem eſſe ad finem perductam. Quòd ſi verò quantitas aliqua ſuperfuiſſet, vel aliquis præcedentium terminorum abſque fractione dividi non potuiſſet, manifeſtum fuiſſet, diviſionem nullo modo fieri potuiſſe.

Similiter ſi habeatur $y^6 \begin{smallmatrix}+aa\\-2cc\end{smallmatrix} y^4 \begin{smallmatrix}-a^4\\+c^4\end{smallmatrix} yy \begin{smallmatrix}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{smallmatrix} \infty\ 0.$

ultimus terminus abſque fractione dividi poteſt per a, aa, $aa+cc$, a^3+acc, & ſimiles. Sed duas ſufficit ex illis conſiderare, nempe aa, & $aa+cc$; aliæ enim, cum in quotiente plures pauciorésve dimenſiones exhibeant, quàm quidem in quantitate cognita penultimi termini M reperiuntur, impedirent, ut diviſio fieri poſſet. Ubi notandum, me ipſius y^6 dimenſiones tantùm pro tribus dimenſionibus habere, cum non reperiatur y^5, nec y^3, nec y in tota ſumma. Examinando igitur binomium $yy-aa-cc$, invenitur, diviſionem per illud fieri poſſe, hoc modo:

$$+y^6 \begin{smallmatrix}+aa\\-2cc\end{smallmatrix} y^4 \begin{smallmatrix}-a^4\\+c^4\end{smallmatrix} yy \begin{smallmatrix}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{smallmatrix} \infty\ 0,$$

$$\begin{array}{ccc} & & \underline{\qquad\quad} \\ & & -aa-cc \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} -y^6 & -2aa & -a^4 \\ - & +cc & -aacc \\ 0 & \overline{-aa-cc} & \overline{-aa-cc} \end{array}$$

$$\overline{+\ y^4 \begin{smallmatrix}+2aa\\-cc\end{smallmatrix} yy \begin{smallmatrix}+a^4\\+aacc\end{smallmatrix} \infty\ 0.}$$

Id quod monſtrat radicem quæſitam eſſe $aa+cc$. Quemadmodum facilè per multiplicationem probari poteſt.

At

At verò ſi nullum inveniatur binomium, quod ita totam Æquationis propoſitæ ſummam dividere poſſit, certum eſt, Problema quod ab ea dependet eſſe Solidum. Nec minus vitium eſt, conſtructionem ejus poſtea per rectas lineas & circulos tentare, quàm ad conſtructionem illorum, in quibus non niſi circulis eſt opùs, ſectiones Conicas adhibere: ſiquidem quicquid ignorantiam aliquam teſtatur, peccatum dici meretur. N

Quænam Problemata ſint Solida, Æquatione exiſtente Cubicâ.

Porrò ſi habeatur Æquatio, in quâ incognita quantitas quatuor habeat dimenſiones: eodem modo, ſublatis primùm ſurdis & fractis numeris (ſi qui ſunt); videndum eſt, num inveniri poſſit binomium, compoſitum ex incognita quantitate + vel — quantitate aliqua, quæ abſque fractione ultimum terminum dividit, quod dividat totam ſummam. Hoc enim ſi inveniatur, vel quantitas cognita hujus binomii erit radix quæſita; vel ſaltem poſt diviſionem hanc relinquentur tantùm in Æquatione tres dimenſiones, ita ut illa deinde rurſus eodem modo ſit examinanda. Quòd ſi verò tale binomium non inveniatur, oportebit augendo aut diminuendo valorem radicis, ſecundum ſummæ terminum tollere, modo paulò ante explicato: & deinde ipſam ad aliam reducere, quæ tres duntaxat dimenſiones contineat, Id quod hoc modo fit:

Reductio Æquationum quatuor dimenſionum, cùm Problema eſt Planum. Et quænam illa ſint, quæ Solida ſunt dicenda.

loco $+ x^4 \; * . \; pxx . qx . r \infty 0,$

ſcribendum eſt

$$+ y^6 . 2py^4 {+pp \atop .4r} yy - qq \infty 0.$$

Reductio Æquationis Quadrato-quadratæ ad Cubicam.

Et quod ad ſigna + & — attinet, quæ omiſi, ſi habeatur $+ p$ in Æquatione præcedente, in hac ponendum eſt $+ 2p$; aut ſi habeatur $-p$, ponendum eſt $- 2p$. & contra, ſi habeatur ibi $+ r$, ponendum hîc eſt $-4r$; aut ſi habeatur ibi $-r$, ponendum hîc eſt $+ 4r$. & ſive

Digitized by Google

illic fuerit $+q$, ſive $-q$, ſemper tamen hic ponendum eſt $-qq$, & $+pp$, ſaltem ſi x^4 & y^6 ſignis $+$ notatæ ſupponantur; quippe contrarium fieri deberet, ſi ſupponeretur ibi ſignum $-$.

Exempli cauſá, ſi habeatur $+x^4 * -4xx-8x+35 \infty 0$, ſcribendum ejus loco eſt $y^6-8y^4-124yy-64 \infty 0$. Cum enim quantitas, quam nominavi p, ſit -4, ponendum eſt $-8y^4$ pro $2py^4$, & cum illa, quam vocavi r, ſit 35, ponendum eſt $\begin{matrix}+16\\-140\end{matrix}yy$, hoc eſt, $-124yy$, loco $\begin{matrix}+pp\\-4r\end{matrix}yy$. Et denique cum q ſit 8, ponendum eſt -64, pro $-qq$.

Eodem modo pro $+x^4 * -17xx-20x-6 \infty 0$, ſcribendum eſt $+y^6-34y^4+313yy-400 \infty 0$. Nam 34 eſt duplum ipſius 17, & 313 eſt hujus quadratum junctum quadruplo ipſius 6, & 400 eſt quadratum ipſius 20.

Similiter quoque loco

$$+z^4 * \begin{matrix}+\frac{1}{2}aa\\-cc\end{matrix}zz \begin{matrix}-a^3\\-acc\end{matrix}z \begin{matrix}+\frac{5}{16}a^4\\-\frac{1}{4}aacc\end{matrix} \infty 0:$$

ſcribendum eſt

$$y^6 \begin{matrix}+aa\\-2cc\end{matrix}y^4 \begin{matrix}-a^4\\+c^4\end{matrix}yy \begin{matrix}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{matrix} \infty 0.$$

quippe p eſt $+\frac{1}{2}aa-cc$, & pp eſt $\frac{1}{4}a^4-aacc+c^4$, & $-4r$ eſt $-\frac{5}{4}a^4+aacc$, ac tandem $-qq$ eſt $-a^6-2a^4cc-aac^4$.

Poſtquam igitur Æquatio ſic ad tres dimenſiones eſt reducta, quærendus eſt valor ipſius yy, methodo jam explicatâ. Quòd ſi verò ita inveniri nequeat, non opùs erit ulteriùs progredi. Infallibiliter enim inde ſequitur, Problema eſſe Solidum. Sin autem inveniatur, poterit ejus beneficio Æquatio præcedens in duas alias dividi, in quarum utrâque incognita quantitas duas tantùm dimenſiones habeat, quarumque radices ab illius

lius radicibus non differant. Nimirum loco Æquationis

$$+x^4 * . pxx . qx . r \infty 0,$$

ſcribendæ ſunt hæ duæ aliæ

$$+xx - yx + \tfrac{1}{2}yy . \tfrac{1}{2}p . \tfrac{q}{2y} \infty 0, \text{ \&}$$

$$+xx + yx + \tfrac{1}{2}yy . \tfrac{1}{2}p . \tfrac{q}{2y} \infty 0.$$

Et quod attinet ad ſigna $+$ & $-$, quæ omiſi, ſi in Æquatione præcedente habeatur $+p$, ponendum erit in utraque harum duarum $+\frac{1}{2}p$; & $-\frac{1}{2}p$, ſi in priore habeatur $-p$. Ponendum verò eſt $+\frac{q}{2y}$ in una, ubi habetur $-yx$; & $-\frac{q}{2y}$ in altera, ubi habetur $+yx$, prout habetur $+q$ in prima. Et contra, ſi habetur ibi $-q$, ponendum eſt $-\frac{q}{2y}$ in illa, ubi habetur $-yx$; & $+\frac{q}{2y}$ in altera, ubi habetur $+yx$. Unde conſequenter facile eſt omnes Æquationis propoſitæ radices cognoſcere, atque hinc Problema, cujus ſolutionem continet, conſtruere, adhibendo tantùm circulos & lineas rectas.

Exempli gratiâ, quia pro $x^4 * - 17xx - 20x - 6 \infty 0$ ponendo $y^6 - 34y^4 + 313yy - 400 \infty 0$ invenitur yy eſſe 16: hinc loco Æquationis $+x^4 * - 17xx - 20x - 6 \infty 0$ ſcribendæ ſunt hæ duæ $+xx - 4x - 3 \infty 0$ & $+xx + 4x + 2 \infty 0$. Nam y eſt 4, $\frac{1}{2}yy$ eſt 8, p eſt 17, & q eſt 20; ita ut $+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2} - p\ \frac{q}{2y}$ faciat -3, & $+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$ faciat $+2$. E quibus binis Æquationibus ſi extrahantur radices, invenientur eædem omnes, quæ eliciuntur ex ea, in qua habetur x^4. Nimirum una vera, quæ eſt $\sqrt{7} + 2$, & tres falſæ, quæ ſunt $\sqrt{7} - 2$, $2 + \sqrt{2}$, & $2 - \sqrt{2}$.

Similiter cùm habetur $x^4 * - 4xx - 8x + 35 \infty 0$;

Digitized by Google

quoniam radix ex $y^6 - 8y^4 - 124yy - 64 \infty 0$ rurſus eſt 16, hinc ſcribere oportet

$$xx - 4x + 5 \infty 0, \ \& \ xx + 4x + 7 \infty 0.$$

Hic enim $+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$ facit 5, & $+\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$ facit 7. Et quandoquidem nulla in utraque harum Æquationum invenitur radix, ſive vera, ſive falſa; liquidò conſtat, quatuor radices Æquationis, ex qua deductæ ſunt, imaginarias eſſe, & Problema, cujus gratiâ Æquatio inventa eſt, naturâ ſuâ eſſe Planum; ſed nullâ ratione conſtrui poſſe, cum datæ quantitates conjungi nequeant.

Sic etiam cùm habetur

$$z^4 * \begin{matrix} +\frac{1}{2}aa \\ -cc \end{matrix} zz \begin{matrix} -a^3 \\ -acc \end{matrix} z \begin{matrix} +\frac{5}{16}a^4 \\ -\frac{1}{4}aacc \end{matrix} \infty 0:$$

quia pro yy invenitur $aa + cc$, ſcribendum eſt

$$zz - z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \infty 0, \ \&$$
$$zz + z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \infty 0.$$

Nam y eſt $\sqrt{aa+cc}$, & $+\frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p$ eſt $\frac{3}{4}aa$, & $\frac{q}{2y}$ eſt $\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$. Unde cognoſcitur, valorem ipſius z eſſe

$$\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}, \text{ vel}$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa + \frac{1}{4}cc + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}.$$

Et quandoquidem ſupra feceramus $z + \frac{1}{2}a \infty x$, innoteſcit, quantitatem x, ad quam cognoſcendam omnes haſce operationes inſtituimus, eſſe

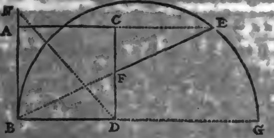
$$+\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}.$$

Verùm enimverò ut utilitas hujus regulæ meliùs cognoſci poſſit, operæ pretium eſt, ut illam Problemati alicui reſolvendo applicemus.

Exemplum oſtendens uſum hu-

Datis quadrato A D, & rectâ lineâ B N; oporteat producere latus A C uſque ad E, ita ut E F, ducta ab E verſùs

[illegible]



verſus B, ſit æqualis ipſi N B. Docet Pappus, quòd, poſtquam primùm latus B D productum eſt uſque in G, ita ut D G æquetur D N, circulusque deſcriptus eſt, cujus diameter B G, producendum deinde tantùm ſit latus A C, donec circumferentiæ hujus circuli occurrat in puncto E, quod requirebatur. Quæ ſanè conſtructio inveſtigatu iis, quos lateret, difficilis ſatis foret: Etenim quærendo illam per methodum hîc propoſitam, nunquam certè cogitarent aſſumendam eſſe D G pro quantitate incognita, ſed potiùs C F vel F D vel C E: cum hæ tales ſint, quæ facillimè omnium nos ad Æquationem perducant; ſed ad Æquationem quæ non ita facilè abſque regula, quam jam expoſui, explicari poſſet. Quippe ponendo a pro B D vel C D, c pro E F, & x pro D F, fit C F ∞ $a - x$; Et ut C F ſeu $a - x$ eſt ad F E ſeu c, ſic F D ſeu x eſt ad B F, quæ proinde erit $\frac{cx}{a-x}$. Deinde propter triangulum rectangulum B D F, cujus unum latus eſt x, & alterum a, quadrata ipſorum, utpote $xx + aa$, æqualia ſunt quadrato baſis, quod eſt $\frac{ccxx}{xx - 2ax + aa}$. Unde multiplicando totum per $xx - 2ax + aa$, invenietur Æquatio $x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \infty ccxx$, vel $x^4 - 2ax^3 \frac{+2aa}{-cc} xx - 2a^3x + a^4 \infty 0$.

rum reda-ctionum.

 Ubi

Q Ubi per præcedentes regulas cognoſcitur, radicem ejus quæ eſt longitudo lineæ D F, eſſe

$$\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc-\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}}.$$

Quòd ſi verò B F vel B E poneretur pro quantitate incognita, perveniremus rurſus ad Æquationem, in qua quatuor dimenſiones eſſent, ſed quæ faciliùs reduci poſ-
R ſet; & ad quam etiam ſatis facilè perveniretur. Cum aliàs, ſi pro ea ſupponeretur D G, multò difficiliùs ad Æquationem, ſed quæ ſimpliciſſima foret, perveniremus. Quod quidem hîc refero, ut vobis indicem, quòd, cùm Problema propoſitum non eſt Solidum, ſi quærendo illud unâ viâ ad Æquationem deveniatur valde compoſitam, tum communiter aliâ viâ ad ſimpliciorem Æquationem perveniri poſſit.

Poſſem præterea hîc diverſas regulas adjungere, reducendi Æquationes, quæ ad Cubum vel Quadrato-quadratum adſcendunt, verùm ſuperfluæ forent: quandoquidem conſtructionem eorum Problematum, quæ Plana ſunt, ſemper per haſce invenire licet.

Regula generalis reducendi Æquationes omnes, quæ Quadrato-quadratum excedunt.

Poſſem quoque alias afferre pro Æquationibus, quæ ad Surdeſolidum, vel Quadrato-cubum, aut altiùs aſſurgunt; ſed malo omnes ſub una comprehendere, dicendo in genere: quòd poſtquam aliquis illas ad eandem formam, quam habent illæ, quæ æquè multis dimenſionibus conſtant, & ex multiplicatione duarum aliarum, pauciorum dimenſionum, producuntur, reducere conatus fuerit, atque modos omnes, quibus hæc multiplicatio fieri poſſit, enumeraverit, nec juxta aliquem ex ipſis ſuccedere compererit, aſſeverandum ſit, illas ad ſimpliciores reduci non poſſe. Ita ut, ſi incognita quantitas 3 vel 4 dimenſiones habeat, Problema, in cujus gratiam Æquatio quæritur, Solidum exiſtat; & ſi 5 vel

vel 6 dimenſiones habeat, uno gradu magis ſit compoſitum. Et ſic de cæteris.

Cæterùm omiſi hic demonſtrationes plurimorum, quæ dixi: quoniam ita faciles mihi viſæ ſunt, ut, ſi modò operam, methodicè examinandi, num erraverim, impenderitis, illæ ſuâ ſponte vobis ſint occurſuræ: quin etiam utilius erit ipſas hâc ratione, quàm ſi legantur, addiſcere.

S

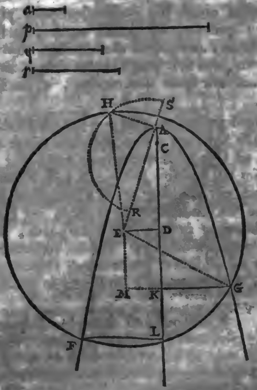
Modus generalis conſtruendi omnia Problemata Solida, reducta ad Æquationem trium, quatuorve dimenſionum.

Jam verò poſtquam compertum eſt Problema propoſitum eſſe Solidum; ſive Æquatio, per quam illud quæritur, ad Quadrato quadratum adſcendat; ſive non altiùs quàm ad Cubum aſſurgat: poteſt ſemper radix ejus inveniri per aliquam trium Conicarum Sectionum, quæcunque illa tandem ſit; aut etiam per ipſarum particulam aliquam, quantumlibet exiguam, nec utendo niſi rectis lineis & circulis. Verùm ſuffecerit regulam generalem hic adducere, inveniendi radices omnes ope Parabolæ, quandoquidem hæc aliquo modo eſt ſimpliciſſima.

Primò igitur tollendus eſt ſecundus Æquationis propoſitæ terminus, modò jam non abfuerit, atque ita Æquatio reducenda ad hanc formam: $z^3 \infty * apz . aaq$, ſi incognita quantitas tres tantùm dimenſiones habeat; (T) aut ad hanc: $z^4 \infty * . apzz \; aaqz . a^3r$, ſi quatuor obtineat dimenſiones; Seu ſumendo a pro unitate, ad hanc: $z^3 \infty * . pz . q$; aut ad hanc $z^4 \infty * . pzz . qz . r$.

Deinde ſupponendo Parabolam F A G jam deſcriptam eſſe, (V) & axem ejus eſſe A C D K L, latuſque rectum a ſeu 1, cujus A C ſit dimidium, & denique punctum C eſſe intra hanc Parabolam, cujus vertex ſit A: Oportet facere C D $\infty \frac{1}{2}p$, eamque ſumere in linea A C, continuata versùs C, ſi in Æquatione habeatur $+ p$; ſed versùs alteram partem, ſi habeatur $- p$. Porrò è puncto

[illegible]



cto D, aut ex puncto C, ſi non habeatur quantitas p, erigendo ad axem perpendicularem DE æqualem $\frac{1}{2}q$, oportet ex centro E circulum deſcribere FG, cujus ſemidiameter ſit AE, ſi Æquatio tantùm Cubica fuerit, hoc eſt, ſi non habeatur quantitas r. Aſt ſi habeatur r, & quidem ſigno + adfecta, oportet ulteriùs in hac linea AE, producta utrinque, ex una parte ſumere AR ∞ r, & ex altera parte AS æqualem lateri recto Para-



Parabolæ, quod eſt 1, deſcriptóque circulo cujus diameter RS, erigere AH perpendicularem ad AE, quæ occurrat huic circulo RHS in puncto H, quod illud ipſum eſt, per quod alter circulus FHG tranſire debet. Quòd ſi verò habeatur — *r*, oportet inſuper in alio circulo, cujus diameter eſt AE, inſcribere AI, æqualem inventæ AH: inventumq́ue erit punctum I, per quod primus circulus quæſitus FIG tranſire debet.

Ubi ſciendum, quòd circulus hic FG ſecare vel tangere poſſit Parabolam in 1, 2, 3, aut 4 punctis, à quibus ſi ad axem demittantur perpendiculares, habebuntur omnes

Digitized by Google



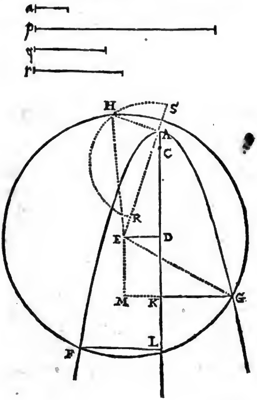
omnes Æquationis radices, tam veræ, quàm falſæ. Nimirum ſi quantitas q ſit adfecta ſigno +, veræ radices erunt illæ harum perpendicularium, quæ ex eadem Parabolæ parte, qua eſt E circuli centrum, reperientur, ut FL; & reliquæ, ut GK, erunt falſæ. Sed contra, ſi hæc quantitas q notata fuerit ſigno —, veræ erunt illæ, quæ ex altera ſunt parte; & falſæ, ſeu minores quàm nihil, quæ ex parte illa, ubi eſt centrum circuli E. Et denique ſi hic circulus non ſecat, nec tangit Parabolam in aliquo puncto, indicio eſt, Æquationem nullam admittere radicem ſive veram, ſive falſam, ſed tantùm
VV imaginarias. Adeò ut hæc regula omnium, quas quis exoptare queat, generaliſſima ſit & perfectiſſima.

Quorum quidem demonſtratio admodum facilis eſt.

Etenim

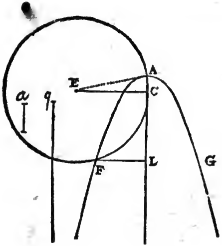
Etenim ſi linea GK, per conſtructionem hanc inventa, vocetur z, AK erit zz, propter Parabolam, in qua GK debet eſſe media proportionalis inter AK & latus rectum, quod eſt 1. Deinde, ſi ab AK auferam AC, quæ eſt $\frac{1}{2}$, ut & CD, quæ eſt $\frac{1}{2}p$, relinquetur DK ſeu EM $zz - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}$, cujus quadratum eſt

$z^4 - pzz - zz + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$. Et quia DE ſeu KM eſt $\frac{1}{2}q$, tota GM fit $z + \frac{1}{2}q$, cujus quadratum eſt $zz + qz + \frac{1}{4}qq$, additiſque hiſce duobus quadratis, habebitur $z^4 - pzz + qz + \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{2}p + \frac{1}{4}$,



pro quadrato lineæ GE, quippe quæ baſis eſt trianguli rectanguli EMG.

Sed quia hæc eadem linea GE eſt ſemidiameter circuli FG, poterit ipſa aliis adhuc terminis explicari. Nimirum ſi ED fuerit $\frac{1}{2} q$, & AD $\frac{1}{2} p + \frac{1}{2}$, EA erit $\sqrt{\frac{1}{4} qq + \frac{1}{4} pp + \frac{1}{2} p + \frac{1}{4}}$, propter angulum rectum ADE. Deinde cum AH ſit media proportionalis inter AS, quæ eſt 1, & AR, quæ eſt r, erit ipſa $\sqrt{r}$. Ac denique, propter angulum rectum EAH, quadratum ex HE ſeu EG eſt $\frac{1}{4} qq + \frac{1}{4} pp + \frac{1}{2} p + \frac{1}{4} + r$: adeò ut habeatur Æquatio inter hanc ſummam & præcedentem. Eadem quippe quæ $z^4 \propto * + pzz - qz + r$. Unde conſequenter liquet, inventam lineam GK, quæ nominata fuit z, Æquationis hujus eſſe radicem. Quod erat demonſtrandum. Et ſi calculum hunc ad omnes alios hujus regulæ caſus applicueritis, mutando ſigna + & —, prout opus exiget, eodem modo ad quæſitum pervenietis; ita ut illis diutiùs immorari non ſit opùs.



Si

Si itaque juxta hanc regulam inter lineas a & q duas libeat medias proportionales invenire, nemo ignorat, ponendo z pro una, eſſe ut a ad z, ſic z ad $\frac{zz}{a}$, & $\frac{zz}{a}$ ad $\frac{z^3}{aa}$; ita ut habeatur Æquatio inter q & $\frac{z^3}{aa}$, utpote, $z^3 \infty * * aaq$. Deinde deſcriptâ Parabolâ F A G, unà cum ſegmento ſui axis A C, quod eſt $\frac{1}{2}a$, ſemiſſis nempe lateris recti, erigenda eſt ex puncto C perpendicularis C E, æqualis $\frac{1}{2}q$, atque ex centro E per A deſcribendus circulus A F, ut obtineantur F L & L A, duæ mediæ quæſitæ.

Inventio duarum mediarum proportionalium.

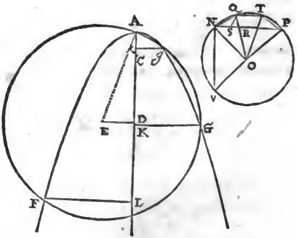
Similiter ſi dividere velimus angulum N O P, ſive arcum, portionémve circuli N Q T P in tres æquales partes; ſi ſumatur N O ∞ 1 pro radio circuli, & N P $\infty\, q$ pro ſubtenſa arcus dati, ac N Q $\infty\, z$ pro ſubtenſa trientis hujus arcus, exſurget Æquatio $z^3 \infty * 3z - q$. Etenim ductis lineis N Q, O Q, & O T; ſi Q S parallela fiat ipſi T O, patet, quòd, ſicut N O eſt ad N Q, ſic N Q ſit ad Q R, & Q R ad R S; adeò ut, cum N O ſit 1, & N Q z, Q R futura ſit zz, & R S z^3. Et quia tantùm R S ſeu z^3 impedit, quò minùs linea N P, quæ eſt q, tripla ſit lineæ N Q, quæ eſt z, habebitur

Ratio dividendi angulum in tres partes æquales.

$$q \infty 3z - z^3, \text{ vel } z^3 \infty * 3z - q.$$

Deinde deſcriptâ parabolâ F A G, in qua C A ſit æqualis ſemiſſi lateris recti principalis, ſi ſumatur C D $\infty\, \frac{1}{2}$, & perpendicularis D E $\infty\, \frac{1}{2}q$: ſecabit circulus F A g G, centro E per A deſcriptus, hanc Parabolam in tribus punctis F, g, & G, non numerato puncto A, quod eſt ejus vertex. Id quod indicat in hac Æquatione tres haberi radices, nimirum duas G K & $g\,k$, quæ veræ ſunt, & tertiam, nempe F L, quæ eſt falſa; Atque ex hiſce duabus veris minorem $g\,k$ illam eſſe, quam pro quæſita linea N Q ſumere oportet. Altera enim G K, æqualis

 eſt



X eſt ipſi NV, ſubtenſæ trientis arcus NVP, qui cum reliquo arcu NQP totum circulum complet. Falſa autem FL æqualis eſt duabus hiſce QN & NV ſimul ſumptis, quemadmodum ex calculo facile eſt videre.

Quòd omnia Solida Problemata reduci poſſint ad haſce duas conſtructiones.

Superfluum foret ſi inſiſterem hîc aliis exemplis in medium afferendis, cum Problemata omnia, quæ non niſi Solida ſunt, eò reduci poſſint, ut hâc regulâ ad conſtructionem ipſorum non aliter indigeamus, quàm quatenus inſervit ad inveniendas duas medias proportionales, aut ad dividendum angulum in tres æquales partes. Quod cognoſcetis, conſiderando, ipſorum difficultates ſemper Æquationibus, quæ ultra Quadrato-quadratum non adſcendunt, comprehendi poſſe; Et omnes illas, quæ ad Quadrato-quadratum adſcendunt, reduci poſſe ad Quadratum, ope quarundam aliarum, quæ tantùm ad Cubum adſcendunt; Et tandem, harum ſecundum terminum tolli poſſe. Ita ut nulla earum ſit, quam ad aliquam ex hiſce tribus formis reducere non liceat.

$z^3 \infty$

Digitized by Google

$z^3 \infty * - pz + q.$
$z^3 \infty * + pz + q.$
$z^3 \infty * + pz - q.$

Si autem habeatur $z^3 \infty * - pz + q$, regula, cujus Y
inventionem Cardanus cuidam, Scipioni Ferreo, tribuit, nos docet, radicem eſſe

$$z \infty \sqrt{C.+\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}} - \sqrt{C.-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}.$$

Quemadmodum etiam, ſi habeatur $z^3 \infty * + pz + q$, & Quadratum ſemiſſis ultimi termini majus ſit Cubo trientis, quantitatis cognitæ penultimi; ſimilis fermè regula nos docet, radicem eſſe

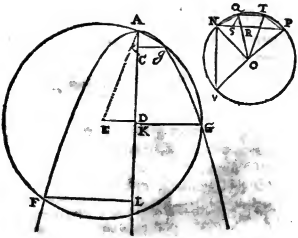
$$z \infty \sqrt{C.+\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.+\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}.$$

Unde apparet, quòd problemata omnia, quorum difficultates ad Æquationem unius ex hiſce duabus formis reducuntur, conſtrui ſemper poſſint, ut Conicas ſectiones adhibere non ſit opùs, niſi ad extrahendas radices Cubicas ex quibuſdam quantitatibus datis, hoc eſt, ad inveniendas duas medias proportionales inter haſce quantitates & unitatem.

Deinde ſi habeatur $z^3 \infty * + pz + q$, & Quadratum ſemiſſis ultimi termini non ſit majus Cubo trientis, quantitatis cognitæ penultimi termini; ſupponendo Circulum NQPV, cujus ſemidiameter NO ſit $\sqrt{\tfrac{1}{3}p}$, hoc eſt, media proportionalis inter trientem quantitatis datæ p & unitatem; tum etiam ſupponendo lineam NP huic Circulo eſſe inſcriptam, quæ ſit $\frac{3q}{p}$, hoc eſt, quæ ſit ad alteram quantitatem datam q, ut eſt unitas ad trientem ipſius p; dividendus tantùm eſt uterque arcus NQP, NVP in tres æquales partes, eritque NQ, ſubtenſa trientis unius arcus, unà cum NV, ſubtensâ trientis alterius, æqualis radici quæſitæ.

 Deni-

Digitized by Google



Denique ſi habeatur $z^3 \infty * + pz - q$, ſupponendo rurſus Circulum NQPV, cujus radius NO ſit $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, & in quo inſcripta NP ſit $\frac{3q}{p}$: erit NQ, ſubtendens trientem arcus NQP, una ex radicibus quæſitis: & NV, ſubtendens trientem arcus NVP, radix altera. Saltem ſi Quadratum ſemiſſis ultimi termini non excedat Cubum è triente quantitatis cognitæ penultimi termini. Etenim ſi majus eſſet, non poſſet linea NP huic Circulo inſcribi, quippe quæ diametro ejus major foret. Id quod oſtenderet, duas veras radices hujus Æquationis non niſi imaginarias eſſe, nec ullam realem extare præter falſam, quæ juxta Cardani regulam foret $\sqrt{C.\,\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\,\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$.

Modus exprimendi valorem radicum omnium

Cæterùm notandum eſt, modum hunc exprimendi valorem radicum per relationem, quam habent ad latera certorum Cuborum, quorum tantùm contentum cognoſcitur, nequaquam magis intelligibilem, neque ſim-

ſimpliciorem eſſe, quàm ſi exprimantur per relationem, quam habent ad ſubtenſas certorum arcuum, ſeu Circuli portionum, quarum triplum eſt datum. Ita ut Cubicarum Æquationum radices illæ omnes, quæ per Cardani regulas exprimi nequeunt, æquè clarè aut etiam clariùs per modum hîc propoſitum exprimi poſſint.

Æquationum Cubicarum: ac per conſequens illarum omnium, quæ Quadrato-quadratum non excedunt.

Si enim, exempli causâ, radicem cognoſcere arbitremur hujus Æquationis $z^3 \infty * + p z + q$; quia ipſam compoſitam eſſe ſcimus ex duabus lineis; quarum una eſt latus Cubi, cujus contentum eſt ſumma, quæ conflatur ex $\frac{1}{2} q$, & ex latere Quadrati, cujus contentum eſt $\frac{1}{4} q q - \frac{1}{27} p^3$; & altera latus alterius Cubi, cujus contentum eſt differentia, quæ eſt inter $\frac{1}{2} q$, & latus Quadrati, cujus contentum eſt $\frac{1}{4} q q - \frac{1}{27} p^3$, (quod illud omne eſt, quod ex Cardani regula addiſcimus); Dubitandum non eſt, quin æquè diſtinctè aut etiam diſtinctiùs radix hujus $z^3 \infty * + p z - q$ cognoſcatur, ſi ea conſideretur inſcripta Circulo, cujus ſemidiameter ſit $\sqrt{\frac{1}{3} p}$, in quo pro ſubtenſa arcus intelligatur, cujus tripli ſubtenſa ſit $\frac{3q}{p}$. Quin etiam hi termini prioribus illis multò minùs ſunt intricati, & qui etiam multò breviores reddentur, ſi peculiari aliquâ notâ ad exprimendas haſce ſubtenſas, quemadmodum fit notâ √C. ad exprimendum latus Cubicum, uti velimus.

Poſſunt quoque per regulas hîc ſupra explicatas deinceps exprimi radices Æquationum omnium, quæ ad Quadrato-quadratum adſcendunt; ita ut neſciam, quid in hac materia deſiderari ampliùs poſſit. Neque enim natura harum radicum permittit, ut terminis exprimantur ſimplicioribus, nec ut per conſtructionem aliquam, quæ unà & generalior & ſimplicior ſit, determinentur.

Verum

Digitized by Google

Cur Problemata Solida conſtrui non poſſint abſque ſectionibus Conicis, nec quæ magis compoſita ſunt ſine aliis lineis, magis compoſitis.

Verum quidem eſt, me nondum dixiſſe, quibus rationibus nitar, quòd affirmare audeam, utrùm res aliqua fieri poſſit nec ne. At verò ſi conſideretur, quomodo per methodum qua utor, id omne, quod ſub Geometricam contemplationem cadit, ad unum idemq́ue genus Problematum reducatur, quod eſt, ut quæratur valor radicum alicujus Æquationis; ſatis judicabitur, non difficile eſſe ita enumerare vias omnes, quibus inveniri poſſunt: ut hoc ſufficiat ad oſtendendum, generaliſſimam & ſimpliciſſimam fuiſſe ſelectam. Et ſpeciatim, quod ſpectat ad Solida Problemata, quòd videlicet, ut dixi, citra lineam aliquam magis compoſitam quàm circularem conſtrui non poſſint, vel inde evidens eſſe poteſt, quòd illa omnia ad duas conſtructiones reducantur; in quarum unâ duo ſimul puncta requiruntur, quæ inter duas datas lineas duas medias proportionales determinent; & in alterâ duo puncta, quæ datum arcum in tres æquales partes dividant. Etenim cum Circuli curvatura tantùm dependeat à ſimplici relatione omnium partium ad punctum unum, quod eſt ipſius centrum; inde fit, ut eo quoque non niſi ad unum ſolummodo punctum inter duas extremas determinandum uti poſſimus, utpute ad inveniendam unam mediam proportionalem inter duas datas, aut ad datum arcum in duas Æquales partes dividendum. At verò curvatura Conicarum Sectionum, quæ ſemper à duabus diverſis rebus dependet, ad duo diverſa puncta determinanda inſervire poteſt.

Ob eandem rationem fieri nequit, ut aliquod eorum Problematum, quæ uno gradu magis quàm Solida ſunt compoſita, & inventionem 4 mediarum proportionalium, aut anguli in 5 æquales partes diviſionem, præſupponunt, ope alicujus Conicæ ſectionis conſtrui

Digitized by Google

ſtrui poſſit. Quare nihil melius hìc à me fieri poſſe confido, quàm ſi regulam generalem tradam conſtruendi illa ope lineæ curvæ, quæ deſcribitur per interſectionem Parabolæ & lineæ rectæ, quemadmodum ſupra fuit explicatum. Affirmare enim audeo, nullam, quæ huic effectui inſervire queat, ſimpliciorem in rerum natura inveniri. Atque etiam vidiſtis, quomodo hæc linea immediatè ſectiones Conicas ſequatur in quæſtione tantopere à Veteribus quæſitâ, cujus ſolutio ordine omnes curvas lineas, in Geometriam recipiendas, exhibet.

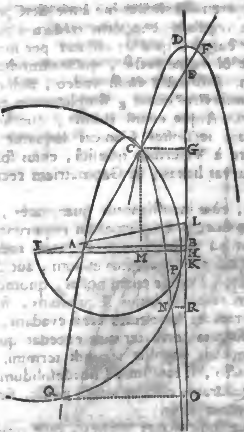
Modus generalis conſtruendi Problemata omnia, reducta ad Æquationem, ſex dimenſiones non excedentem.

Jam noſtis, cùm inveſtigantur quantitates, quæ ad conſtructionem horum Problematum requiruntur, quâ ratione ſemper ad Æquationem aliquam reduci poſſint, quæ non niſi ad Quadrato-cubum, aut Surdeſolidum adſcendat. Deinde etiam noſtis, quomodo, augendo valorem radicum hujus Æquationis, fieri ſemper poſſit, ut radices hæ omnes veræ evadant, ac ſimul ut quantitas cognita tertii termini excedat quadratum à ſemiſſe quantitatis cognitæ ſecundi termini. Et denique, quo pacto, ſi tantùm ad Surdeſolidum adſcendat, ipſa ad Quadrato-cubum attolli poſſit, fierique ut nullus terminorum deſit.

Quocirca ut difficultates omnes, quæ quidem hìc occurrunt, per eandem regulam reſolvi queant, deſidero ut hæc omnia fiant, & hâc ratione reducantur ſemper ad Æquationem hujus formæ

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v \propto 0,$$

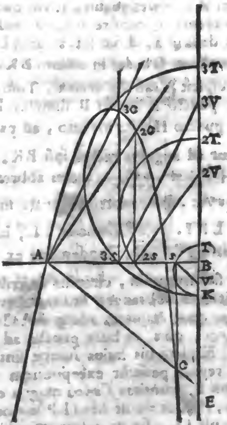
in qua quantitas vocata q, major ſit quadrato à ſemiſſe ejus, quæ nominatur p.



Poſt hæc ductâ lineâ rectâ BK, utrinque indefinitâ, erectâque ad eandem ex puncto B perpendiculari AB, cujus longitudo ſit $\frac{1}{2}p$; deſcribenda eſt in plano aliquo ſeparato Parabola, ut CDF, cujus latus rectum principale ſit $\sqrt{\frac{t}{\sqrt{v}} + q - \frac{1}{4}pp}$, quod brevitatis causâ vocabo n. Tum ponendo planum, in quo Parabola exiſtit, ſupra planum, in quo ſunt lineæ AB & BK, ita ut axis ejus DE omnino congruat cum linea recta BK; ſum-

ſumptoque ſegmento hujus axis, quod inter puncta E & D intercipitur, æquali $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, adplicanda eſt longa regula ad punctum E, ita ut, poſtquam ad punctum A plani inferioris quoque eſt adplicata, ſemper maneat adjuncta hiſce duobus punctis, interea dum Parabola ſecundùm lineam B K, ad quam ejus axis eſt adplicatus, vel elevatur vel deprimitur; quâ quidem ratione Parabolæ atque regulæ interſectio, quæ fit in puncto C, lineam curvam A C N deſignabit, illam quippe quâ ad propoſiti Problematis conſtructionem indigebimus. Etenim eâ ſic deſcriptâ, ſi fiat B L æqualis D E, hoc eſt, $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, ita ut punctum L cadat in lineam B K, versùs partem, quam reſpicit Parabolæ vertex, Tum verò in eadem linea à puncto L versùs B ſumatur L H æqualis $\frac{t}{2n\sqrt{v}}$, Et ex puncto H, ſic invento, ad partem curvæ A C N ducatur ad angulos rectos ipſi B K, linea H I, æqualis $\frac{r}{2nn} + \frac{\sqrt{v}}{nn} + \frac{pt}{4nn\sqrt{v}}$, quam abbreviandi causâ nominabo $\frac{m}{nn}$, Ac, poſtquam conjuncta ſunt puncta L & I, circulo L P I, cujus diameter I L; inſcribatur linea L P, æqualis $\sqrt{\frac{s+p\sqrt{v}}{nn}}$, Tandemque ex centro I per punctum P, ſic inventum, circulus deſcribatur P C N: ſecabit hic circulus vel tanget lineam curvam A C N, in tot punctis, quot Æquatio admittet radices. Ita ut perpendiculares, quæ ex hiſce punctis ad lineam B K deducentur, Æquationis hujus futuræ ſint radices, & nullam hæc regula patiatur exceptionem neque defectum. Etenim ſi quantitas s adeò magna eſſet reſpectu aliarum, p, q, r, t, & v, ut linea L P major inveniretur diametro circuli I L, ſic ut eidem inſcribi non poſſet, nulla itidem foret radix in Æquatione propoſita, quæ

non eſſet imaginaria; nec etiam ulla foret radix, ſi circulus I P adeò parvus eſſet, ut curvam A C N in nullo prorſus puncto ſecaret. Hanc autem curvam in 6 diverſis punctis ſecare poteſt, ita ut hîc ſex diverſæ radices in Æquatione haberi queant. Atque cùm illam in paucioribus ſecat, hoc indicio eſt, quaſdam ex hiſce radicibus inter ſe æquales eſſe, aut ipſarum aliquas eſſe tantùm imaginarias.



Quòd ſi verò ratio hæc deſcribendi lineam A C N per

per motum Parabolæ vobis videatur incommoda, facile eſt plures alios modos in eundem finem excogitare. Ut, manentibus eiſdem quantitatibus pro A B & BL, nec non eâdem pro BK, quæ pro latere recto principali Parabolæ ſupponebatur; deſcribendus eſt tantùm ſemicirculus KST, centro ejus ad libitum in linea BK aſſumpto, ita tamen ut lineam AB alicubi ſecet, ut in puncto S. Nam poſtquam à puncto T, ubi terminatur, versùs K aſſumpta fuerit linea TV, æqualis BL, jungaturque SV, atque à puncto A junctæ SV parallela ducatur AC, quæ rectæ SC, ductæ per punctum S, ipſi BK parallelæ, occurrat in puncto C: Erit punctum C, ubi hæ duæ parallelæ ſibi mutuò occurrunt, unum ex punctis per quod quæſita curva tranſire debet. Eodem modo inveniri poſſunt tot alia puncta, quot quis voluerit.

Quorum omnium demonſtratio ſatis facilis eſt.

Si enim regula A E unà cum Parabola F D adplicetur ad punctum C, (eodem modo, quo conſtat eas ad punctum C in curva A C N mutuâ interſectione deſignandum eſſe adplicandas) & quidem CG vocetur y; erit GD $\frac{yy}{n}$, cum latus rectum, quod eſt n, ſit ad C G ſicut CG ad GD. Auferendo autem DE, quæ eſt $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, à GD, relinquetur $\frac{yy}{n} - \frac{2\sqrt{v}}{pn}$, pro GE. Deinde quia AB eſt ad BE, ut CG ad GE: hinc cum AB ſit $\frac{1}{2}p$, BE erit $\frac{yy}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$.

Eâdem ratione ſi punctum curvæ C ſupponatur inventum eſſe per interſectionem linearum rectarum, S C, parallelæ ipſi B K, & A C, parallelæ ipſi S V; SB, quæ æquatur ipſi C G, eſt y: & cum B K æquetur lateri recto Parabolæ, quod nominavi n, BT erit $\frac{yy}{n}$. eſt enim ut KB ad B S, ita BS ad BT. Cumque T V eadem ſit

quæ BL, hoc eſt, $\frac{2\sqrt{v}}{pn}$, BV erit $\frac{yy}{n} - \frac{2\sqrt{v}}{pn}$. Sicut autem SB eſt ad BV, ſic AB eſt ad BE, quæ ideo eſt $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$, ut ante. Unde apparet, unam eandemque lineam eſſe, quæ utroque hoc modo deſcribitur.

Porrò, quoniam BL & DE ſibi invicem æquales ſunt, æquales quoque inter ſe erunt DL & BE; ita ut, addendo LH, quæ eſt $\frac{s}{2n\sqrt{v}}$, ad DL, quæ eſt $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny}$, habeatur tota DH, nempe $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny} + \frac{s}{2n\sqrt{v}}$, è qua auferendo GD, quæ eſt $\frac{yy}{n}$, relinquetur GH, videlicet $\frac{py}{2n} - \frac{\sqrt{v}}{ny} + \frac{s}{2n\sqrt{v}} - \frac{yy}{n}$. Id quod ordine ſcribo, hoc pacto, GH ∞ $\frac{-y^3 + \frac{1}{2}pyy + \frac{sy}{2\sqrt{v}} - \sqrt{v}}{ny}$.

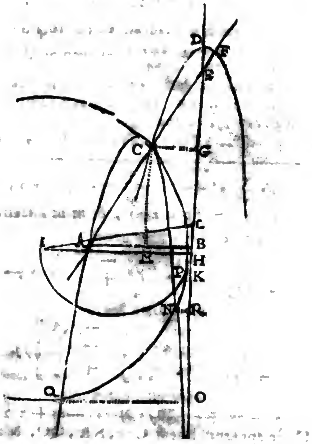
Et ſit quadratum ex GH,

$$\frac{y^6 - py^5 \left.\begin{matrix} -\frac{s}{\sqrt{v}} \\ +\frac{1}{4}pp \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +2\sqrt{v} \\ +\frac{ps}{2\sqrt{v}} \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -p\sqrt{v} \\ +\frac{ss}{4v} \end{matrix}\right\} yy - sy + v}{nnyy}.$$

Quocunque autem alio loco hujus curvæ imaginari libeat punctum C, utpura versùs N, vel versùs Q, ſemper tamen invenietur, quadratum lineæ rectæ, quæ inter punctum H, & punctum ubi perpendicularis deducta ex puncto C cadit ſuper BH, intercipitur, iiſdem hiſce terminis iiſdemque ſignis + & — exprimi poſſe.

Poſtea

Digitized by Google



Poſtea cum IH ſit $\frac{m}{nn}$, & LH $\frac{s}{2n\sqrt{v}}$, IL erit $\sqrt{\frac{mm}{n^4}+\frac{ss}{4nnv}}$ (propter angulum rectum IHL); & cum LP ſit $\sqrt{\frac{s}{nn}+\frac{p\sqrt{v}}{nn}}$, IP vel IC erit $\sqrt{\frac{mm}{n^4}+\frac{ss}{4nnv}-\frac{s}{nn}-\frac{p\sqrt{v}}{nn}}$, (propter angulum rectum IPL). Dein ductâ CM perpendiculari ad IH, erit IM differentia, quæ eſt inter IH & HM vel CG, hoc eſt

eſt, inter $\frac{m}{nn}$ & y; ita ut quadratum ejus ſemper ſit $\frac{mm}{n^4} - \frac{2my}{nn} + yy$, quod à quadrato ex IC ablatum relinquit $\frac{ss}{4nnv} - \frac{s}{nn} - \frac{p\sqrt{v}}{nn} + \frac{2my}{nn} - yy$, pro quadrato ex CM, quod eſt æquale quadrato ex GH, jam invento. Aut etiam faciendo ut hæc ſumma quemadmodum altera diviſa ſit per $nnyy$, obtinebitur

$$\frac{-nny^4 + 2my^3 - p\sqrt{v},yy - syy + \frac{ss}{4v}yy.}{nnyy}$$

Cæterùm reſtituendo $\frac{s}{\sqrt{v}}y^4 + qy^4 - \frac{1}{4}ppy^4$ pro nny^4; & $ry^3 + 2\sqrt{v},y^3 + \frac{ps}{2\sqrt{v}}y^3$ pro $2my^3$, & multiplicando utramque ſummam per $nnyy$: exſurget

$$y^6 - py^5 \left.\begin{matrix} -\frac{s}{\sqrt{v}} \\ +\frac{1}{4}pp \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +2\sqrt{v} \\ +\frac{ps}{2\sqrt{v}} \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -p\sqrt{v} \\ +\frac{ss}{4v} \end{matrix}\right\} yy - sy + v,$$

æquale

$$\left.\begin{matrix} -\frac{s}{\sqrt{v}} \\ -q \\ +\frac{1}{4}pp \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +r \\ +2\sqrt{v} \\ +\frac{ps}{2\sqrt{v}} \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -p\sqrt{v} \\ -s \\ +\frac{ss}{4v} \end{matrix}\right\} yy.$$

Hoc eſt, habebitur

$$y^6 - py^5 + qy^4 - ry^3 + syy - ty + v \infty 0.$$

Unde apparet, lineas CG, NR, QO, & ſimiles eſſe hujus Æquationis radices. Quod erat demonſtrandum.

Inventio quatuor mediarum proportionalium.

Hinc ſi invenire velimus 4^or medias proportionales inter lineas a & b; poſitâ x pro prima, prodibit Æquatio $x^5 **** - a^4 b \infty 0$, vel $x^6 **** - a^4 bx * \infty 0$. Factâque $y - a \infty x$, invenietur

$$y^6 - 6ay^5 + 15aay^4 - 20a^3y^3 + 15a^4yy \left.\begin{matrix} -6a^5 \\ -a^4 b \end{matrix}\right\} y \begin{matrix} +a^6 \\ +a^5 b \end{matrix} \infty 0$$

Unde pro linea AB ſumendum eſt $3a$, & $\sqrt{\frac{6a^3 + aab}{\sqrt{aa+ab}} + 6aa}$ pro BK, vel latere recto Parabolæ,

læ, quod ſupra nominavi n, & $\frac{a}{3n}\sqrt{aa+ab}$ pro DE, vel BL. Porrò deſcriptâ lineá curvâ ACN ſecundùm menſuram harum trium linearum, facienda eſt LH $\infty \frac{6a^3+aab}{2n\sqrt{aa+ab}}$, & IH $\infty \frac{10a^3}{nn} + \frac{aa}{nn}\sqrt{aa+ab} + \frac{18a^4+3a^3b}{2nn\sqrt{aa+ab}}$, & LP $\infty \sqrt{\frac{15a^4+6a^3\sqrt{aa+ab}}{nn}}$. Etenim circulus, qui centrum ſuum habet in puncto I, tranſiturus per punctum ſic inventum P, ſecabit curvam in duobus punctis C & N, à quibus ſi ad rectam BK demittantur perpendiculares NR & CG, & minor NR à majore CG auferatur; erit reliqua x, prima ex quatuor mediis proportionalibus quæſitis.

Eodem modo facile eſt datum angulum in quinque æquales partes dividere, & Circulo figuram inſcribere 11 aut 13 æqualium laterum, atque infinita alia hujus regulæ exempla reperire.

Verùm notandum eſt in plurimis horum exemplorum, quòd Circulus hic ita obliquè hanc Parabolam ſecundi generis ſecare poſſit, ut interſectionis punctum cognitu ſit difficile, atque adeò hæc conſtructio ad Praxin non ſit idonea. Cui quidem rei facilè remedium afferri poſſet, componendo alias regulas ad imitationem hujus.

Sed inſtitutum meum non eſt prolixum librum conſcribere, ſed potiùs multa paucis comprehendere: quod fortè judicabunt me feciſſe, qui conſideraturi ſunt, quòd, reductis ad eandem conſtructionem Problematîs omnibus ejuſdem generis, modum ſimul, quo ad infinitas alias diverſas reduci, atque ita omnia infinitis modis reſolvi poſſint, oſtenderim. Præterea etiam, quòd conſtructis iis omnibus, quæ Plana ſunt, interſectione Circuli & lineæ rectæ, Et iis omnibus, quæ Solida ſunt,

interſectione Circuli & Parabolæ, Ac tandem iis omnibus, quæ uno gradu magis ſunt compoſita, interſectione ſimiliter Circuli & lineæ, uno gradu magis quàm Parabola compoſitæ, eandem tantùm viam in conſtruendis reliquis omnibus, quæ magis magiſque in infinitum ſunt compoſita, ſequi oporteat. Etenim cognitis, in materia Mathematicarum progreſſionum, duobus aut tribus prioribus terminis, reliquos invenire non eſt difficile. Adeò ut ſperem à poſteris mihi gratias habitum iri, non ſolùm pro iis, quæ hîc explicui; ſed etiam pro iis, quæ conſultò omiſi, quò ipſis voluptatem illa inveniendi relinquerem.

FINIS.

Digitized by Google

FLORIMONDI DE BEAUNE

IN

GEOMETRIAM
RENATI DES CARTES
NOTÆ BREVES.

ALGEBRA ſpecioſa, hoc eſt, quæ exercetur per ſpecies rerum, quæ literis Alphabeti, aliiſve ſimilibus deſignantur, eſt Scientia, inveſtigandis inveniendisque Theorematis & Problematis inſerviens, ac res homogeneas, quarum rationes vel proportiones conſiderantur, concernens. Dicimus autem rationem inter ſe habere duas res, cùm homogeneæ ſeu ejuſdem naturæ exiſtentes, aut æquales ſunt, aut inæquales, & minor per ſui ipſius continuam additionem, tandem major evadit, majoremque ſuperans. Adeò ut hæc Scientia non ſolùm Algebram numeroſam atque Veterum Analyſin Geometricam comprehendat; ſed etiam omne id, quod relationem quandam habet aut proportionem, ut refert D. des Cartes, in ſua de Methodo diſſertatione.

Optimum verò eſt, ad ſtabilienda hujus Scientiæ præcepta & ad cognitionem ejus aſſequendam, ut generaliter rationes haſce in lineis conſideremus: cum ſimpliciſſimæ ſint, & hoc ſibi vendicent, quòd rationes omnes, quæ inter quaſcunque alias res conſiderari poſſunt, exprimant. Id quod numeri non efficiunt, qui relationes, quæ inter incommenſurabiles quantitates reperiuntur, exprimere nequeunt. Accedit, quòd iis ad omnes alias res, rationem vel proportionem quandam inter ſe habentes, uti poſſimus. Etenim licèt linea nullam cum ſuperficie, aut cum alicujus motus velocitate rationem habeat (atque ita de aliis alterius naturæ rebus;) poſſumus tamen rationem, quæ inter duas ſuperficies, aut inter duas differentes velocitates, & id genus alia, quæ inter ſe relationem aliquam habere ſtatuimus,

mus, reperitur, exprimere per duas lineas. Id tantùm cavendum eſt, ne permutata ratione utamur.

Operationes omnes, quæ in hac Scientia occurrunt, ad quinque reducuntur, quæ eædem ſunt, quæ Arithmeticæ vulgaris: nimirum, Additio, Subtractio, Multiplicatio, Diviſio, atque Radicum Extractio; hoc præterea commodi habentes, quòd illæ (ſicut notavimus) circa incommenſurabiles quantitates, non minùs quàm circa alias, verſentur. Ut, cùm proponuntur duæ lineæ incommenſurabiles, ſive longitudine, ſive longitudine & potentiâ, poſſunt ipſæ ſimul addi, una ab altera auferri, per ſe invicem multiplicari, una per alteram dividi, & ex utraque radix extrahi, perinde ac ſi longitudine eſſent commenſurabiles.

Neque vero docebimus, quo pacto hæ operationes per literas Alphabeticas, vel alias linearum aliarúmve rerum ſpecies, quas deſignant, ſint faciendæ: cum hoc ab aliis jam ſit pertractatum. Tum etiam quoniam hæc Geometria, quâ ratione Additio, Subtractio, Multiplicatio, Diviſio, atque Radicum Extractio, tam in numeris, quàm in lineis inſtituendæ ſint, breviter exponit. Verùm obſervari volumus, quòd per haſce ſpecies, quas nominamus b, b^2, b^3, b^4, bd, b^2d, b^3d; primam videlicet b, numerum aut lineam ſimplicem; ſecundam b^2, quadratum ipſius b, ſeu b quadratum; tertiam b^3 ſeu b cubum; quartam b^4 ſeu b quadrato-quadratum, &c. non ullæ aliæ res, quàm lineæ omnino ſimplices concipiantur; niſi quæſtio fuerit de veris Quadratis, Cubis, Planis, & Solidis, aut per haſce ſpecies alias res ſignificemus, ſimilem inter ſe relationem, quam lineæ ipſis deſignatæ, habentes. Attamen conſentaneum eſt, nomina uſitata retinere, quandoquidem lineæ, ſpeciebus hiſce deſignatæ, eandem inter ſe rationem, quam veræ ſuperficies, & vera ſolida, quæ per ipſas denotantur, ſervant. Et hoc quidem ad imitationem Arithmeticæ communis, ubi alios numeros appellamus Quadratos, alios Cubos, alios Planos, alios Solidos &c. quippe qui talem inter ſe relationem obſervant, quatenus ſunt numeri ſimplices, qualem inter ſe obtinent Quadrati, Cubi, &c. quos repræſentant.

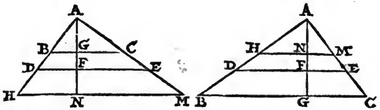
Oportet itaque oſtendere, ſpatia & corpora, ſpeciebus hiſce deſignata, eandem inter ſe rationem habere, quam lineæ ſimplices, quas per ipſas concipimus. Exempli gratiâ, b^2 eandem ratio-

Digitized by Google

rationem habere ad bd, & ad d^2, quatenus ſpatia ſignificant, quàm quatenus lineas referunt. Sic etiam relationem ipſius b^3 ad $b^2 d$ & ad d^3, aliaſque ſimiles, eandem inter hæc Solida exiſtere, quam ea, quæ eſt inter lineas, per has ſpecies deſignatas. Quod ipſum facile erit, ſi pro arbitrio lineam aliquam accipiamus, quam appellemus unitatem, & ad eam reliquas omnes referamus. Illa vocetur a, ſic ut hæ tres lineæ a, b, & b^2 proportionales exiſtant, juxta id quod de multiplicatione in hac Geometria dictum eſt. Idem de lineis a, d, & d^2 eſt intelligendum. Sic etiam linea a eſt ad lineam b, ſicut linea d eſt ad lineam bd; aut, ut linea a eſt ad lineam d, ita linea b eſt ad eandem lineam bd. Quod cum ita ſit, linea b erit ad lineam b^2, ſicut linea d ad lineam bd; cum eadem utrobique ſit ratio, nimirum eadem, quæ lineæ a ad lineam b. Vnde permutando erit, ut linea b ad lineam d, ita linea b^2 ad lineam bd. Eodem modo linea b erit ad lineam bd, ut linea d ad lineam d^2: cum utraque ratio eadem ſit, quæ lineæ a ad lineam d. quemadmodum eſt oſtenſum. Unde permutando erit, ut linea b ad lineam d, ita linea bd ad lineam d^2. Patet itaque, b eſſe ad d, ſicut b^2 ad bd; itemque b eſſe ad d, ſicut bd ad d^2, & conſequenter, rationem lineæ b^2 ad lineam d^2 eſſe duplicatam lineæ b ad lineam d; lineamque bd eſſe mediam proportionalem inter lineas b^2 & d^2. Id quod unuſquiſque novit ab Euclide eſſe oſtenſum, nimirum: rationem, quam habet b^2 ad d^2, quatenus deſignant ſuperficies ſeu quadrata, duplicatam eſſe rationis, quam habet latus b ad latus d: itemque bd rectangulum eſſe medium proportionale inter hæc ipſa quadrata. ac per conſequens, hæc ſpatia eandem inter ſe relationem habere, quam lineæ iiſdem ſpeciebus deſignatæ. Idem oſtendi poteſt de Cubis vel Solidis, ad imitationem præcedentis demonſtrationis. Unde haud parvum emolumentum colligere licet, cum complures rationes, quas Euclides aliique Geometræ, inter duas ſuperficies, atque inter duo corpora, reperiri, demonſtrarunt, nos pro lineis, aliiſve rebus, iiſdem ſpeciebus deſignatis, uſurpare poſſimus, prout eandem quam dicta ſpatia ſeu corpora inter ſe relationem habent.

Exhibeamus aliquod exemplum: Detur triangulum rectangulum ADE, cujus angulus DAE ſit rectus. Manifeſtum eſt ex elementis, quòd laterum quadrata ſimul ſumpta quadrato baſis

Digitized by Google



ſint æqualia: hoc eſt, ſi ponamus A D ∞ b, A E ∞ c, & D E ∞ d, quòd $b^2 + c^2$ æquetur d^2, quatenus deſignant vera quadrata. Quod quoque verum eſt, quatenus deſignant lineas, modò eandem inter ſe relationem obtineant, quam hæc ipſa quadrata; ut demonſtratum eſt à nobis, atque etiamnum in hoc exemplo palàm facere conabimur.

Aſſumatur pro lubitu linea aliqua major vel minor (perinde enim eſt) quàm DE, quæ quidem ſit unitas, & ad quam reliquæ omnes referantur: ipſa autem eſto BC, parallela exiſtens ipſi DE, ducaturque perpendicularis AF, ipſam, ſi opùs eſt, producendo. Deinde fiat, ut BC ad DE, ita DE ad HM, fietque HM ∞ d^2.

Jam verò, ſicut hæ lineæ BC, DE, HM ſunt continuè proportionales, ita quoque lineæ BC, AE, NM, nec non lineæ BC, DA, HN. Compoſita enim eſt ratio BC ad AE, ex ratione BC ad AC, & ex ratione AC ad AE. Eſt autem ratio AE ad NM compoſita ex iiſdem rationibus, nimirum ex ratione AE ad FE, quæ eadem eſt rationi BC ad AC (propter ſimilitudinem triangulorum rectangulorum AEF & BCA,) & ex ratione FE ad NM, hoc eſt, AE ad AM, quæ eadem eſt rationi AC ad AE (per conſtructionem.) Id quod eodem modo patet de BC, AD, HN. Erit igitur NM ∞ c^2, & HN ∞ b^2, quæ quidem ſimul ſumptæ æquantur ipſi HM, hoc eſt, d^2. Quod erat demonſtrandum.

Cernitur præterea illa in hac Methodo facilitas, quòd etiam lineam aliquam hoc modo $\frac{b}{d}$, aliiſve ſimilibus, exprimere poſſimus; aut quòd eo item modo fractionem aliquam Arithmeticæ communis, ut $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, &c. denotare valeamus; hoc ſanè compendio, quòd literis fractio exprimi poſſit, cujus numerator ad denomi-

Digitized by Google

nominatorem non habeat rationem commenſurabilem; ſed quæ ſimilis ſit lineæ ad lineam, quarum una vicem gerat numeratoris, & altera vicem denominatoris ejuſdem fractionis. Id quod non exiguæ eſt utilitatis, quemadmodum poſtea videbitur.

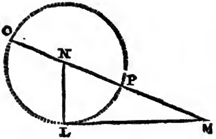
Jam autem explicandum eſt, cur æquè-multæ dimenſiones ſingulis Æquationis terminis ſint tribuendæ. Quod ſanè per ſe liquet, quando ſub hiſce terminis ſuperficies aut corpora intelliguntur: cum nulla ratio inter duas quantitates heterogeneas conſiſtat, ſpatiaque illa aut corpora eodem ſemper linearum atque dimenſionum numero deſignentur.

Verùm expedit ut idem faciamus, quando per hoſce terminos non niſi lineæ deſignantur, ut Methodus eò univerſalior atque etiam commodior reddatur: Quandoquidem id præſtare tenemur, cùm linea, quæ pro unitate ſumenda eſt, indeterminata exiſtit, ſeu, cùm requiritur, ut liberum ſit aſſumere pro unitate lineam qualem volumus. Id quod facilè concipi poteſt, quoniam ſumendo lineam aliquam, ut a, pro unitate, lineæ, verbi gratiâ, b^2 & d^2, denominationes haſce accipiunt, prout referuntur ad lineam a. At verò ſtatuendo aliam quandam lineam pro unitate quàm a, licèt b & d eædem maneant, nihilominus tamen b^2 & d^2 à præcedentibus erunt diverſæ. Ac proinde, ſi comparare velimus lineam b cum linea d^2: quoniam d^2 diverſa eſt, prout ad diverſas lineas refertur, quas pro unitate accipere poſſumus, ipſâ lineâ b eâdem ſemper manente; patet lineam b ad lineam d^2 non ſemper eandem rationem ſervare: ſed contra, diverſas ad illam ſortiri relationes, pro diverſis lineis, quæ pro unitate aſſumuntur. Et ſic de aliis. Aſt quæcunque tandem linea pro unitate ſumatur, linea tamen indeterminata, & quæ per b^2 concipitur, eandem ſemper habet rationem ad d^2, quam quadratum lineæ b ad quadratum lineæ d. Atque ita de aliis omnibus, ut ſupra eſt oſtenſum. Et quidem generalius eſt atque etiam commodius, relinquere ita unitatem indeterminatam & ad cujuſque arbitrium, ut deinde pro ipſa talis linea aſſumi poſſit, qualis videbitur, quàm eandem ab initio operationis determinare, ſumendo pro ipſa certam aliquam lineam. Præterquam quod id plurimùm conducat ad confuſionem evitandam; ad dirigendum calculum; atque ad præcavenda vitia, quæ ibidem committi poſſent. Verùm cùm unitas determinata exiſtit, tum quidem non ampliùs ſingulis Æqua-

Digitized by Google

Æquationis terminis æquè multas literas tribuere tenemur: cum unitas illas ubique ſupplere poſſit, ubi numero pauciores habentur, & ipſa has ſpecies multiplicans aut dividens eaſdem non mutet. Si verò ibidem non ſit expreſſa, poterit tum quidem ſubintelligi. Qua de re plura exempla in hac Geometria reperiuntur.

AD PAGINAS 6 & 7, DE RADICUM EXTRACTIONE.



QUandoquidem linea LM primæ figuræ tangit circulum LOP, rectangulum OMP æquatur quadrato ex LM. Sunt autem bina rectangula MOP & OMP æqualia quadrato ex OM. Æquale igitur erit rectangulum MOP, unà cum quadrato ex LM, quadrato ex OM; hoc eſt, erit $z^2 \infty az + b^2$, ac per conſequens $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$: cum ON æquetur $\frac{1}{2}a$, & quadratum ex NM tantundem valeat atque duo quadrata ex NL & LM, hoc eſt, $\frac{1}{4}a^2$ & b^2. Id quod primò erat demonſtrandum.

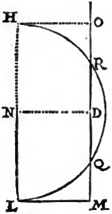
Deinde rectangulum OPM & quadratum ex PM æqualia ſimul ſunt rectangulo OMP. Eſt autem rectangulum OMP æquale quadrato ex LM. Quadratum itaque ex PM æquale eſt quadrato ex LM, minus rectangulo OPM: hoc eſt, erit $y^2 \infty -ay + bb$, ac proinde $y \infty -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$. quia, cùm NM æquatur $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$, ut ſupra, ac ex ipſa auſertur NP ſeu $\frac{1}{2}a$, relinquitur MP ſeu y.

IN SECUNDAM FIGURAM DE RADICUM EXTRACTIONE. PAG. 7.

REducemus hanc figuram ad ſequentem, in qua ND & HO ſunt parallelæ & æquales ipſi LM. Quibus poſitis, quoniam LM tan-

Digitized by Google

LM tangit circulum HRQL in puncto L, erit quadratum ex LM æquale rectangulo RMQ. Deinde, quia MD æqualis eſt DO, & QD ipſi DR, erit & MQ æqualis RO. Unde additâ communi QR, fiet quoque MR æqualis QO. Ac proinde ſi à rectangulo OMR auferatur rectangulum RMQ, hoc eſt, quadratum ex LM, erit reliquum æquale quadrato ex QO ſeu MR. Hinc cum RM ſit ∞z, HL ſeu MO ∞a, & LM ∞b: erit $z^2 \infty az - bb$.



Similiter ſi à rectangulo OMQ auferatur rectangulum RMQ, hoc eſt, quadratum ex LM, erit reliquum æquale quadrato ex RO ſeu MQ. Ac proinde ſi QM ſumatur pro z, habebitur $z^2 \infty az - bb$.

Jam autem cum linea RQ diviſa ſit bifariam in D, ac ipſi in directum adjecta QM, erit rectangulum RMQ, hoc eſt, quadratum ex LM, unà cum quadrato ex DQ ſeu RD, æquale quadrato ex DM, hoc eſt, ex ſemiſſe ipſius a; ac proinde quadratum ex DQ ſeu DR æquale quadrato ex DM, minus quadrato ex LM, hoc eſt, æquale $\frac{1}{4}aa - bb$. Unde ſi addamus $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$, hoc eſt, DQ ſeu DR ad DM vel $\frac{1}{2}a$, habebimus MR pro z; ſi verò illam ex eadem DM auferamus, obtinebimus quoque QM pro z. E quibus patet, primo caſu fieri MR, hoc eſt, $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$, ſecundo autem MQ, hoc eſt, $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$. Ita ut hæc æquatio $z^2 \infty az - bb$ duas habeat radices, nimirum, MR & MQ, quæ, ſicut jam diximus, exprimuntur. Id quod ſecundò erat demonſtrandum.

Poſſunt quoque hæc omnia, quæ de radicibus dicta ſunt, per Algebram demonſtrari. Si enim in primo exemplo, ſicut fecimus, ponatur $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$: auferendo utrinque $\frac{1}{2}a$, habebitur $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2} \infty z - \frac{1}{2}a$. Ac proinde, ſi ſumantur horum quadrata, erit & $z^2 - az + \frac{1}{4}a^2 \infty \frac{1}{4}a^2 + b^2$. Et ablato

 utrin-

utrinque $\frac{1}{4}a^2$, atque transferendo $-az$ in alteram æquationis partem: $z^2 \infty az + b^2$.

In ſecundo exemplo, cùm y æquatur $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$, ac proinde $y + \frac{1}{2}a \infty \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$, erunt & horum quadrata æqualia, hoc eſt, $y^2 + ay + \frac{1}{4}a^2 \infty \frac{1}{4}a^2 + b^2$, & per conſequens $y^2 \infty -ay + bb$.

In tertio exemplo, cum primo loco habeatur $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$, ideoque $z - \frac{1}{2}a \infty \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$, erunt & horum quadrata æqualia, hoc eſt, $z^2 - az + \frac{1}{4}a^2 \infty \frac{1}{4}aa - bb$, unde & $z^2 \infty az - bb$.

In ultimo exemplo, cum ſecundo loco habeatur $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, ac idcirco $\frac{1}{2}a - z \infty \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$, erunt & horum quadrata æqualia, hoc eſt, $\frac{1}{4}aa - az + z^2 \infty \frac{1}{4}aa - bb$, & propterea $z^2 \infty az - bb$. Quæ quidem demonſtrare oportebat.

IN COMPOSITIONEM LOCORUM PLANORUM ET SOLIDORUM. PAG. 26, & ſequent.

QUicquid in primo libro reſtat, nec non in ſecundo uſque ad Locorum Planorum & Solidorum compoſitionem reperitur, intellectu ſatis facile eſt; quare ad paginam 26 & ſequentes progrediemur. Ubi primò notandum, quòd, habentes in æquatione duas quantitates indeterminatas, quarum una licèt pro arbitrio ſumatur, altera tamen per eandem æquationem inveniri poſſit, ita ipſam ordinare oporteat: ut, ſi una, puta x, ad libitum ſumatur, altera, quæ eſt y, denominationi terminorum ejus inſerviat, ſic, ut y^2 unam conſtituat æquationis partem, & altera ejus pars ordiatur à termino, in quo y ſola ſine x reperitur, quem ſequatur y cum x, & poſtea x ſine y, & tandem terminus, in quo neque x neque y reperiatur. Atque impoſſibile quidem eſt alios caſus invenire, quando quantitates indeterminatæ y & x duas tantùm dimenſiones habent: quanquam ſæpiſſimè contingat ex his terminis aliquos reperiri nihilo æquales.

Deinde obſervandum quoque eſt, ſi termini illi plures literas vel dimenſiones contineant; modò quantitates indeterminatæ y & x duas dimenſiones non excedant, facile eſſe, dividendo totam æqua-

Digitized by Google

æquationem per literas ipſi yy adhærentes, efficere, ut yy ſola unam partem æquationis conſtituat, & reliquæ alteram partem, ad inſtar fractionis, pro denominatore habentem literas, quæ antea cum yy jungebantur. Ubi nemo exiſtimare debet, fractionem pluribus dimenſionibus conſtare, quàm numero relinquuntur literæ in numeratore, poſtquam ex ipſo numerus literarum denominatoris eſt ſubductus, quemadmodum in exemplo, eâdem hujus Geometriæ paginâ propoſito, apparet.

Quod verò de dimenſionibus jam diximus, eodem ſenſu intelligendum eſt, quo antea advertimus, utile eſſe, ut ſingulis æquationis terminis æquè multæ tribuantur literæ. Nam ſicut b^2 ſignificare poteſt lineam aliquam, ſic etiam $\frac{b}{d}$, & $\frac{b}{d^2}$; quæ tamen ſic uſurpari non debent, niſi cùm linea quædam pro unitate eſt determinata: ob rationem ſupra allatam, ubi utilitatem atque commoditatem oſtendimus, quæ ſequitur, cùm ſingulis æquationis terminis æquè multæ literæ vel dimenſiones tribuuntur, etiamſi illis nil niſi lineæ aliæve res ſimiles deſignentur.

Porrò notandum eſt, quòd in hac Geometria generaliter pro uno eodémve loco vel termino habeantur illi omnes, qui eandem quantitatis, quam invenire volumus, & radicem æquationis appellamus, denominationem ſortiuntur. Nimirum, quòd omnes illi pro uno termino habeantur, in quibus reperitur y^2; & pro alio, in quibus reperitur y; & rurſus pro alio omnes, in quibus y non reperitur. Atque ita ulteriùs, ſi radix plures dimenſiones habuerit. Eſt autem hoc (ut diximus) generale; ſpeciatim verò hæc methodus requirit, ut ex termino, in quo y reperitur, duos caſus faciamus; in quorum uno y reperiatur ſine x; & in altero, ubi cum x ſit conjuncta: cum y & x duæ indeterminatæ quantitates ſint & utravis æquationis radix eſſe poſſit. Neque difficile eſt ad unum terminum reducere omnes illos, qui eodem modo ab æquationis radice denominantur. Etenim reliquis literis cognitis exiſtentibus, facile eſt, tales aſſumere, quæ ſupponantur æquales iis omnibus, quæ eandem habent radicis denominationem; vel etiam ei, quod deſignatur per fractionem, quam termini efficere ponantur. Atque hinc fit, quòd loco terminorum, ubi y reperitur ſine x, ſolummodo ponatur $2my$, quippe quod ſupponitur æquale omnibus ſimul terminis ejuſdem denominationis. Loco autem eorum

 omnium,

Digitized by Google

omnium, ubi y & x ſimul reperiuntur, (ſiquidem hæc Geometriæ Methodus poſtulat, ut x retineatur, ac nihilominùs terminus quilibet plures quàm duas dimenſiones habere non debeat,) ponitur tantùm $\frac{2n}{z}xy$, ut ſic deſignentur fractiones omnes, quæ ſimilem habent radicis denominationem. Quòd verò loco my & $\frac{n}{z}xy$ ſumatur $2my$ & $\frac{2n}{z}xy$, id tantùm in eum finem fit, ut faciliùs ad æquationis radicem perveniatur: ad quam obtinendam requiritur, ut literarum m & n ſemiſſes accipiantur. Sicut ſuperiùs vidimus pag. 6 & 7, ubi de radicum extractione, quando æquatio duas ſolùm dimenſiones habet, ſumus loquuti.

Poſtquam igitur termini, in quibus y abſque x, atque etiam in quibus y & x ſimul reperiuntur, hoc modo ad ſimpliciores reducti ſunt, extrahitur radix ex Æquatione eaque exprimitur juxta id, quod pag. 6 & 7 fuit dictum. Quemadmodum videre licet in exemplo pag. 27, ubi radix eſt

$$y \propto m - \frac{nx}{z} + \sqrt{m^2 - \frac{2mn}{z}x + \frac{n^2x^2}{z^2} + \frac{bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}}.$$

Deinde ſumenda eſt m^2 pro omnibus terminis in vinculo, in quibus x non reperitur, cujus quantitas m eadem eſt in æquatione propoſita cum ea, quæ eſt extra vinculum; ſed aliàs poteſt eſſe diverſa, quo caſu loco m extra vinculum præſtat quodammodo aliam literam aſſumere. Poſt quæ præter terminos, in quibus x abſque y reperitur, nihil reducendum reſtat. Poſſunt autem hi duobus modis ſe habere: prout nimirum habebitur vel x^2, vel x ſimpliciter. Unde fit, ut etiam, loco terminorum omnium, in quibus x ſimpliciter reperitur, ſcribendum ſit ox. Quo loco notandum quoque venit, literam o quantitatem aliquam hîc deſignare, non autem cyphram: quandoquidem æqualis eſt ac loco illorum omnium ſcribitur, quæ cum x junguntur; aliàs enim D. des Cartes eâ ordinariè ad cyphram ſeu nihil denotandum utitur: ita ut quodammodo hîc, ad confuſionem evitandam, præſtare videatur, pro o aliam quandam literam ſubſtituere. Sed hæc monuiſſe ſufficiat. Denique reducendæ ſunt etiam literæ, quæ cum x^2 junguntur, quæque nil præter fractionem deſignare poſſunt: cum x^2 duas habeat dimenſiones, hoc videlicet modo: $\frac{p}{m}x^2$. Ubi conſiderare oportet, quòd litera m fractionis $\frac{p}{m}$ eadem

quanti-

quantitas exiſtat, quæ in m^2 in vinculo. Quâ quidem methodo nulla habebitur æquatio, cujus radix ad duas tantùm dimenſiones aſcendit, quæ, prout ex illa educta eſt, non reducatur ad hanc formulam: $y \propto m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + ox + \frac{p}{m}x^2}$. Ita ut hæc ipſa quibuslibet Locis Planis & Solidis conſtruendis inſervire queat: cum omnes locos ſive terminos, qui in eorum æquationibus reperiri poſſunt, comprehendat; adeoque non niſi ſignorum + & — variationem, atque loca & terminos, qui in propoſitis æquationibus deprehendi nequeunt, conſiderare oporteat. Quæ quidem omnia à D. des Cartes ſunt animadverſa. Nos verò ea duntaxat, quæ difficultatem aliquam afferre poſſent, illuſtrare conabimur.

OBSERVATIO PRIMA.

POſtquam æquatio ad ſupradictam formulam eſt reducta, & illa, ſive æquè multos, ſive pauciores terminos habens, etiam fractionibus numericis eſt affecta: ut, exempli gratiâ, ſi loco $\frac{n}{z}x$ habeatur $\frac{3}{4}x$, poteſt operatio inſtitui per haſce fractiones, ſupponendo, numeratorem 3 eſſe æqualem numeratori n, & denominatorem 4 æqualem denominatori z. Idem intellige de aliis fractionibus numericis, quæ æquales ſunt, & ad literas ſuperioris formulæ referuntur. Unde cùm habetur fractio denotata hoc pacto $x\sqrt{\frac{3}{4}}$ loco $\frac{n}{z}x$; erit litera n æqualis $\sqrt{3}$, & z æqualis $\sqrt{4}$, atque ita de aliis. Eſt autem bene obſervandum, quod diximus: nimirum, ſi in æquatione reperiatur m^2, denominatorem m fractionis $\frac{p}{m}x^2$ tum eſſe æqualem ipſi m quantitatis m^2. id quod facile eſt, etiamſi alia fractio haberetur, modò ſupponamus, m eſſe ad p, ſicut denominator hujus fractionis ad ſuum numeratorem: quandoquidem hoc modo fractiones fiunt æquales. Quòd ſi autem id per numeros fieri non poſſit, operandum erit per literas, quod ſæpe eſt commodiſſimum. Porrò obſervandum eſt, quòd ex terminis, qui inveniendis, centro, lateri recto, & tranſverſo inſerviunt, non aliæ literæ uſurpandæ ſint, quàm quæ in æquatione reperiuntur; & quòd reliquæ literæ eorundem termi-

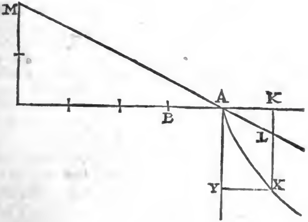
terminorum non magis ſint conſiderandæ, quàm ſi non haberentur. Cujus ratio eſt, quòd D. des Cartes, ut univerſaliter hæc tractaret, terminos hoſce ejuſmodi conſtitutionis effecerit, in qua loca omnia forent repleta. Adeoque literæ locorum, quæ in propoſita æquatione non reperiuntur, non annumerandæ ſunt terminis, qui centris, lateribus rectis, & tranſverſis exprimendis inſerviunt.

OBSERVATIO SECUNDA.

PAg. 27. caſus, cùm in æquatione non habetur m, difficultatem afferre poſſet, quare ad illum intelligendum cogitandum eſt, quòd, quando in æquatione non habetur m, ducenda itidem non ſit linea IK in figura ejuſdem paginæ. Ac proinde, ut inveniatur LI, poſtquam habetur $\frac{n}{z}x$, non referenda eſt illa ad IK, ſed ad AB, eodem modo, quo D. des Cartes ipſam comparat ipſi IK. Quandoquidem facere oportet, ut AB ſit ad BL, ſicut z ad n, hoc eſt, ut AB exiſtente x, BL ſit $\frac{n}{z}x$, atque ut punctum L cadat ex parte puncti C, ſi habeatur $-\frac{n}{z}x$; at ex altera parte verſùs R, ſi reperiatur $+\frac{n}{z}x$. Quo facto, ducenda eſt linea AL, per puncta A & L, quæ eadem erit quæ LI, hoc eſt, eodem munere fungetur, quo LI in exemplo D^ni des Cartes. Et quidem cognita erit linea AL, cum lineæ AB, BL, anguluſque ABL cognoſcantur. Atque ita pro AL accipere poſſumus $\frac{a}{z}x$; eritque a nota.

Sed rem fortaſſis planiùs per exemplum aliquod explicabimus. Sit, in expoſita figura, recta linea AY, curva autem AX, cujus vertex punctum A, cujuſque hæc ſit proprietas: ut, aſſumpto in ea quolibet puncto, ut X, à quo ad rectam AY normaliter ducatur XY, ſumptâque utcunque rectâ AB, hæc ipſa unà cum linea AY ſit ad lineam AY, ſicut linea AY ad lineam XY.

Eſto AB ∞ b, AY ∞ y, & AK æqualis ac parallela ipſi XY ∞ x. Hinc cum $b+y$ ſit ad y, ſicut y ad x, erit $yy \infty xy+xb$, & $y \infty \frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+xb}$. Unde ex iis, quæ habentur pag. 29. conſtat, lineam hanc eſſe Hyperbolam, eò quòd habetur $+\frac{1}{4}x^2$. Ad quam conſtruendam, cum AK ſit x, linea KL erit $\frac{1}{2}x$, quan-



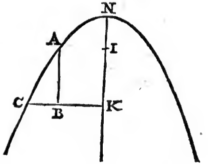
quandoquidem hæc fractio æqualis eſt ac ipſi $\frac{n}{z}x$ reſpondet. Porrò, quoniam rectus eſt angulus AKL, erit quadratum ex AL æquale quadratis ex AK & KL ſimul ſumptis. Hinc cum quadratum ex AK ſit x^2, & quadratum ex KL $\frac{1}{4}x^2$, AL erit $\sqrt{\frac{5}{4}x^2}$ ſeu $x\sqrt{\frac{5}{4}}$; id quod æquale ſupponimus ipſi $\frac{a}{z}x$, at $\frac{1}{4}x^2$ ipſi $\frac{p}{m}x^2$: ita ut $\sqrt{5}$ ſit a, & $\sqrt{4}$ ſit z, & 1 ſit p, & 4 ſit m. Quibus poſitis, terminus $\frac{aom}{2pz}$, qui inveniendo centro inſervit, erit $\sqrt{\frac{80}{16}bb}$, cum am, hoc eſt, $4\sqrt{5}$, valeat $\sqrt{80}$; & $2pz$, hoc eſt, $2\sqrt{4}p$, valeat $\sqrt{16}$; & o ſit æqualis ipſi b; & $b\sqrt{\frac{80}{16}}$ valeat $\sqrt{\frac{80}{16}bb}$, hoc eſt, $\sqrt{5bb}$. Quod quidem centrum ſumendum eſt à puncto A versùs M, quandoquidem Hyperbola eſt, & habetur $+bx$, hoc eſt, $+ox$, juxta pag. 30. Latus rectum hìc eſt $\frac{oz}{a}$, hoc eſt, $b\sqrt{\frac{4}{5}}$ ſeu $\sqrt{\frac{4}{5}bb}$. Unde latus tranſverſum ſit $\frac{aom}{pz}$: quoniam oportet, ut pz^2 ſit ad a^2m, ſicut $\frac{oz}{a}$ ad latus tranſverſum, quod idcirco, (ut diximus,) erit $\frac{aom}{pz}$. id quod facit $b\sqrt{\frac{80}{4}}$, hoc eſt, $\sqrt{20bb}$. Ac

proinde

proinde cum diſtantia puncti A à centro ſit $\sqrt{5\,bb}$, quæ ſemiſſis eſt lateris tranſverſi (quoniam, cùm duorum quadratorum unum alterius eſt quadruplum, latus tantùm lateris ſit duplum); manifeſtum eſt, punctum A verticem fore diametri AL. Ideoque ſi fiat MA $\infty \sqrt{20bb}$, erit ipſa latus tranſverſum, & latus rectum erit, (ut diximus,) $\sqrt{\frac{4}{5}bb}$. Quorum demonſtratio facilis eſt. Nam per prop. 21. lib. 1mi Conicorum Apollonii, ut latus tranſverſum MA $\infty \sqrt{20bb}$ eſt ad latus rectum $\sqrt{\frac{4}{5}bb}$, ita eſt rectangulum MLA ad quadratum ex LX. Eſt autem AL $\infty \sqrt{\frac{5}{4}x^2}$. Hinc ſi multiplicetur $\sqrt{20\,bb} + \sqrt{\frac{5}{4}x^2}$ per $\sqrt{\frac{5}{4}x^2}$, habebitur rectangulum MLA, quod proinde erit $\sqrt{\frac{100}{4}bbx^2} + \sqrt{\frac{25}{16}x^4}$. Multiplicando verò id ipſum per latus rectum $\sqrt{\frac{4}{5}bb}$, exſurgit $\sqrt{\frac{400}{20}b^4x^2} + \sqrt{\frac{100}{80}bbx^4}$, quod diviſum per latus tranſverſum $\sqrt{20\,bb}$, exhibet $\sqrt{bbx^2} + \sqrt{\frac{100}{1600}x^4}$, hoc eſt, $\sqrt{bbx^2} + \sqrt{\frac{1}{16}x^4}$, ſeu $bx + \frac{1}{4}x^2$, pro quadrato ex LX, unde ipſa LX ſit $\sqrt{bx + \frac{1}{4}x^2}$. Jam ſi ad lineam LX addatur linea LK $\infty \frac{1}{2}x$, obtinebitur linea XK, hoc eſt, $y \infty \frac{1}{2}x + \sqrt{bx + \frac{1}{4}x^2}$, ac per conſequens $\sqrt{bx + \frac{1}{4}x^2} \infty y - \frac{1}{2}x$. Unde ductâ utrâque æqualitatis parte in ſe, fiet $bx + \frac{1}{4}x^2 \infty yy - xy + \frac{1}{4}x^2$, ſeu $yy \infty bx + xy$. Hinc ut $b + y$ ſe habet ad y, ita y ſe habebit ad x. Quod erat demonſtrandum.

Proponatur adhuc aliud exemplum, referens eum caſum in quo non reperiatur $\frac{n}{z}x$ in æquatione. Habeamus itaque æquationem hanc $yy \infty -2dy + bx$, cujus radix eſt $y \infty -d + \sqrt{d^2 + bx}$, quam conſtruere oporteat. Supponatur in figura ſequente AB $\infty\ x$, & angulus ABC ad libitum, BC autem, indefinitè continuata versùs B, $\infty\ y$; fiatque BK $\infty\ d$, quæ hîc idem præſtat quod m in ſuperiori formula, quoniam habetur $-d$. Ductâ autem NK indefinitè parallelâ ipſi AB, ſumatur KI æqualis AB, prout oſtenſum fuit pag. 27 & 28. Quo facto, relinquetur tantùm $\sqrt{d^2 + bx}$, & pagina ſequens docet lineam quæſitam eſſe Parabolam, quoniam non habetur x^2. Præterea puncto N exiſtente vertice, linea IN eſſe debet $\frac{am^2}{oz}$, hoc eſt, $\frac{d^2}{b}$, in hoc exemplo. Terminus denique, qui explicat latus rectum, erit $\frac{oz}{a}$, idem

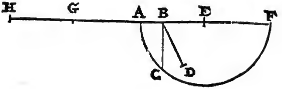
Digitized by Google



idem hic exiſtens quod b, & ſit KC ordinatim adplicata ad diametrum. Quorum demonſtratio nec difficilis. Nam, ſecundùm 11 prop. 1mi Libri Conicorum Apollonii, rectangulum comprehenſum ſub latere recto b & linea NK ∞ $\frac{d^2}{b} + x$, utpote, $dd + bx$, eſt æquale quadrato lineæ KC. Eſt verò linea KC æqualis ipſis BC ∞ y, & BK ∞ d, ſimul ſumptis. Erit itaque linea KC ∞ $y + d$, & quadratum ejus ∞ $yy + 2dy + dd$. Ac proinde $yy + {}^{2}dy + dd \infty dd + bx$, & per conſequens $yy \infty -{}^{2}dy + bx$. Quod demonſtrare oportebat.

OBSERVATIO TERTIA.

Paginâ 29, circa medium, dictum eſt, lineam quæſitam eſſe Circulum, cùm $aam \infty pz^2$, & cùm angulus eſt rectus. Verùm hoc intelligendum etiam eſt, cùm angulus eſt rectus, nec omnino habetur aam, nec pz^2: aut cùm in æquatione literæ unius termini æquales ſunt literis termini alterius. Ad pleniorem autem horum intellectum ſequentia conſtruamus exempla.



Habeatur æquatio $yy \infty bx - x^2$, cujus radix eſt $y \infty \sqrt{bx - x^2}$, & ſupponatur in appoſita figura linea HA ∞ b, linea AB ∞ x, &

Q linea

linea BC vel BD ∞ y. Manifeſtum autem eſt, lineam conſtruendam eſſe Ellipſin aut Circulum, quoniam habetur $-x^2$. Non reperitur autem m, aut $\frac{n}{z}x$. Et ſufficit pro x ſumere AB, atque centrum ab A versùs B, cùm habeatur $+ox$, hoc eſt, in hoc exemplo, $+bx$. Ita ut pro illo ſumendum ſit $\frac{aom}{2pz}$, hoc eſt, b diviſum per 2, ſeu $\frac{1}{2}b$, cum non habeatur a, neque m, neque p, neque z. Latus autem rectum ſit $\frac{oz}{a}$, hoc eſt, b; tranſverſum verò $\frac{aom}{pz}$, hoc eſt, b; & tum conſiderare tantùm oportet, utrum angulus ABC an verò ABD ſit rectus. Nam cum hîc non habeatur aam, nec pz^2, exiſtente angulo (puta ABC) recto, linea quæſita erit Circulus; at verò obliquo exiſtente (ut ABD) erit linea quæſita Ellipſis. Quapropter ſi utroque caſu faciamus AE ∞ $\frac{1}{2}b$, erit punctum E centrum, & AF ∞ b latus tranſverſum; latus autem rectum ∞ b, atque BC vel BD ∞ y ordinatim adplicata ad diametrum AF. Quorum demonſtratio facilis eſt. Etenim quoniam utroque caſu juxta 21mam propnem 1mi libri Conicorum Apollonii latus tranſverſum b eſt ad latus rectum b, ſicut rectangulum FBA ad quadratum ex BC vel BD: erit rectangulum FBA æquale quadrato ex BC vel BD. Hinc cum FB ſit ∞ $b-x$, & AB ∞ x, erit dictum rectangulum, hoc eſt, $bx - x^2$, æquale quadrato ex BC vel BD, hoc eſt, erit $yy \infty bx - x^2$. Quod erat demonſtrandum.

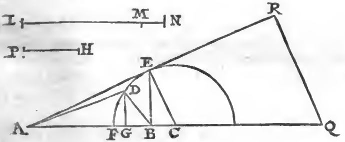
Quòd ſi æquatio haberetur $yy \infty bx + x^2$, quæſita linea eſſet Hyperbole: & ſi vel BC, vel BD ſumatur pro y, hoc eſt, ſive angulus ſit rectus, ſive obliquus; erit conſtructio præcedenti omnino ſimilis; niſi quòd centrum & latus tranſverſum ſit ſumendum à puncto A versùs alteram partem, nempe versùs H. Atque ita faciendo AG ∞ $\frac{1}{2}b$, fiet punctum G centrum, eritque tam latus tranſverſum, quàm rectum ∞ b. Demonſtratio præcedenti erit ſimilis, obſervatis tantùm ſignis + & —.

OBSERVATIO QUARTA.

ANimadvertendum præterea eſt, ſi in æquatione non habeatur fractio ipſi x^2 adhærens, & nihilominus tamen adſit m^2, hoc eſt, habeatur, verbi gratiâ, $\sqrt{m^2 + ox - x^2}$ loco $\frac{p}{m}x^2$: quòd

quòd tum quidem fractio, (ut ſupra notavimus) ſi alia quàm $\frac{p}{m}$ fuerit, tranſmutanda ſit in fractionem ubi habeatur $\frac{p}{m}$. ſupponendo ſcilicet m eſſe ad p, ſicut denominator alterius fractionis ad ejuſdem numeratorem: quoniam in hac Methodo requiritur, ut m ipſius m^2 ſit denominator fractionis ipſi x^2 adhærentis. Ubi quidem, in caſu, quo haberi ponimus m^2, non autem fractionem, quæ ipſi x^2 adhæreat, ſupponere oportet $p \infty m$, ita ut habeamus $\frac{p}{m} x^2$ non alius valoris quàm x^2. Quod cognoſcendis centris, lateribuſque rectis atque tranſverſis inſervire poterit.

Ad pleniorem verò intellectum, detur in ſequente figurâ linea AB, & puncta in ea A & B; oporteatque invenire punctum,



ut D, à quo ſi ducantur lineæ AD, DB, ut ipſæ datam inter ſe obtineant rationem, hoc eſt, ut AD ſit ad DB, ſicut linea PH ad lineam MN; quarum quidem PH ſit major quàm MN.

Demittatur à puncto D ſuper AB perpendicularis DG, & ſupponatur AB ∞ b, AG ∞ x, GD ∞ y, MN ∞ f. Quoniam igitur rectus eſt angulus AGD, erit quadratum ex AD æquale quadratis ex AG, GD, ſimul ſumptis, hoc eſt, ∞ $x^2 + yy$. Eodem modo, cum GB ſit $b - x$, erit quadratum ex DB æquale quadratis ex BG, GD, hoc eſt, ∞ $yy + bb - 2bx + x^2$. Jam verò, cum AD ſit ad DB, ſicut PH ad MN, erit quoque quadratum ex AD ad quadratum ex DB, ſicut quadratum ex PH ad quadratum ex MN. Porrò fiat, ut PH ad MN, ſic LN ad PH,

 erit-

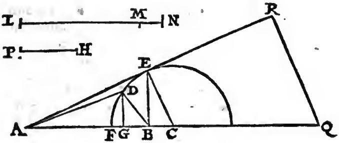
Digitized by Google

eritque LN ad MN, ut quadratum à PH ad quadratum ab MN. Hinc ſi LN vocetur c; erit c ad f, ſicut quadratum à PH ad quadratum ab MN, hoc eſt, ut quadratum ex AD $\infty\ x^2 + yy$ ad quadratum ex DB $\infty\ yy + bb - 2bx + x^2$. Ac proinde productum extremorum erit æquale producto mediorum, hoc eſt, $fx^2 + fyy \infty\ cyy + cbb - 2cbx + cx^2$, & per conſequens, $cyy - fyy \infty - cbb + 2cbx - cx^2 + fx^2$, ac denuo $yy \infty \frac{-cb^2 + 2cbx - cx^2 + fx^2}{c-f}$, & tandem $y \infty \sqrt{\frac{-cb^2 + 2cbx - cx^2 + fx^2}{c-f}}$.

Ad abbreviandum autem hunc terminum $\frac{-cx^2 + fx^2}{c-f}$; licèt conſideremus, quòd $f - c$ & $c - f$ exprimant ſemper unam eandemque differentiam, quippe quæ eſt inter c & f, etiamſi c major ſit quàm f (dum in operatione ſupponimus $h \infty\ c - f$); ſemper tamen habebimus $\frac{-cx^2 + fx^2}{c-f} \infty \frac{-hx^2}{h}$, hoc eſt x^2 ſimpliciter; adeò ut relinquatur $y \infty \sqrt{\frac{-cb^2 + 2cbx}{c-f} - x^2}$. Id quod nos docet, locum eſſe Planum, eumque Circulum exiſtere: cum habeatur $-x^2$, anguluſque AGD ſit rectus, & $aam \infty\ pz^2$; neque enim hic habetur a, neque z; atque m ipſi p æqualis ſupponitur; cum nulla ipſi x^2 fractio adhæreat. Quibus ita conſtitutis Circulum hoc modo inveniemus.

Terminus, qui centrum nobis exhibere debet, eſt $\frac{aom}{2pz}$, ex quo nobis præter $\frac{o}{2}$ nihil inſervit: cum m ipſi p ſit æqualis; hoc eſt, pro eo tantùm habebimus $\frac{cb}{c-f}$. Ac idcirco, poſtquam linea LM æquatur $c - f$, ſi fiat ut linea LM $\infty\ c - f$ ad lineam LN $\infty\ c$, ita linea AB $\infty\ b$ ad lineam AC, erit linea AC $\infty \frac{cb}{c-f}$, & punctum C centrum Circuli. Sumendum autem id erit ab A verſùs B, quoniam habetur $+\frac{2cbx}{c-f}$, reſpondens ipſi ox. Præterea, quoniam in Circulo latus rectum & tranſverſum ſibi invicem ſunt æqualia, alterutro tantùm erit opùs. Formula autem lateris recti hîc eſt $\sqrt{\frac{o^2z^2}{a^2} - \frac{4mpz^2}{a^2}}$. Unde quidem illud, quod nobis in hoc exemplo inſervit, non aliud erit quàm $\sqrt{oo - 4m^2}$, hoc eſt, quòd,

quòd, auferendo quadratum $\frac{4cbz}{c-f}$ à quadrato ex $\frac{2cb}{c-f}$, relinquatur quadratum lateris recti. Eſt autem paulò ante inventa linea



A C ∞ $\frac{cb}{c-f}$; ideoque ejus dupla A Q ∞ $\frac{2cb}{c-f}$. Hinc invenire adhuc oportet $\frac{4cbz}{c-f}$, quod repræſentatur per $4\,m^2$. Invenitur autem; ponendo eſſe, ut $c-f$ ad c, ita bb ad $\frac{cbz}{c-f}$, at ut $c-f$ eſt ad c, ſic AB ∞ b eſt ad A C. Quapropter erit ut b ad lineam A C, ſic bb ad $\frac{cbz}{c-f}$. Quoniam autem ratio duorum quadratorum ad invicem duplicata eſt rationis, quam inter ſe habent ipſorum latera: hinc, ſi ponamus lineam AE mediam proportionalem inter b & lineam AC; erit b ad lineam AE, ſicut b ad $\sqrt{\frac{cbz}{c-f}}$. & per conſequens linea AE ∞ $\sqrt{\frac{cbz}{c-f}}$. Unde ſi AR fiat dupla ipſius AE, erit ea æqualis $\sqrt{\frac{4cbz}{c-f}}$. Adeoque ſi conſtituamus triangulum ARQ, cujus latus AQ ſit æquale $\frac{2cb}{c-f}$ (ut dictum eſt), cujuſque angulus ARQ ſit rectus; erit latus RQ ∞ $\sqrt{o^2-4m^2}$: quandoquidem quadratum ejus æquatur quadrato lineæ $\frac{2cb}{c-f}$, minus quadrato $\frac{4cbz}{c-f}$. Atque ita RQ ſit & latus rectum & diameter Circuli. Et ſi ex centro C ducatur linea CE parallela ipſi

Digitized by Google

RQ, erit ipſa æqualis radio Circuli, utpote æqualis ſemiſſi lineæ RQ.

Et hæc quidem quantum ad conſtructionem juxta hanc Methodum, quæ, poſtquam jam eſt inventa, brevior reddi poteſt. Nam cum angulus AEC ſit rectus, & AE media proportionalis inter AC & AB, ſimilia erunt triangula AEC, ABE, & EBC; ac proinde AC ad CE, ut CE ad CB. Ut autem AB eſt ad AC, ita eſt LM ad LN. Quare per converſionem rationis erit AC ad BC, ut LN ad NM. At verò ut ratio AC ad CB duplicata eſt rationis AC ad CE (propterea quòd CE media eſt proportionalis inter AC & CB), ita etiam, cum linea PH media ſit proportionalis inter LN & NM (per conſtructionem): erit ratio LN ad NM, hoc eſt, AC ad CB, duplicata rationis LN ad PH. Quapropter erit ut LN ad PH, ſeu PH ad MN, ita AC ad CE; quæ quidem Circuli radius eſt. Demonſtratio hujus conſtructionis ad imitationem præcedentium inveniri poteſt, quam hic omittimus; cum illa ab Eutocio initio commentariorum ejus in Apollonii Conica ſit oſtenſa.

OBSERVATIO QUINTA.

PAg. 21 hujus Geometriæ dictum eſt: quòd, poſtquam hæc æquatio non aſcendit ultra rectangulum duarum quantitatum indeterminatarum, aut etiam ultra quadratum unius ex illis, linea curva ſemper ſit primi & ſimpliciſſimi generis, ſub quo tantùm Circulus, Parabola, Hyperbola, & Ellipſis ſunt comprehenſæ. Quod ita intelligendum eſt, duas quantitates indeterminatas x & y, cùm ſeparatim in Æquationis terminis reperiuntur, non ultra ſua quadrata aſcendere debere; ſed in terminis, ubi ſimul reperiuntur, ſingulas non niſi unam dimenſionem habere debere, ita ut ſimul tantùm rectangulum aliquod duáſve dimenſiones efficiant.

Similiter, ſi in Æquatione reperiretur terminus aliquis, in quo haberetur y^3, vel x^3; aut y^4, vel x^4; aut denique xy^2, vel x^2y, vel x^2yy: linea curva eſſet ſecundi generis. Et ſic de cæteris. In quibus omnibus ſolùm indeterminatarum quantitatum ratio habenda eſt, non autem quantitatum cognitarum, quibuſcum junguntur.

Quòd

Quòd ſi quantitates indeterminatæ ſingulæ ſeparatim ad duas dimenſiones non aſcendant, neque etiam ſimul, hoc eſt, ſi nullus terminorum ad yy, aut ad xy aſſurgat; linea itidem erit primi generis, & quidem recta, non curva: adeoque locus talem æquationem præbens Planus erit, & ad lineam rectam.

Et quidem, cùm locus eſt ad rectam lineam, Geometria hæc non minùs ipſum componere docet, quàm cùm locus eſt ad curvam lineam, quæ ſit primi generis, & cùm in æquatione habetur yy: ſicut ubique in æquatione hujus Geometriæ pro Pappi quæſtione, ex qua ſuperior formula deducta fuit, cernere licet. Quòd ſi verò habeatur x^2 in æquatione, non autem yy, immutanda tantùm erunt nomina quantitatum indeterminatarum, ita ut appelletur y, quæ dicta fuit x, & x, quæ dicta fuit y: in hunc modum. Eſto in ſequenti figura $AB \infty x$, & $BC \infty y$, atque æquatio inventa $x^2 \infty by$, quam ad dictam formulam reducere oportet.



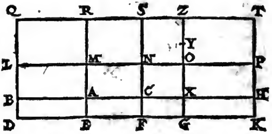
Ducta igitur AD parallelâ ipſi BC, & DC parallelâ ipſi AB, mutatiſque nominibus quantitatum indeterminatarum, nimirum appellando AD, cui æqualis eſt BC, x, & DC, quæ æqualis eſt AB, y; quæſita æquatio erit $yy \infty bx$, cujus radix eſt $y \infty \sqrt{bx}$. Atque ita reducta erit ad formulam, quæ nos docet punctum C fore in Parabola.

At verò ſi in æquatione non habeatur x^2, nec yy, ſed xy; qui quidem caſus, quoniam nec in æquatione quæſtionis Pappi reperitur, neque ad formulam ex ea deductam refertur; difficultatem aliquam afferre poſſet, quam propterea enodabimus.

Æquatio autem hæc ad ſummum plures quàm quatuor terminos non comprehendit: unum nimirum, ubi x reperitur ſine y; alterum, ubi y reperitur ſine x; tertium, ubi reperitur xy; ac quartum denique, ubi neque x neque y reperitur. Adeò ut varietas omnis reducatur ad 17 formulas æquationum ac conſtructionum, quæ ſequenti pag. 129 exhibentur. Quarum quidem ope videre licet, quonam pacto locus ſemper ad Hyperbolam exiſtat, lineæque indeterminatæ ſint Aſymptoti, aut ipſis parallelæ.

Detur enim poſitione linea BH, punctum autem in ea datum ſit A: deinde aſſumptâ lineâ AX pro x, ductâque lineâ XY, quam pro y ſumemus, facientem cum AX talem angulum, qualem

Digitized by Google



lem libuerit, eâque indefinitè productâ: ducantur lineæ DK, LP, QT parallelæ ipſi BH; ita ut DK cadat infra BH; LP autem ſupra BH, inter puncta X & Y; QT verò ultra punctum Y. Eodem modo ducantur lineæ QD, RAE, SF, TK parallelæ ipſi XY ſeu ZG; ita ut linea QD tranſeat per lineam XA, productam versùs A; & SF per eandem inter puncta A & X; nec non linea TK per eandem AX, productam versùs X. Quibus ita conſtitutis, ſi per 4tam Propnem 2di libri Conicorum Apollonii deſcribatur Hyperbola, quæ tranſeat per punctum Y, cujuſque Aſymptoti ſint lineæ, quas refert quælibet conſtructio; manifeſtum eſt, per 12 Propnem ejuſdem libri rectangula omnia, quæ ad eaſdem lineas ſimiliter ſumuntur, ſibi invicem eſſe æqualia. Ideoque demonſtrandum ſolùm reſtat, Aſymptotos, atque rectangulum uniuſcujuſque æquationis, ritè eſſe conſtructa.

Eſto igitur ſecundùm ultimam æquationem Hyperbola conſtructa, tranſiens per punctum Y, cujuſque Aſymptoti ſint DQ, & DG; & rectangulum, contentum ſub lineis DG, GY, ſit æquale rectangulo dato $df + bc$. Hinc ſi juxta conſtructionem fecerimus lineas AX ∞ x, XY ∞ y, AB ∞ c, BD vel XG ∞ b: manifeſtum eſt, BX vel DG fore $x + c$; GY autem $y + b$; atque multiplicando unam per alteram proditurum $bc + bx + cy + xy$, pro rectangulo linearum DG, GY, quod aliunde quoque æquatur $df + bc$. Ac proinde, ſi utrinque commune auferatur rectangulum bc, relinquetur $xy + cy + bx$ ∞ df. quæ eſt æquatio propoſita. Eodem modo reliquarum omnium æquationum & conſtructionum demonſtratio oſtendetur.

Æqua-

Digitized by Google

Æquatio 1ma.
$xy \propto df$.

Conſtructio.
Rectangulum $AXY \propto df$.
Aſymptoti XA, AR.

Æquatio 2.
$xy + cy \propto bx$.
Conſtr.
$AB \propto c$, $BQ \propto b$.
Aſympt. BQ, QZ.
Rectang. $QZY \propto bc$.

Æquat. 3.
$xy + bx \propto cy$.
Conſtr.
$AH \propto c$, $HK \propto b$.
Aſympt. EK, KT.
Rectang. $KGY \propto bc$.

Æquat. 4.
$xy - cy \propto bx$.
Conſtr.
$AC \propto c$, $CN \propto b$.
Aſympt. SN, NO.
Rectang. $NOY \propto bc$.

Æquat. 5.
$xy + cy \propto df$.
Conſtr.
$AB \propto c$.
Aſympt. QB, BX.
Rectang. $BXY \propto df$.

Æquat. 6.
$xy + bx \propto df$.
Conſtr.
$AE \propto b$.
Aſympt. RE, EG.
Rectang. $EGY \propto df$.

Æquat. 7.
$xy - cy \propto df$.
Conſtr.
$AC \propto c$.
Aſympt. SC, CX.
Rectang. $CXY \propto df$.

Æquat. 8.
$xy - bx \propto df$.
Conſtr.
$AM \propto b$.
Aſympt. RM, MO.
Rectang. $MOY \propto df$.

Æquat. 9.
$xy + df \propto cy$.
Conſtr.
$AH \propto c$.
Aſympt. AH, HT.
Rectang. $HXY \propto df$.

Æquat. 10.
$xy + df \propto bx$.
Conſtr.
$AR \propto b$.
Aſympt. AR, RZ.
Rectang. $RZY \propto df$.

Æquat. 11.
$xy + cy - bx - df \propto o$.
Conſtr quando df excedit bc.
$AB \propto c$, $BL \propto b$.
Aſympt. QL, LO.
Rectang. $LOY \propto df - bc$.
Conſtr. cùm bc excedit df.
$AB \propto c$, $BQ \propto b$.
Aſympt. BQ, QZ.
Rectang. $QZY \propto bc - df$.

Æquat. 12.
$xy + bx - cy - df \propto o$.
Conſtr. quando rectang. df majus eſt rectangulo bc.
$AC \propto c$, $CF \propto b$.
Aſympt. SF, FG.
Rectang. $FGY \propto df - bc$.
Conſtr. quando bc rectang. excedit rectang. df.
$AH \propto c$, $HK \propto b$.
Aſympt. EK, KT.
Rectang. $KGY \propto bc - df$.

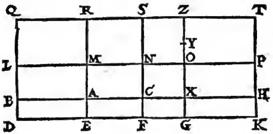
Æquatio 13.
$xy - cy - bx - df \propto o$.
Conſtr.
$AC \propto c$, $CN \propto b$.
Aſympt. SN, NO.
Rectang. $NOY \propto df + bc$

Æquat. 14.
$xy + cy - bx + df \propto o$.
Conſtr.
$AB \propto c$, $BQ \propto b$.
Aſympt BQ, QZ.
Rectang. $QZY \propto df + bc$.

Æquat. 15.
$xy + bx - cy + df \propto o$.
Conſtr.
$AH \propto c$, $HK \propto b$.
Aſympt. EK, KT.
Rectang. $KGY \propto df + bc$.

Æquat. 16.
$xy - cy - bx + df \propto o$.
Conſtr. quando df ſuperat bc.
$AH \propto c$, $HP \propto b$.
Aſympt. MP, PT.
Rectang. $POY \propto df - bc$.
Conſtr. cùm bc ſuperat df.
$AH \propto c$, $HT \propto b$.
Aſympt. HT, TQ.
Rectang. $TZY \propto bc - df$.

Æquat. 17ma & ultima.
$xy + cy + bx - df \propto o$.
Conſtr.
$AB \propto c$, $BD \propto b$.
Aſympt. QD, DG.
Rectang. $DGY \propto df + bc$.



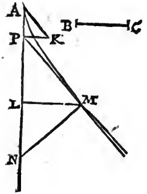
Præterea evidens eſt, in 11ma, 12ma, & 16ta æquatione exiſtente rectangulo df æquali bc, ſi hoc ipſum in locum df ſubſtituatur, undecimam quidem tunc fore diviſibilem per $x + c$, duodecimam per $y + b$, & decimam ſextam per $c - x$; Utramque autem 11^{mam} & 16^{tam} poſſe reduci ad $y \propto b$; aſt 12^{mam} ad $x \propto c$ Adeò ut tunc tantùm locum ad lineam rectam exhibeant, quando habetur $y \propto b$, & XY ipſi b fit æqualis, atque per punctum Y recta linea ducitur ipſi AX parallela, ut habeatur quæſita; Aut quando habetur $x \propto c$, & XA ipſi c fit æqualis, erit parallela AR linea recta quæſita.

Cæterùm potuimus quidem æquationum harum varietatem ad minorem numerum reducere, tranſmutando nempe unam indeterminatarum quantitatum in alteram (ſicut in eum finem illas, quæ mutationem hanc recipere poſſunt, ordine diſpoſuimus); tum etiam conſtructiones illarum, in quibus quatuor termini non reperiuntur, comprehendere ſub iis, quæ omnes habent completos: ſed quoniam multò prolixiori indiguiſſemus ſermone, & res ipſa minùs fuiſſet dilucida, ratione oſtensâ uti maluimus.

AD PAGINAM 40 ET SEQUENTES, DE MODO INVENIENDI CONTINGENTES LINEARUM CURVARUM.

NOtandum hîc eſt, modum inveniendi tangentes linearum curvarum, hoc loco expoſitum, conſiſtere in invenienda æquatione, in quâ linea y vocata ſumi poteſt pro duabus quantitatibus diverſis, cùm linea quæ vocatur v ad tangentem non refertur,

fertur, at verò cùm ad ipſam refertur, quòd tunc duæ illæ quantitates diverſæ intelligantur æquales ſeu in unam cöaleſcere. Quod fit comparando æquationem inventam cum æquatione $yy - 2ey + ee \infty 0$, aliâve ex hac compoſitâ. Ejus rei proponamus ſequens exemplum.



Eſto linea recta A N, curva autem A M, cujus vertex punctum A, cujuſque hæc ſit proprietas: ut, aſſumpto in ea quolibet puncto, ut M, à quo ad rectam A N ducatur perpendicularis M L, recta B C, ad arbitrium ſumpta, unà cum A L, ſit ad A L, ſicut linea A L ad L M. Oportet rectam lineam invenire P M, tangentem hanc curvam A M in puncto M. Supponatur linea N M perpendicularis ad tangentem P M in puncto M, & B C ∞b, A L ∞y, & L M ∞x. Hinc cum $b + y$ ſit ad y, ut y ad x, fiet æquatio talis: $bx + yx \infty yy$, ac proinde $x \infty \frac{y^2}{b+y}$. Jam verò, pro eo, quòd in hoc exemplo imaginamur curvam A M tangi à circulo cujus radius M N, ſatiùs eſt imaginari, quòd ipſa tangatur à recta linea M P: quandoquidem hoc modo ſuperfluam multiplicationem evitamus. Quocirca ſtatuendo A P ∞v, & P K ∞s eſſe parallelam ipſi L M, atque ab A K, quæ parallela eſt ipſi P M, ſecari in K: erit ut v ad s, ſic $y - v$ ad L M ſeu $\frac{ys - vs}{v}$. Quæ quidem cum ſupra inventa ſit $\infty \frac{y^2}{b+y}$, habebitur $\frac{yy}{b+y} \infty \frac{ys - vs}{v}$, vel $yy \infty \overline{\frac{bs - vs}{v - s}}$ in $y - \frac{bvs}{v-s}$, comparandum cum $yy \infty 2ey - e^2$. Unde primò invenimus $\frac{bs - vs}{v - s} \infty 2e$, vel $s \infty \frac{2ev}{b - v + 2e}$. Deinde $\frac{bvs}{v-s} \infty e^2$, vel $s \infty \frac{e^2 v}{bv + e^2}$, ac per conſequens $\frac{2ev}{b - v + 2e} \infty \frac{e^2 v}{bv + e^2}$. Hoc eſt, A P $\infty v \infty \frac{be}{2b + e}$ ſeu $\frac{by}{2b+y}$, & P L $\infty y - v \infty \frac{by + y^2}{2b + y}$. Cæterùm quoniam L M media

eſt

eſt proportionalis inter PL & LN, erit LN $\propto \frac{2by3+y4}{b3+3b^2y+3by^2+y3}$. Quod erat faciendum. Vel etiam ſic, imaginando curvam AM tangi à circulo, cujus radius eſt MN. Omnino ut in hujus Geometriæ Methodo ſupponitur factum.

Igitur quoniam habemus $\frac{y^2}{y+b} \propto x$, ac proinde $x^2 \propto \frac{y4}{y^2+{}^2by+b^2}$, ſupponamus, quemadmodum hæc Geometria requirit, AN $\propto v$, & MN $\propto s$, & erit quadratum ex LM, hoc eſt, x^2, $\propto ss-vv+2vy-yy$, ac idcirco $\frac{y4}{y^2+{}^2by+b^2} \propto ss-vv+{}^2vy-yy$. Unde æquatione ope multiplicationis ordinatâ, diviſâque totâ ſummâ per 2, exurget æquatio talis:

$$\begin{array}{llllll} y^4 & +by^3 & +\frac{1}{2}vvyy & +bvvy & +\frac{1}{2}bbvv & \propto 0. \\ & -v & +\frac{1}{2}bb & -bbv & -\frac{1}{2}bbss & \\ & & -2bv & -bss & & \\ & & -\frac{1}{2}ss & & & \end{array}$$

Jam verò multiplicando $yy-{}^2ey+ee \propto 0$ per $yy+fy+gg$, ut alteri reddatur ſimilis, proveniet hæc æquatio:

$$\begin{array}{lllll} y^4 & +fy^3 & +ggyy & -{}^2eggy & +eegg \propto 0. \\ & -{}^2e & -{}^2ef & +eef & \\ & & +ee & & \end{array}$$

Quæ ſi comparetur cum præcedente, quantitates ſecundi termini præbebunt $f \propto b+{}^2e-v$; ultimi $gg \propto \frac{b^2v^2-b^2s^2}{2e^2}$; & tertii $\frac{b^2v2-b^2s^2}{2e^2}-{}^2be-3ee+{}^2ev \propto \frac{1}{2}vv+\frac{1}{2}bb-{}^2bv-\frac{1}{2}ss$. Ac proinde ſi multiplicemus totum per $2ee$, producetur $+bbvv-bbss-4be3-{}^6e4+4ve3 \propto vvee+bbee-4bvee-ssee$, ſive $bbvv-4be3-{}^6e4+4ve3-vvee-bbee+4bvee \propto bbss-eess$, & per conſequens

$$\frac{\begin{array}{lll} -{}^6e4 & +4ve3 & -vvee+bbvv \propto ss. \\ & -4b & +{}^4bv \\ & & -bb \end{array}}{bb-ee}$$

Quartus terminus dabit

$$\frac{-b^2v^2+b^2s^2}{e}+bee-vee+2e^3 \propto +bvv-bbv-bss.$$

Unde multiplicando totum per e, fiet

$$-bbvv+bbss+be3-ve3+{}^2e4 \propto +bvve-bbve-bess,$$

ac per

ac per conſequens

$$\frac{\begin{array}{l} -2e^4 + ve^3 + bvve + bbvv \\ \qquad -b \qquad -bbv \end{array}}{bb+be} \infty ss.$$

Quocirca habebimus

$$\frac{\begin{array}{l} -6e^4 + 4ve^3 - vvee + bbvv \\ \qquad -4b \quad +4bv \\ \qquad\qquad -bb \end{array}}{bb-ee} \infty \frac{\begin{array}{l} -2e^4 + ve^3 + bvve + bbvv \\ \qquad -b \qquad -bbv \end{array}}{bb+be}$$

Hinc multiplicando per crucem, ut in fractionibus, & auferendo utrinque producta æqualia, habebitur

$$\begin{array}{l} 2e^6 + 7be^5 + 8bbe^4 + 4b^3e^3 - 4b^3vee - b^4ve \infty 0. \\ \quad - v \quad -4bv \quad -6bb \quad + b^4 \end{array}$$

Quam æquationem ſi dividamus per $ee+be$, orietur

$$\begin{array}{l} 2e^4 + 5be^3 + 3bbee - 3bbve - b^3v \infty 0: \\ \quad - v \quad -3bv \quad + b^3 \end{array}$$

ac per conſequens

$$2e^4 + 5be^3 + 3bbee + b^3e \infty b^3v + 3bbev + 3beev + e^3v.$$

ac demum $\frac{2e^4 + 5be^3 + 3b^2e^2 + b^3e}{b^3 + 3b^2e + 3bee + e^3} \infty v.$

Ubi ſi in locum e ſubſtituatur y, atque ex hac ſumma deinde auferatur linea A L ∞y, relinquetur L N $\infty \frac{2by^3 + y^4}{b^3 + 3bby + 3byy + y^3}$. ut ſupra. Ubi notandum, lineam hanc curvam non aliam eſſe quàm Hyperbolam, ſupra à nobis conſtructam.

AD PAGINAM 75 & 76.

Demonſtranda hic eſt operatio, quam hæc Geometria nos docet, cùm radicem incognitam alicujus æquationis multiplicare volumus per certam aliquam quantitatem aut numerum cognitum. Proponatur æquatio $x^3 - cx^2 + ddx - b^3 \infty 0$, cujus radicem incognitam x per lineam b multiplicare oporteat. Supponatur $y \infty xb$, & fiet $\frac{y}{b} \infty x$, ideoque $\frac{y^2}{b^2} \infty x^2$, nec non $\frac{y^3}{b^3}$ ∞x^3. Proinde ſi ſubſtituamus in æquatione præcedente $\frac{y}{b}$ loco x, & $\frac{y^2}{b^2}$ loco x^2, itemque $\frac{y^3}{b^3}$ loco x^3, erit ſequens æquatio $\frac{y^3}{b^3}$ —

$\frac{cy^2}{b^2}$

Digitized by Google

$\frac{cy^2}{b^2}+\frac{d^2y}{b}-b^3 \infty 0$, æqualis præcedenti. Unde multiplicando totum per b^3, producetur $y^3-cbyy+ddbby-b^3b^3 \infty 0$. Evidens autem eſt, idem productum inveniri, ſi in æquatione propoſita ponamus y, & quadratum ejus yy, cubumque y^3, loco x, x^2, x^3: atque deinde ſecundum terminum multiplicemus per b, tertium per b^2, & quartum per b^3, omnino ut hæc Geometria docet. Ubi, poſtquam ſubſtituimus $\frac{y}{b}$, $\frac{y^2}{b^2}$, & $\frac{y^3}{b^3}$ loco x, x^2, & x^3, ad multiplicandum totum per b^3, ſufficit auferre denominatorem, qui ab b denominatur, atque tantùm reliquum ſecundi termini multiplicare per b, reliquum tertii per bb, & reliquum quarti per b^3: quandoquidem à terminis, ſecundo & tertio, auferendo denominatores bb & b, ipſi eatenus ſunt multiplicati. Adeò ut ſufficiat multiplicare reliquum ſecundi termini per b, & reliquum tertii per bb, at ipſum quartum per b^3, cum hic denominatorem ab b denominatum, per quem ſic auferendo fuiſſet multiplicatus, non admittat, non aliter quàm hæc Geometria docet. Quæ demonſtratio & methodus in altioribus quoque æquationibus locum obtinent, in quibus radix x plures dimenſiones, quàm in æquatione propoſita, admittit.

Notandum autem eſt, cùm termini æquationis hujus ſic productæ non ſinguli æquè multas literas ſeu dimenſiones habent, lineam, quam pro unitate ad libitum ſumpſimus, & cujus ratione ſuppoſuimus $\frac{y}{b} \infty x$, toties in terminis, qui pauciores dimenſiones ſeu literas habent, ſubintelligendam eſſe, quoties fuerit opus. Adeò ut ejuſdem lineæ beneficio termini abbreviari poſſint, ſic ut ſinguli non niſi tres literas ſeu dimenſiones admittant, ac præterea ut illius ope, poſtquam radix una y fuerit cognita, mediante æquatione $\frac{y}{b} \infty x$, cognoſcatur quoque radix altera x.

Ad hæc ſupponere quoque poſſumus $yy \infty xb$, ita ut habeamus $\frac{y^2}{b} \infty x$, & $\frac{y^4}{b^2} \infty x^2$, nec non $\frac{y^6}{b^3} \infty x^3$; quibus, ut ſupra, ſubrogatis, habebimus $\frac{y^6}{b^3}-\frac{cy^4}{b^2}+\frac{d^2y^2}{b}-b^3 \infty 0$. Ac proinde multiplicando totum per b^3, fiet $y^6-cby^4+ddbbyy-b^3b^3 \infty 0$. Unde perſpicuum fit, quòd ſubſtituendo, juxta præſcriptum hujus Geometriæ, yy pro x, quadratum ejus y^4 pro x^2, & ipſius

& ipſius cubum y^6 pro x^3, atque multiplicando ſecundum terminum per b, tertium per bb, & quartum per b^3, eandem conſecuturi ſimus æquationem, ut ex demonſtratione ſuperiori facile eſt colligere; & omnes quidem termini æquè multas habebunt literas ſeu dimenſiones. Et tantum de operatione per literas.

Quod autem ſpectat ad operationem, quæ fit, cùm radix incognita per numerum aliquem eſt multiplicanda; ipſa eidem demonſtrationi innititur.

Eſto eadem, quæ ſupra, æquatio: $x^3 - cxx + ddx - b^3 \propto 0$; & oporteat radicem incognitam x multiplicare per 3. Supponatur $y \propto 3x$, eritque $\frac{y}{3} \propto x$, & $\frac{y^2}{9} \propto x^2$, nec non $\frac{y^3}{27} \propto x^3$. Quibus, ut ſupra, ſubſtitutis, fiet $\frac{y^3}{27} - \frac{cy^2}{9} + \frac{d^2y}{3} - b^3 \propto 0$. Ac proinde multiplicato toto per 27, exſurget $y^3 - 3cyy + 9ddy - 27b^3 \propto 0$. Quæ æquatio etiam invenitur, ſi in æquatione propoſita ſubſtituamus y, quadratum ejus yy, & ipſius cubum y^3, loco x, quadrati x^2, & x^3 cubi; atque deinde ſecundum terminum per 3 multiplicemus, tertium per 9, & quartum per 27, ex præſcripto hujus Geometriæ. Quâ quidem operatione termini omnes, ob rationes ſupra allatas, æquè multas dimenſiones acquirent.

Idem intelligendum eſt de exemplo in hac Geometria propoſito, $x^3 - xx\sqrt{3} + \frac{26}{27}x - \frac{8}{27\sqrt{3}} \propto 0$. Etenim ſuppoſito $y \propto x\sqrt{3}$, erit $\frac{y}{\sqrt{3}} \propto x$, & $\frac{y^2}{3} \propto x^2$, nec non $\frac{y^3}{3\sqrt{3}} \propto x^3$. Unde ſi in æquatione propoſita ſubſtituamus $\frac{y}{\sqrt{3}}$, quadratum ejus $\frac{y^2}{3}$, & ipſius cubum $\frac{y^3}{3\sqrt{3}}$, in locum x, quadrati x^2, & cubi x^3; invenietur $\frac{y^3}{3\sqrt{3}} - \frac{yy\sqrt{3}}{3} + \frac{26y}{27\sqrt{3}} - \frac{8}{27\sqrt{3}} \propto 0$. Atque adeò ſi totum multiplicemus per $3\sqrt{3}$, habebitur $y^3 - 3yy + \frac{26}{9}y - \frac{8}{9} \propto 0$. Eadem nempe æquatio, quæ obtinetur operando juxta hujus Geometriæ methodum, quemadmodum ſupra fuit oſtenſum.

Non ſecus fiet demonſtratio, ſi de radice incognita per quantitatem aliquam cognitam dividenda agatur. Proponatur namque æquatio $x^3 - cxx + ddx - b^3 \propto 0$, ſitque x dividenda per b.

Sup-

Digitized by Google

Supponatur $y \infty \frac{x}{b}$, eritque $y\,b \infty x$, & $y^2 b^2 \infty x^2$, nec non $y^3 b^3 \infty x^3$. Quæ ſi in æquatione propoſita ſubſtituantur, fiet $y^3 b^3 - c\,b^2 y^2 + d^2 b\,y - b^3 \infty 0$. Ac proinde ſi totum dividatur per b^3, orietur $y^3 - \frac{cy^2}{b} + \frac{d^2}{b^2} y - \frac{b^3}{b^3} \infty 0$.

Manifeſtum autem eſt, idem nos obtenturos, ſi in æquatione propoſita ſubrogemus y, quadratum ejus yy, & ipſius cubum y^3, in locum x, quadrati x^2, & cubi x^3, atque ſic deinde ſecundum terminum dividamus per b, tertium per $b\,b$, & quartum per b^3: quoniam in ſuperiori operatione, ubi bb in ſecundo termino, & b in tertio reperitur, perſpicuum eſt, quòd, ad dividendum omnes terminos per b^3, auferendo toties b, quoties in ipſis reperitur, opùs tantùm ſit dividere reliquum ſecundi termini per b, reliquum tertii per bb, ipſum autem quartum terminum per b^3, quippe qui quantitatem b non comprehendit. Omnino ut hæc Geometria requirit.

Quia verò æquationis hujus ſic productæ termini ſinguli non æquè multas habent literas ſeu dimenſiones; igitur ut æquales numero reddantur, oportebit in illis, qui pauciores dimenſiones habent quàm requiritur, toties literam aliquam ſubintelligere, quoties erit opùs, quæ lineam pro unitate ad libitum ſumptam deſignet, & cujus ratione ſuppoſuimus $y \infty \frac{x}{b}$. vel potiùs beneficio hujus lineæ, quam pro unitate aſſumpſimus, & linearum cognitarum, efficere, ut ſinguli æquationis termini tres literas ſeu dimenſiones habeant. Id quod facile eſt. Etenim cognitâ, v. g. lineâ $\frac{c}{b}$, pro unitate acceptâ, poſſumus ad eandem denotandam loco $\frac{c}{b}$ ſumere p. atque ita de cæteris. Adeò ut, cognita radice y, ejuſdem unitatis ope cognoſcatur quoque x, per æquationem hanc $y \infty \frac{x}{b}$, vel $y\,b \infty x$.

Nec aliter in numeris veritatem hujus Geometriæ Methodi oſtendemus. Proponatur enim eadem æquatio, quæ ſupra, $x^3 - cx^2 + ddx - b^3 \infty 0$, & oporteat radicem incognitam x dividere per 3. Suppoſitâ igitur $y \infty \frac{x}{3}$, fiet $3y \infty x$, & $9yy \infty x^2$, nec non $27y^3 \infty x^3$. Quæ ſi ſubſtituantur in æquatione propoſita, habebitur $27y^3 - 9cyy + 3ddy - b^3 \infty 0$. Ac proinde dividendo totum

totum per 27, orietur $y^3 - \frac{1}{3}cyy + \frac{1}{9}ddy - \frac{1}{27}b^3 \infty 0$. Quæ æquatio quoque invenietur, ſi procedamus juxta hujus Geometriæ Methodum: ſubrogando nimirum y in æquatione propoſita, quadratum ejus yy, & ipſius cubum y^3, in locum x, quadrati x^2, & cubi x^3: & dividendo deinde ſecundum terminum per 3, tertium per hujus quadratum 9, & quartum per ipſius cubum 27. Eadem demonſtratio locum obtinet, ſi in æquatione radix incognita plures dimenſiones habuerit.

AD PAGINAM 79, & ſequentes.

PRoponatur $x^4 * + px^2 + qx - r \infty 0$, & ſupponatur juxta præſcriptum hujus Geometriæ $x^2 + yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \infty 0$, eritque $x^2 + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p \infty \frac{q}{2y} - yx$, ac proinde quadratum unius partis æquale quadrato partis alterius, hoc eſt, $x^4 + yyxx + \frac{1}{4}y^4 + px^2 + \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp \infty \frac{q^2}{4y^2} - qx + yyx^2$, & conſequenter $x^4 + \frac{1}{4}y^4 + px^2 + \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp + qx - \frac{q^2}{4y^2} \infty 0$. Ex qua æquatione ſi tollatur prima $x^4 * + pxx + qx - r \infty 0$, relinquetur $\frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}py^2 + \frac{1}{4}pp + r - \frac{q^2}{4y^2} \infty 0$. Unde multiplicando totum per $4yy$, exſurget $y^6 + 2py^4 \begin{matrix}+p^2\\+4r\end{matrix} yy - qq \infty 0$. Quod erat demonſtrandum.

Eâdem ratione demonſtratio fiet ſecundùm omnes variationes ſignorum + & —, atque obſervationes in hac Geometria expoſitas. In cujus rei exemplum duorum adhuc ſequentium caſuum demonſtrationem ſubjiciemus.

Sit æquatio propoſita $x^4 * - px^2 + qx - r \infty 0$. Si ergo juxta hanc Geometriam ſuppoſuerimus $x^2 + yx + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \infty 0$, habebimus $x^2 + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p \infty \frac{q}{2y} - yx$. Unde & quadratum unius partis æquale erit quadrato alterius partis; hoc eſt, $x^4 + yyx^2 + \frac{1}{4}y^4 - px^2 - \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp \infty \frac{q^2}{4y^2} - qx + yyxx$. Et per conſequens $x^4 + \frac{1}{4}y^4 - pxx - \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp + qx - \frac{q^2}{4y^2} \infty 0$. E qua ſi auferatur prima $x^4 * - pxx + qx - r \infty 0$, relin-

Digitized by Google

relinquetur $\frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp + r - \frac{qq}{4yy} \infty 0$. Quare ſi totum multiplicemus per $4yy$, inveniemus $y^6 - 2py^4 \begin{smallmatrix} +pp \\ +4r \end{smallmatrix} yy - qq \infty 0$. Quod demonſtrare oportebat.

Jam verò ſi ponamus $x^4 * + px^2 - qx + r \infty 0$, ſupponendo ſecundùm hanc Geometriam $x^2 - yx + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y} \infty 0$; erit $x^2 + \frac{1}{2}yy + \frac{1}{2}p \infty \frac{q}{2y} + yx$. Unde quadratum prioris partis æquale erit quadrato poſterioris, hoc eſt, $x^4 + yyx^2 + \frac{1}{4}y^4 + px^2 + \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp \infty yyx^2 + qx + \frac{qq}{4yy}$. Ac per conſequens, $x^4 + \frac{1}{4}y^4 + px^2 + \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp - qx - \frac{qq}{4yy} \infty 0$. E qua ſi tollatur prima $x^4 * + px^2 - qx + r \infty 0$, remanebit $\frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{2}pyy + \frac{1}{4}pp - r - \frac{qq}{4yy} \infty 0$. Atque ideo ſi totum multiplicetur per $4yy$, invenietur $y^6 + 2py^4 \begin{smallmatrix} +pp \\ -4r \end{smallmatrix} yy - qq \infty 0$. Quod erat demonſtrandum.

Non ſecus demonſtrabuntur omnes reliqui caſus ſecundùm utramlibet harum ſuppoſitionum: nimirum, $x^2 - yx + \frac{1}{2}yy.\ \frac{1}{2}p.\ \frac{q}{2y} \infty 0$, aut $x^2 + yx + \frac{1}{2}yy.\ \frac{1}{2}p.\ \frac{q}{2y} \infty 0$, obſervando tantùm ſigna $+$ & $-$, quemadmodum hæc Geometria docet. Cujus operationis ope in genere æquationes omnes, in quibus radix incognita 4^{or} habet dimenſiones, ad formam, in hac Geometria propoſitam, reduci poſſunt: nimirum, $+y^6.\ 2py^4 \begin{smallmatrix} +pp \\ .4r \end{smallmatrix} yy - qq \infty 0$. ſigna $+$ & $-$ quæ præcipit, obſervando, ſicut demonſtravimus. Quo fit, ut, ſi diviſionis beneficio æquationem propoſitam ad eam formam reducere poſſimus, ita ut poſt diviſionem radix ejus y plures quàm duas dimenſiones non admittat, ipſa per Geometriam communem, juxta præſcripta paginæ 6 & 7 hujus Geometriæ inveniri poſſit. Quâ inventâ, mediantibus æquationibus $x^2 - yx + \frac{1}{2}y^2.\ \frac{1}{2}p.\ \frac{q}{2y} \infty 0$, & $x^2 + yx + \frac{1}{2}yy.\ \frac{1}{2}p.\ \frac{q}{2y} \infty 0$, (obſervando ſigna $+$ & $-$, ponenda locis, ubi ſunt omiſſa) invenietur quoque radix x, cujus loco in altera æquatione pro radice ſuppoſueramus y. At verò ſi æquatio ſupra

ſupra inventa, denominata à radice y, ſic dividi nequeat, tunc conſiderare illam poterimus, velut tres duntaxat dimenſiones habentem, ſupponendo ſcilicet $z \propto yy$, ipſamque ſubſtituendo in æquatione; adeò ut habeamus $z^3 - {}^2pz^2 \begin{smallmatrix}+pp\\ .4r\end{smallmatrix} z - qq \propto 0$. Quæ, obſervatis iiſdem ſignis + & —, quæ in altera æquatione reperiuntur, & ſublato ſecundo termino, per id, quod pag. 73 dictum eſt, reducetur ad formam aliquam illarum trium, quæ habentur paginâ 93, ad inveniendam deinde radicem ejus z per Geometriam Solidorum, juxta pag. 85, & ſequentes. Quæ certè eadem futura eſt quæ yy, quâ cognitâ innoteſcet & y. Cujus ope atque duarum ſuperiorum æquationum tandem invenietur x.

Verùm enimverò obſervandum eſt, in omnibus præcedentibus operationibus utendum eſſe eâdem lineâ, quæ pro unitate eſt accepta, ſi illam determinamus, & uſurpamus ad æquationem propoſitam reducendam ad ſuperioris formam, nempe: $x^4 * . px^2 . qx . r \propto 0$. obſervando ſigna + & —.

Verum equidem eſt, quòd, poſtquam æquationem hanc ad præcedentis formam reduximus, quæ à radice y ſit denominata, nimirum ad æquationem $y^6 . 2py^4 \begin{smallmatrix}+p^2\\ .4r\end{smallmatrix} yy - qq \propto 0$, quæque dividi ſeu reduci non poſſit, ita ut radix ejus y plures quàm duas dimenſiones habeat, non teneamur ulteriùs progredi: (ſiquidem illo caſu Problema non Planum, ſed Solidum exiſtit, juxta pag. 80) atque tunc contenti eſſe poſſumus æquatione primâ $x^4 * . px^2 . qx . r \propto 0$ (cum per illam invenire poſſimus radicem x mediante Geometriâ Solidorum, ſecundùm paginam 85 & ſequentes): Attamen nihilominus operatione præcedente, quam explicavimus, uti poſſumus, ſaltem ut oſtendatur veritas ejus, quod habetur pag. 93 & 94, ubi dicitur, quòd Problemata omnia, quorum difficultates ad æquationem, quæ ultra quadrato-quadratum non aſcendit, reducuntur, ſemper ad formam aliquam earum, quæ paginâ 93 proponuntur, reduci queant.

AD PAGINAM 93.

QUandoquidem ex eo, quod in hac Geometria oſtenſum atque ſupra adnotatum eſt, liquet, æquationes omnes, quarum difficultates ultra Quadrato-quadratum aut Cubum non

aſcendunt, reduci poſſe ad aliquam formam earum, quæ hâc paginâ proponuntur: exhibenda tantùm reſtat demonſtratio radicum, quæ ex ipſis, ſecundùm Cardani regulas, quas ſuper hac re in medium affert Capite ſecundo libri ejus, quem de Arte Magna ſeu Regulis Algebraïcis inſcripſit, educuntur. Cum hoc ipſum difficultatem fortè non exiguam parere poſſet iis, qui in eundem locum aliquando inciderent, quippe qui à Specioſæ Algebræ, & mutuæ inter Arithmeticam & Geometriam relationis atque convenientiæ ignaris, non facilè percipiatur. Quocirca ut veritas extractionis harum radicum expendatur, demonſtrabimus primùm ſequens

LEMMA.



SEctâ utcunque lineâ AC in B, oſtendendum eſt: Cubum lineæ AB, unà cum cubo lineæ BC, & triplo producto linearum AC, BC, AB, ſimul æquari cubo lineæ AC.

Sit AB $\infty\, a$, BC $\infty\, b$, eritque AC $\infty\, a+b$. Productum linearum AC, BC, AB, erit $baa+bba$, cujus triplum $3baa+3bba$. Huic ſi addantur cubi linearum AB, BC, fiet $a^3+3baa+3bba+b^3$. Et manifeſtum eſt, ſummam hanc æqualem eſſe cubo lineæ AC.

Demonſtrato itaque hoc Lemmate, habebitur primo loco $z \infty \sqrt{C.\,+\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}-\sqrt{C.\,-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}$. Hinc in figura adjecta ſupponendo binomium $\sqrt{C.\,+\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}$ æquale lineæ AC, & reſiduum $\sqrt{C.\,-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}$ æquale lineæ BC, erit eorum differentia $\sqrt{C.\,+\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}$, $-\sqrt{C.\,-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}}$ æqualis lineæ AB. Jam verò ſtatuendo AB $\infty\, z$, erit differentia Cuborum ex his radicibus (nimirum differentia inter cubum $+\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}$, & cubum $-\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq+\tfrac{1}{27}p^3}$, (auferendo hunc ab illo) æqualis q. Quæ propterea æqualis erit differentiæ inter cubum lineæ

neæ BC & AC. Atqui cubus lineæ AB, & triplum productum linearum AC, BC, AB ſimul, æquantur eidem differentiæ q, (ſiquidem cum cubo lineæ BC componunt cubum lineæ AC). Erit itaque z^3, cubus videlicet lineæ AB, unà cum triplo producto linearum AC, BC, AB, æqualis q.

Ut autem habeatur hoc productum, multiplicandum eſt binomium $\sqrt{C.+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$, quod æquatur lineæ AC, per reſiduum $\sqrt{C.-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}}$, quod æquale eſt lineæ BC. Hinc cum $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$ in ſe multiplicatum faciat $\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3$, ac $+\frac{1}{2}q$ in $-\frac{1}{2}q$ faciat $-\frac{1}{4}qq$; quæ producta ſimul addita faciunt $\frac{1}{27}p^3$ (ſiquidem $+\frac{1}{4}qq$ & $-\frac{1}{4}qq$ addendo evaneſcunt): & porrò producta, quæ fiunt ex $+\frac{1}{2}q$ & $-\frac{1}{2}q$ in $\sqrt{\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3}$, ſe mutuò deſtruant: Erit totum productum $\sqrt{C.\frac{1}{27}p^3}$, ſeu $\frac{1}{3}p$, radix ſcilicet cubica ex $\frac{1}{27}p^3$. quandoquidem quæſtio erat de multiplicandis radicibus cubicis. Unde triplum productum erit p, quod ſi multiplicetur per AB, hoc eſt, per z, fiet pz, æquale triplo producto linearum AC, BC, AB. Et per conſequens $z^3+pz \infty q$, vel $z^3 \infty -pz+q$. Quod erat demonſtrandum.

Sit jam ſecundo loco

$$z \infty \sqrt{C.+\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt{C.+\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}}.$$

& ſupponatur prima radix cubica (quæ binomium eſt) in figura præcedente æqualis lineæ AB; ſecunda autem (quæ reſiduum eſt) æqualis lineæ BC; eritque ſumma cuborum utriuſque lineæ æqualis q. Porrò ſupponendo lineam AC ∞ z, auferendoque ex ejuſdem cubo z^3, triplum productum linearum AB, BC, & z, relinquentur cubi linearum AB & BC, qui quidem ſimul ſumpti ipſi q ſunt æquales. Eſt autem productum ex AB, BC, hoc eſt, quod fit ex binomio in reſiduum, $\sqrt{C.\frac{1}{27}p^3}$, ſeu $\frac{1}{3}p$. Nam cum multiplicando $+\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}$ per $-\sqrt{\frac{1}{4}qq-\frac{1}{27}p^3}$ (unâ radice exiſtente ſigno + adfectâ, alterâ verò ſigno −) producatur utriuſvis quadratum affectum ſigno −, nimirum $-\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3$, & utramque radicem per $+\frac{1}{2}q$ multiplicando, producta evaneſcant; reſtat tantum $+\frac{1}{2}q$ in ſe multiplicandum. Quare cum productum illud ſit $+\frac{1}{4}qq$, & alterum productum inventum ſit $-\frac{1}{4}qq+\frac{1}{27}p^3$; erit totum productum $\sqrt{C.\frac{1}{27}p^3}$

 ſeu

ſeu $\frac{1}{3}p$, ſicut diximus, ac proinde ejus triplum p. Quod ſi rurſus multiplicetur per z, producetur pz, æquale triplo producto linearum AB, BC, AC: & per conſequens $z^3 - pz \infty q$, hoc eſt, $z^3 \infty * + pz + q$. Quod erat demonſtrandum.

Adduxi autem demonſtrationem extractionis harum radicum, quòd contemplatio earum atque inventio pulcherrimæ mihi ſint viſæ. Verùm quantùm ad praxin, cùm Geometricè æquationum hoc loco propoſitarum radices ſunt extrahendæ; ejus ſanè methodus, quæ generalis atque facilis eſt, quàm optimè in hac Geometria demonſtrata cernitur. Si verò Arithmeticè illas extrahere lubuerit, multò id faciliùs fiet juxta methodum à Vieta in tractatu de Numeroſa Poteſtatum Reſolutione traditam, quàm per haſce regulas Cardani.

FINIS.

FRAN.

Digitized by Google

FRANCISCI à SCHOOTEN

IN

GEOMETRIAM

RENATI DES CARTES

COMMENTARII.

Digitized by Google

Digitized by Google

ARGUMENTUM PRIMI LIBRI.

PRimo libro Autor viam quodammodo aperit ad ſuam Methodum, quâ in reſolvendis & conſtruendis Geometriæ Problematis utitur, quamq; tribus hiſce libris eſt complexus. Quæ eſt, ut certarum notarum ſive characterum beneficio, quibus tum datæ tum quæſitæ lineæ deſignantur, difficultates omnes, quæ in iiſdem Problematis enodandæ veniunt, ad ejuſmodi terminos reducantur, ut deinde ad illorum conſtructionem non niſi rectarum quarundam linearum longitudinem quærere ſit opus. Ad quas inveniendas, docet, operationes omnes, quæ circa lineas haſce, ut cognitæ fiant, ſunt inſtituendæ, ad 4 vel 5 diverſas, quemadmodum in Arithmetica, revocari poſſe: quæ ſunt, Additio, Subtractio, Multiplicatio, Diviſio, & Radicum Extractio. Quæ quâ ratione Geometricè fiant, deinceps explicat. Ubi porrò obſervandum venit, quòd, poſtquam hi Arithmetices termini in Geometriam ſunt introducti, ad operationes haſce in lineis æquè inſtituendas atq; in numeris, conſentaneum ſit rectam lineam, quæ unitatis vicem gerat, aſſumere, & ad eandem reliquas referre. Id quod communiter liberum eſt, cum quamlibet lineam pro ea accipere liceat.

Quibus explicatis, oſtendit, quo pacto notis atq; literis in Geometria ſit utendum ad prædictas lineas breviter deſignandas, earumq; operationes facilè indicandas: ut hâc ratione diverſæ earum relationes conſpicuæ ſint, atq; difficultas omnis, verborum involucris exuta, quàm ſimpliciſſimè ob oculos poni poſſit. Et quia hæc Methodus in reſolvendis Geometriæ Problematis requirit, ut difficultates omnes, quæ in illis evolvendæ occurrunt, ad unum genus Problematum reducantur, nempe, ut quæratur tantummodo valor quarundam linearum rectarum, quæ alicujus æquationis ſint radices: idcirco docet, quo pacto Problema aliquod propoſitum perducatur ad æquationem, ſupponendo illud ipſum ut jam factum. Ac deinde, cum Aequatio certum ſit medium quo Problema ſolvitur, refert totidem æquationes inveniendas eſſe, quot in eo ſuppoſitæ fuerint incognitæ lineæ. Cum autem hæc Methodus nullis Problematum finibus coërceatur, ipſaq; non tantùm ad Problemata, in quibus de inveniendis quibuſdam rectis lineis, aut etiam planis, ſolidíſve quæſtio

Digitized by Google

eſt (quæ quidem facilè ad tales terminos reduci queunt, ut non niſi rectæ quædam lineæ inveniendæ ſint) adplicari poſſit; ſed etiam ad Problemata, in quibus certi anguli dantur, vel angulorum inter ſeſe comparatio facienda eſt; atq; ad Problemata in quibus quædam puncta aut lineæ data ſunt, & alia puncta inveniri debent, ſe extendat (ſiquidem in his à quæſitis punctis ad data, aut datarum rectarum terminos, aut etiam in datis angulis ad poſitione datas rectæ lineæ duci poſſunt, quæ quæſitorum punctorum loca determinant; in illis autem quæ dictorum angulorum vices gerant, ſicut poſt exempla planum fiet): facilè conſtat, illam non modò Veterum Analyſin atq; Recentiorum Algebram comprehendere; ſed etiam ad id omne ubi de quantitatum æqualitate vel proportione inquiritur, adhiberi poſſe, atque adeò tam generalem eſſe, ut nullum non ſuæ artis per univerſam Matheſin ſpecimen edat.

Jam verò poſtquam Problema aliquod ad æquationem eſt perductum, ipſaq; æquatio ad ſimpliciſſimos terminos reducta, ſi quidem id ipſum per Geometriam communem conſtrui poteſt, hoc eſt, ut ad conſtructionem ejus non niſi rectis lineis atq; circulis utamur, prout in ſuperficie aliqua plana deſcribuntur, docet, qualis tunc debeat eſſe æquatio, & quâ ratione radix ejus tam inveniri quàm exprimi poſſit. Atq; ita breviter, quidquid ad planorum Problematum conſtructionem ſpectat, abſolvit.

Ut autem tum præceptionum harum uſui locus ſit, tum verò ejuſdem Methodi facilitas in reſolvendo ac conſtruendo nobili aliquo Problemate eluceat, inquirendam ſibi tandem proponit rationem componendi loci ad tres, quatuor, vel plures lineas: ad quam, velut ſcientiæ culmen, Veteres ut pervenirent, ſummâ curâ elaborarunt.

Et hoc quidem primi Libri Argumentum afferre viſum fuit. Cæterùm loca difficiliora, quæ in eo illuſtranda eſſe duximus, ferè ſunt ſequentia.

COM-

Digitized by Google

COMMENTARII
IN
LIBRUM PRIMUM.

E*T radicum extractio, quæ pro Diviſionis quadam ſpecie haberi poteſt.*] Quandoquidem eadem fermè proportio utrique operationi convenit. Eſt enim in Diviſione, ut quotiens ad unitatem, ſic dividendus ad diviſorem. In extractione verò radicis quadratæ, ut radix, ceu quotiens, ad unitatem; ita datus numerus, ceu dividendus, ad radicem, ceu diviſorem. Adeò ut radicis extractio diviſionis ſpecies ſit cenſenda, in qua diviſor quotienti eſt æqualis; vel etiam, in qua radix inter datum numerum & unitatem eſt media proportionalis. A

Vel etiam ſi una ſit, quæ vocetur unitas.] Per unitatem intellige lineam quandam determinatam, quæ ad quamvis reliquarum linearum talem relationem habeat, qualem unitas ad certum aliquem numerum. B

Ut eò commodiùs ad numeros referatur, quamq; communiter pro libitu aſſumere licet.] Sit enim, exempli gratiâ, datum aliquod rectangulum tranſmutandum in quadratum: ſi pro unitate ſumatur latus unum, quod libuerit, & inter ipſum & reliquum inveniatur media proportionalis; erit ea latus quadrati, dato æqualis. Atque hâc ratione latus alterum vicem gerit alicujus numeri, è quo radix quadrata eſt extrahenda. Adeò ut manifeſtum ſit, Problema propoſitum, nec non mediæ proportionalis inter duas datas lineas inventionem, nihil aliud eſſe, quàm ſi unâ lineâ aſſumptâ pro unitate, ex reliquâ lineâ tanquam numero extrahatur radix quadrata. C

Ut ad ipſas inveniatur quarta, quæ ſit ad alterutram, ut eſt altera ad unitatem, quod idem eſt atque multiplicatio.] In multiplicatione enim eſt: ut productum ad multiplicandum, D

ita multiplicans ad unitatem. Vel permutando, ut productum ad multiplicantem, ſic multiplicandus ad unitatem.

E *Vel ut per ipſas inveniatur quarta, quæ ſit ad unam ex illis duabus, ut unitas ad alteram, quod convenit cum Diviſione.*] Eſt namque in Diviſione, ut ſupra annotavimus, ut quotiens ad unitatem, ſic dividendus ad diviſorem. Ac proinde permutando, ut quotiens ad dividendum, ſic unitas ad diviſorem.

F *Ut ſi radix cubica ſit extrahenda ex* $aabb - b$, *cogitandum eſt, quantitatem* $aabb$ *ſemel diviſam eſſe per unitatem, atque alteram quantitatem* b *bis per eandem eſſe multiplicatam.*] Puta unitatem, quæ hîc ſubintelligitur, eſſe c. Unde ſi quantitas $aabb$, quæ unâ abundat dimenſione, ſemel dividatur per c, fiet $\frac{aabb}{c}$; at verò altera quantitas b, quæ duabus deficit dimenſionibus, ut æquales numero habeantur, bis multiplicetur per c, hoc eſt, per cc, fiet bcc: adeò ut tota quantitas ſit $\frac{aabb}{c} - bcc$.

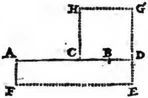
G *Reſoluturus igitur aliquod Problema, conſiderabit illud primâ fronte ut jam factum, nominaq́ imponet lineis omnibus, quæ ad conſtructionem ipſius neceſſaria videbuntur, tam iis quæ incognitæ ſunt, quàm quæ cognitæ. Deinde, nullo inter lineas haſce cognitas & incognitas facto diſcrimine, evolvenda eſt Problematis difficultas, eo ordine, quo omnium naturaliſſimè patet, quâ ratione dictæ lineæ à ſe invicem dependent, donec inventa fuerit via eandem quantitatem duobus modis exprimendi, id quod Æquatio vocatur: æquales enim ſunt termini modi unius, terminis modi alterius. Jam verò tot hujuſmodi Æquationes invenire oportebit, quot ſuppoſitæ fuerunt incognitæ lineæ.*] Quæ verba ut rectè percipiantur, unum atque alterum Problema proponamus.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA 1^mum.

Datam rectam lineam AB, utcunque ſectam in C, ita producere ad D, ut rectangulum ſub AD, DB comprehenſum, æquetur quadrato rectæ CD.

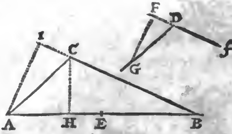


Conſidero rem velut jam factam, hoc eſt, ſuppono rectangulum ADEF æquari quadrato CDGH, quod faciendum proponitur. Deinde, cum omnis quæſtio Geometrica eò reduci poſſit, ut non niſi longitudo alicujus vel aliquarum rectarum ex aliis rectis ſit quærenda, & nemo non videat, ad ejus conſtructionem tantummodo quærendam eſſe lineam BD, omnemque difficultatem in ea invenienda eſſe ſitam; nomina impono lineis tam datis AC, CB, quàm quæſitæ BD. Proinde, pro linea AC pono quantitatem cognitam a; pro CB, b; at pro BD quantitatem incognitam x, fietque AD $a+b+x$, CD autem $b+x$. Quibus peractis, ut ad Æquationem perveniatur, & habeam rectangulum ADEF, duco AD, hoc eſt, $a+b+x$ in DE ſeu DB, hoc eſt, x, quod proinde erit $ax+bx+xx$. Similiter ut inveniatur quadratum CDGH, multiplico CD, hoc eſt, $b+x$ in ſe, fietque $bb+2bx+xx$. Ita ut habeatur æquatio $ax+bx+xx \infty bb+2bx+xx$. Ad quam reducendam tollatur utrinque bx & xx, ſic ut ex una parte remaneat ax, & ex altera $bb+bx$; tum tranſlato bx ad alteram partem ſub contrario ſigno, erit æquatio $ax-bx \infty bb$. Cujus utrâque parte diviſâ per $a-b$, provenit $x \infty \frac{bb}{a-b}$. E quibus patet, lineam quæſitam BD inveniri per diviſionem quadrati lineæ CB per exceſſum, quo linea AC ſuperat ipſam CB, vel etiam per hunc exceſſum, tanquam primam, & lineam CB, tanquam ſecundam, inveniendo tertiam proportionalem BD.

Digitized by Google

PROBLEMA 2dum.

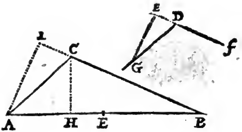
Datâ rectâ lineâ terminatâ AB, ex terminis ejus A & B duas rectas lineas inflectere AC, CB, continentes angulum ACB, æqualem dato D, ut quæ ab ipſis fiunt quadrata, habeant ad triangulum ACB rationem datam, ut $4d$ ad a.



Factum ſit quod quæritur, & ex puncto C demittatur ſuper rectam AB perpendicularis CH. Quoniam igitur data ſunt puncta A & B; & quidem ad trium punctorum ſitum determinandum nihil ſimplicius haberi poteſt, quàm ſi noſcantur tres lineæ AH, HC, & HB: facilè conſtat, quæſtionem propoſitam eò reduci, ut inveniendæ tantùm ſint duæ lineæ AH, HC, ſeu BH, HC; atque adeò duas ſupponendas eſſe lineas incognitas. Quia verò, ſectâ lineâ AB bifariam in E, datum eſt punctum E, atque ideo ipſa AE vel EB, quam voco a, atque operatio aliquantò brevior evadit, ſi loco dictarum AH, HC, ſeu BH, HC, quæramus duas lineas HE, HC: Idcirco pro HE pono quantitatem incognitam x, & pro HC quantitatem incognitam y. Unde pro AH invenitur $a-x$, & pro HB $a+x$. Jam inter lineas notas & ignotas nullo facto diſcrimine, directè percurrenda eſt Problematis difficultas, & videndum, quomodo una ex aliis ſit deducenda, donec tandem ad Æquationem deveniatur. Primò igitur quadratum ex AC erit $aa-2ax+xx+yy$: quo-

quoniam componitur ex duobus quadratis linearum AH & HC. Eodem modo quadratum lineæ CB erit $aa+2ax+xx+yy$: quia æquale eſt binis quadratis ex BH & HC. Atque adeò ſumma quadratorum ex AC, CB erit $^{2}aa+^{2}xx+^{2}yy$. Quæ cum eam rationem habeat ad triangulum ABC, quod eſt ay, (utpote æquale ſemiſſi ejus, quod producitur ex baſi AB & perpendiculo CH,) quam habet $4d$ ad a: erit productum ex $^{2}aa+^{2}xx+^{2}yy$ in a æquale ei, quod provenit ex ay in $4d$, hoc eſt, habebitur Æquatio inter $2a^{3}+^{2}axx+^{2}ayy$ & $4ady$. Sed quandoquidem duæ ſuppoſitæ ſunt incognitæ lineæ x & y, alia adhuc ſupereſt Æquatio invenienda. Quam ut inveniamus, conſiderandus inſuper eſt angulus D, cui æqualis ſupponitur angulus ACB; qui ſi obtuſus fuerit, produco lineam BC, donec ex puncto A in ipſam cadat perpendicularis AI, omnino ut factum eſt circa angulum D. Tum, quoniam datus eſt angulus D, dantur quoque rectæ DF & FG. Ac proinde ſi pro DF ponatur b, & pro FG c, gerent ipſæ vicem dati anguli D, fientque triangula ACI & GDF ſimilia. Eâdem ratione ſimilia erunt triangula HCB & ABI. Unde erit ut CB ad AB, ſic CH ad AI, & BH ad BI. Quare ſi pro quadrato ex CB ∞ $aa+^{2}ax+xx+yy$ brevitatis causâ ſcribatur ee, h. e., pro CB ∞ $\sqrt{aa+2ax+xx+yy}$ ponatur e; fiatque ut e ad $2a$, ſic CH ſeu y ad AI: erit AI $\infty \frac{2ay}{e}$. Similiter ut e ad $2a$, ſic BH, ſeu $a+x$, ad BI: erit BI $\infty \frac{2aa+2ax}{e}$. Tum ſubductâ BC ſeu e ex BI ſeu $\frac{2aa+2ax}{e}$, relinquitur CI $\frac{2aa+2ax-ee}{e}$. Jam cum CI ſit ad AI, hoc eſt, $\frac{2aa+2ax-ee}{e}$ ad $\frac{2ay}{e}$, ſeu $^{2}aa+^{2}ax-ee$ ad $2ay$, ſicut DF ad FG, hoc eſt, b ad c: erit $^{2}aac+^{2}acx-cee$, productum ſub extremis, æquale $2aby$, ei, quod fit ſub mediis. Quæ altera eſt Æquatio. Atque ad hæc facienda manuduxerunt nos præcepta jam tradita, ita ut nullæ partes Problematis ſint omiſſæ. Et quicunque omnia penitiùs inſpexerit, ſe ſuo marte propoſitæ quæſtionis ſolutionem ex illis huc uſque perducere potuiſſe judicabit. Difficultas enim tota jam à figuris ad numeros ſeu terminos Analyticos eſt traducta, ita ut, quæ ſuperſunt, cuilibet obvia eſſe poſſint, etiamſi de lineis, punctis, angulisque ampliùs non

Digitized by Google

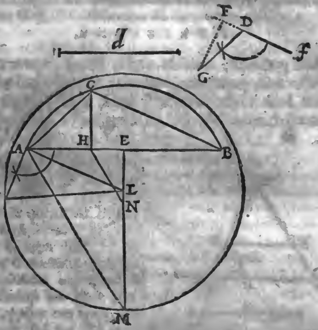


non cogitet. Inventis ergo tot Æquationibus, quot ſuppoſitæ fuerunt incognitæ lineæ; quoniam in utraque binæ reperiuntur quantitates incognitæ; hinc talis reductio fieri debet, ut ex una parte tantùm habeatur xx, ut ſequitur. Quocirca cum primùm $2a^3 + 2axx + 2ayy$ æquetur $4ady$, dividatur utraque pars per $2a$, & fit æquatio inter $aa + xx + yy$ & $2dy$; & aa, yy in alteram partem translatis, inter xx & $2dy - yy - aa$. Deinde cum $2aac + 2acx - cee$ æquetur $2aby$, reſtituto valore quantitatis aſſumptæ ee, ipſoque ducto in $-c$, prodibit æquatio $aac - cxx - cyy \infty 2aby$. In qua ſi fiat porrò terminorum tranſpoſitio, ut cxx unam teneat Æquationis partem ſub ſigno + & reliqui partem alteram, atque utraque pars per c dividatur, proveniet Æquatio $xx \infty aa - yy - \frac{2ab}{c}y$, ſeu $xx \infty aa - yy - 2fy$, (ſcribendo nempe $2f$ pro $\frac{2ab}{c}$: quandoquidem liberum eſt quolibet nomine datas quantitates inſignire.)

Reductâ ergo utrâque Æquatione inventâ ad eandem quantitatem xx, adæquandæ ſunt reliquæ quantitates inter ſe, ut inveniatur inde quantitas incognita y. Quare cum $2dy - yy - aa$ æquetur $aa - yy - 2fy$, additis utrinque yy & aa, erit $2dy \infty 2aa - 2fy$, ſeu, $dy \infty aa - fy$: & tranſlato fy ad alteram partem, factâque utrobique diviſione per $d + f$, fiet $y \infty \frac{aa}{d+f}$. Inventâ autem quantitate y, non eſt difficile alteram quantitatem incognitam x invenire. Si enim in præcedenti æquatione $xx \infty 2dy - yy - aa$, pro

Digitized by Google

pro y ſubſtituatur ſumma jam inventa $\frac{a2}{d+f}$, & pro yy ejuſdem ſummæ quadratum, nempe $\frac{a4}{d2+2df+f2}$, invenietur $xx \propto \frac{a2d2-a2f2-a4}{d2+2df+f2}$ & $x \propto \sqrt{\frac{a2d2-a2f2-a4}{d2+2df+f2}}$. Ubi liquet, dd non debere eſſe minorem quàm $ff+aa$, cum aliàs Problema futurum eſſet impoſſibile. Cujus quidem conſtructio talis eſt.



Facto angulo KAB æquali dato D, erigatur ex A ipſi KA perpendicularis AL, occurrens perpendiculari EL in L, centroque L intervallo rectæ d circulus deſcribatur, ſecans KA, EL in K & M. Deinde aſſumptâ EN æquali KA, jungatur MA, & ex N agatur huic parallela NH, quæ ipſi AB occurrat in H. Poſtea deſcripto ex L intervallo LA circuli ſegmento ACB, ducatur ex H ipſi AB perpendicularis HC, occurrens cir-

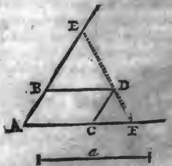
Digitized by Google

cumferentiæ in C, ac jungantur AC, CB. Factumque erit, quod requirebatur.

GG *Vel ſi totidem non inveniantur, nec tamen quidquam eorum, quæ in quæſtione deſiderantur, omittatur, argumentum eſt, illam non penitus eſſe determinatam. Tunc enim ad arbitrium aſſumi poſſunt lineæ cognitæ pro incognitis, quibus non reſpondet aliqua Æquatio.*] Quò cuivis hæc obvia ſint, placuit ea per unum aut alterum Problema facile illuſtrare.

I PROBLEMA.

DAtis poſitione duabus rectis lineis concurrentibus AB, AC, punctum invenire intra ipſas D, à quo ſi ducantur duæ rectæ DC, DB ipſis AB, AC parallelæ, ut ſumma ipſarum DC, DB ſit datæ rectæ a æqualis.



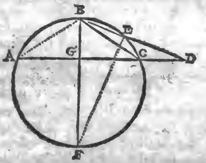
Ponatur factum quod quæritur, hoc eſt, ſuppoſitis rectis DC, DB, ipſis AB, AC parallelis, ſtatuantur & DC, DB ſimul ſumptæ ipſi datæ a eſſe æquales. Hinc cum ad determinandum punctum D quærenda ſit longitudo utriuſque rectæ AC, CD ſeu utriuſque AB, BD, pono pro una AC, vel BD quantitatem incognitam x, & pro altera CD vel AB quantitatem incognitam y. Quibus ita poſitis, ut habeatur Æquatio, addendæ erunt tantùm duæ rectæ BD, DC, hoc eſt, x & y: eritque ſumma $x + y$ æqualis a, hoc eſt, erit $y \infty a - x$. Quoniam autem ad alteram Æquationem pro x inveniendam nulla ſupereſt materia, cum conditiones in quæſtione præſtandæ jam omnes ſint impletæ: argumentum eſt, illam non penitus eſſe determinatam. Quocirca cum in ipſâ una deſit conditio, ut prorſus determinata exiſtat, poterimus ad arbitrium pro quantitate incognita x, cui nulla reſpondet Æquatio, aſſumere lineam aliquam cognitam ipſâ a minorem, atque tot inde invenire puncta D, quot ipſi x diver

diverſos tribuerimus valores. Ubi notandum, quòd, poſtquam aſſumptæ fuerint rectæ A E, A F ipſi datæ a æquales, ac jungatur E F, puncta hæc omnia in rectam cadant lineam E F, adeoque punctum quodlibet in ea pro libitu ſumptum quæſito ſatisfacere: cum, propter ſimilia triangula A E F & C D F, rectæ C D, C F (puncto D ubicunque in E F aſſumpto) haud aliter atque A E, A F ſemper ſint æquales, ac proinde B D, D C ſimul eædem quæ A C, C F ſimul, hoc eſt, eadem quæ A F vel a.

Haud diſſimilis erit quæſtio, ſi punctum D inveniendum ſit, ita ut ipſarum D C, D B differentia ſit datæ rectæ a æqualis.

II PROBLEMA.

IN circulo A B C F erectâ ſuper diametrum B F perpendiculari G D, circumferentiam hinc inde ſecante in C & A, & à B ad eam ductis B C, B D, quarum hæc circumferentiam ſecet in E, dantur B E ∞ a, & B C ∞ b; oporteatque invenire E D ∞ x.



Quoniam ad quæſtionem hanc ſolvendam, ſupponendo eam, ut jam factam, neceſſariæ videntur lineæ B G ac diameter B F: hinc pro B G pono y, & pro B F pono z: eritque G F ∞ $z-y$. Deinde ut perveniatur ad Æquationem, conſidero lineam G D ipſi B F eſſe perpendicularem, hoc eſt, triangulum B G C eſſe rectangulum. Unde fit, ut, ſi quadratum ex B G ∞ yy auferam è quadrato ex B C ∞ bb, reliquum $bb-yy$ ſit æquale quadrato

Digitized by Google

eſt (quæ quidem facilè ad tales terminos reduci queunt, ut non niſi rectæ quædam lineæ inveniendæ ſint) applicari poſſit; ſed etiam ad Problemata, in quibus certi anguli dantur, vel angulorum inter ſeſe comparatio facienda eſt; atq; ad Problemata in quibus quædam puncta aut lineæ datæ ſunt, & alia puncta inveniri debent, ſe extendat (ſiquidem in his à quæſitis punctis ad data, aut datarum rectarum terminos, aut etiam in datis angulis ad poſitione datas rectæ lineæ duci poſſunt, quæ quæſitorum punctorum loca determinant; in illis autem quæ dictorum angulorum vices gerant, ſicut poſt exemplis planum fiet): facilè conſtat, illam non modò Veterum Analyſin atq; Recentiorum Algebram comprehendere; ſed etiam ad id omne, ubi de quantitatum æqualitate vel proportione inquiritur, adhiberi poſſe, atque adeò tam generalem eſſe, ut nullum non ſuæ artis per univerſam Matheſin ſpecimen edat.

Jam verò poſtquam Problema aliquod ad æquationem eſt perductum, ipſaq; æquatio ad ſimpliciſſimos terminos reducta, ſi quidem id ipſum per Geometriam communem conſtrui poteſt, hoc eſt, ut ad conſtructionem ejus non niſi rectis lineis atq; circulis utamur, prout in ſuperficie aliqua plana deſcribuntur, docet, qualis tunc debeat eſſe æquatio, & quâ ratione radix ejus tam inveniri quàm exprimi poſſit. Atq; ita breviter, quidquid ad planorum Problematum conſtructionem ſpectat, abſolvit.

Ut autem tum præceptionum harum uſui locus ſit, tum verò ejuſdem Methodi facilitas in reſolvendo ac conſtruendo nobili aliquo Problemate eluceat, inquirendam ſibi tandem proponit rationem componendi loci ad tres, quatuor, vel plures lineas: ad quam, velut ſcientiæ culmen, Veteres ut pervenirent, ſummâ curâ elaborarunt.

Et hoc quidem primi Libri Argumentum afferre viſum fuit. Cæterùm loca difficiliora, quæ in eo illuſtranda eſſe duximus, ferè ſunt ſequentia.

COM-

Digitized by Google

COMMENTARII
IN
LIBRUM PRIMUM.

ET *radicum extractio , quæ pro Diviſionis quadam ſpecie haberi poteſt.*] Quandoquidem eadem fermè proportio utrique operationi convenit. Eſt enim in Diviſione , ut quotiens ad unitatem, ſic dividendus ad diviſorem. In extractione verò radicis quadratæ, ut radix, ceu quotiens, ad unitatem; ita datus numerus, ceu dividendus, ad radicem, ceu diviſorem. Adeò ut radicis extractio diviſionis ſpecies ſit cenſenda, in qua diviſor quotienti eſt æqualis; vel etiam, in qua radix inter datum numerum & unitatem eſt media proportionalis. A

Vel etiam ſi una ſit , quæ vocetur unitas.] Per unitatem intellige lineam quandam determinatam, quæ ad quamvis reliquarum linearum talem relationem habeat , qualem unitas ad certum aliquem numerum. B

Ut eò commodiùs ad numeros referatur , quamq; communiter pro libitu aſſumere licet.] Sit enim, exempli gratiâ, datum aliquod rectangulum tranſmutandum in quadratum : ſi pro unitate ſumatur latus unum , quod libuerit , & inter ipſum & reliquum inveniatur media proportionalis; erit ea latus quadrati, dato æqualis. Atque hâc ratione latus alterum vicem gerit alicujus numeri, è quo radix quadrata eſt extrahenda. Adeò ut manifeſtum ſit , Problema propoſitum, nec non mediæ proportionalis inter duas datas lineas inventionem , nihil aliud eſſe, quàm ſi unâ lineâ aſſumptâ pro unitate, ex reliquâ lineâ tanquam numero extrahatur radix quadrata. C

Ut ad ipſas inveniatur quarta, quæ ſit ad alterutram , ut eſt altera ad unitatem , quod idem eſt atque multiplicatio.] In multiplicatione enim eſt : ut productum ad multiplicandum, D

Digitized by Google

ita multiplicans ad unitatem. Vel permutando, ut productum ad multiplicantem, ſic multiplicandus ad unitatem.

E *Vel ut per ipſas inveniatur quarta, quæ ſit ad unam ex illis duabus, ut unitas ad alteram, quod convenit cum Diviſione.*] Eſt namque in Diviſione, ut ſupra annotavimus, ut quotiens ad unitatem, ſic dividendus ad diviſorem. Ac proinde permutando, ut quotiens ad dividendum, ſic unitas ad diviſorem.

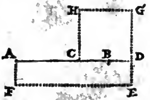
F *Ut ſi radix cubica ſit extrahenda ex aabb — b, cogitandum eſt, quantitatem aabb ſemel diviſam eſſe per unitatem, atque alteram quantitatem b bis per eandem eſſe multiplicatam.*] Puta unitatem, quæ hìc ſubintelligitur, eſſe c. Unde ſi quantitas $aabb$, quæ unâ abundat dimenſione, ſemel dividatur per c, fiet $\frac{aabb}{c}$; at verò altera quantitas b, quæ duabus deficit dimenſionibus, ut æquales numero habeantur, bis multiplicetur per c, hoc eſt, per cc, fiet bcc: adeò ut tota quantitas ſit $\frac{aabb}{c} - bcc$.

G *Reſoluturus igitur aliquod Problema, conſiderabit illud primâ fronte ut jam factum, nominaq; imponet lineis omnibus, quæ ad conſtructionem ipſius neceſſaria videbuntur, tam iis quæ incognitæ ſunt, quàm quæ cognitæ. Deinde, nullo inter lineas haſce cognitas & incognitas facto diſcrimine, evolvenda eſt Problematis difficultas, eo ordine, quo omnium naturaliſſimè patet, quâ ratione dictæ lineæ à ſe invicem dependent, donec inventa fuerit via eandem quantitatem duobus modis exprimendi, id quod Æquatio vocatur: æquales enim ſunt termini modi unius, terminis modi alterius. Jam verò tot hujuſmodi Æquationes invenire oportebit, quot ſuppoſitæ fuerunt incognitæ lineæ.*] Quæ verba ut rectè percipiantur, unum atque alterum Problema proponamus.

PRO-

PROBLEMA 1*mum*.

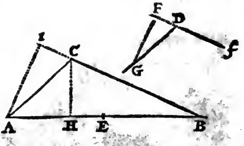
Datam rectam lineam AB, utcunque ſectam in C, ita producere ad D, ut rectangulum ſub AD, DB comprehenſum, æquetur quadrato rectæ CD.



Conſidero rem velut jam factam, hoc eſt, ſuppono rectangulum ADEF æquari quadrato CDGH, quod faciendum proponitur. Deinde, cum omnis quæſtio Geometrica eò reduci poſſit, ut non niſi longitudo alicujus vel aliquarum rectarum ex aliis rectis ſit quærenda, & nemo non videat, ad ejus conſtructionem tantummodo quærendam eſſe lineam BD, omnemque difficultatem in ea invenienda eſſe ſitam; nomina impono lineis tam datis AC, CB, quàm quæſitæ BD. Proinde, pro linea AC pono quantitatem cognitam a; pro CB, b; at pro BD quantitatem incognitam x, fietque AD $a+b+x$, CD autem $b+x$. Quibus peractis, ut ad Æquationem perveniatur, & habeam rectangulum ADEF, duco AD, hoc eſt, $a+b+x$ in DE ſeu DB, hoc eſt, x, quod proinde erit $ax+bx+xx$. Similiter ut inveniatur quadratum CDGH, multiplico CD, hoc eſt, $b+x$ in ſe, fietque $bb+2bx+xx$. Ita ut habeatur æquatio $ax+bx+xx \infty bb+2bx+xx$. Ad quam reducendam tollatur utrinque bx & xx, ſic ut ex una parte remaneat ax, & ex altera $bb+bx$; tum tranſlato bx ad alteram partem ſub contrario ſigno, erit æquatio $ax-bx \infty bb$. Cujus utrâque parte diviſâ per $a-b$, provenit $x \infty \frac{bb}{a-b}$. E quibus patet, lineam quæſitam BD inveniri per diviſionem quadrati lineæ CB per exceſſum, quo linea AC ſuperat ipſam CB, vel etiam per hunc exceſſum, tanquam primam, & lineam CB, tanquam ſecundam, inveniendo tertiam proportionalem BD.

PROBLEMA 2dum.

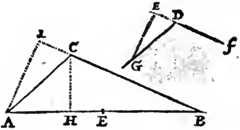
Datâ rectâ lineâ terminatâ AB, ex terminis ejus A & B duas rectas lineas inflectere AC, CB, continentes angulum ACB, æqualem dato D, ut quæ ab ipſis fiunt quadrata, habeant ad triangulum ACB rationem datam, ut $4d$ ad a.



Factum ſit quod quæritur, & ex puncto C demittatur ſuper rectam AB perpendicularis CH. Quoniam igitur data ſunt puncta A & B; & quidem ad trium punctorum ſitum determinandum nihil ſimplicius haberi poteſt, quàm ſi noſcantur tres lineæ AH, HC, & HB: facilè conſtat, quæſtionem propoſitam eò reduci, ut inveniendæ tantùm ſint duæ lineæ AH, HC, ſeu BH, HC; atque adeò duas ſupponendas eſſe lineas incognitas. Quia verò, ſectâ lineâ AB bifariam in E, datum eſt punctum E, atque ideo ipſa AE vel EB, quam voco a, atque operatio aliquantò brevior evadit, ſi loco dictarum AH, HC, ſeu BH, HC, quæramus duas lineas HE, HC: Idcirco pro HE pono quantitatem incognitam x, & pro HC quantitatem incognitam y. Unde pro AH invenitur $a - x$, & pro HB $a + x$. Jam inter lineas notas & ignotas nullo facto diſcrimine, directè percurrenda eſt Problematis difficultas, & videndum, quomodo una ex aliis ſit deducenda, donec tandem ad Æquationem deveniatur. Primò igitur quadratum ex AC erit $aa - 2ax + xx + yy$: quo-

quoniam componitur ex duobus quadratis linearum AH & HC. Eodem modo quadratum lineæ CB erit $aa+2ax+xx+yy$: quia æquale eſt binis quadratis ex BH & HC. Atque adeò ſumma quadratorum ex AC, CB erit $2aa+2xx+2yy$. Quæ cum eam rationem habeat ad triangulum ABC, quod eſt ay, (utpote æquale ſemiſſi ejus, quod producitur ex baſi AB & perpendiculo CH,) quam habet $4d$ ad a: erit productum ex $2aa+2xx+2yy$ in a æquale ei, quod provenit ex ay in $4d$, hoc eſt, habebitur Æquatio inter $2a^3+2axx+2ayy$ & $4ady$. Sed quandoquidem duæ ſuppoſitæ ſunt incognitæ lineæ x & y, alia adhuc ſupereſt Æquatio invenienda. Quam ut inveniamus, conſiderandus inſuper eſt angulus D, cui æqualis ſupponitur angulus ACB; qui ſi obtuſus fuerit, produco lineam BC, donec ex puncto A in ipſam cadat perpendicularis AI, omnino ut factum eſt circa angulum D. Tum, quoniam datus eſt angulus D, dantur quoque rectæ DF & FG. Ac proinde ſi pro DF ponatur b, & pro FG c, gerent ipſæ vicem dati anguli D, fientque triangula ACI & GDF ſimilia. Eâdem ratione ſimilia erunt triangula HCB & ABI. Unde erit ut CB ad AB, ſic CH ad AI, & BH ad BI. Quare ſi pro quadrato ex CB $\propto aa+2ax+xx+yy$ brevitatis causâ ſcribatur ee, h. e., pro CB $\propto \sqrt{aa+2ax+xx+yy}$ ponatur e; fiatque ut e ad $2a$, ſic CH ſeu y ad AI: erit AI $\propto \frac{2ay}{e}$. Similiter ut e ad $2a$, ſic BH, ſeu $a+x$, ad BI: erit BI $\propto \frac{2aa+2ax}{e}$. Tum ſubductâ BC ſeu e ex BI ſeu $\frac{2aa+2ax}{e}$, relinquitur CI $\frac{2aa+2ax-ee}{e}$. Jam cum CI ſit ad AI, hoc eſt, $\frac{2aa+2ax-ee}{e}$ ad $\frac{2ay}{e}$, ſeu $2aa+2ax-ee$ ad $2ay$, ſicut DF ad FG, hoc eſt, b ad c: erit $2aac+2acx-cee$, productum ſub extremis, æquale $2aby$, ei, quod fit ſub mediis. Quæ altera eſt Æquatio. Atque ad hæc facienda manuduxerunt nos præcepta jam tradita, ita ut nullæ partes Problematis ſint omiſſæ. Et quicunque omnia penitiùs inſpexerit, ſe ſuo marte propoſitæ quæſtionis ſolutionem ex illis huc uſque perducere potuiſſe judicabit. Difficultas enim tota jam à figuris ad numeros ſeu terminos Analyticos eſt traducta, ita ut, quæ ſuperſunt, cuilibet obvia eſſe poſſint, etiamſi de lineis, punctis, anguliſque ampliùs non

Digitized by Google



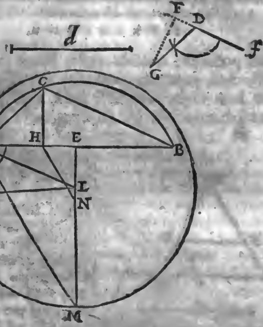
non cogitet. Inventis ergo tot Æquationibus, quot ſuppoſitæ fuerunt incognitæ lineæ; quoniam in utraque binæ reperiuntur quantitates incognitæ; hinc talis reductio fieri debet, ut ex una parte tantùm habeatur xx, ut ſequitur. Quocirca cum primùm ${}^{2}a^{3} + {}^{2}axx + {}^{2}ayy$ æquetur $4ady$, dividatur utraque pars per $2a$, & fit æquatio inter $aa + xx + yy$ & $2dy$; & aa, yy in alteram partem translatis, inter xx & ${}^{2}dy - yy - aa$. Deinde cum ${}^{2}aac + {}^{2}acx - cee$ æquetur $2aby$, reſtituto valore quantitatis aſſumptæ ee, ipſoque ducto in $-c$, prodibit æquatio $aac - cxx - cyy \infty {}^{2}aby$. In qua ſi fiat porrò terminorum tranſpoſitio, ut cxx unam teneat Æquationis partem ſub ſigno $+$ & reliqui partem alteram, atque utraque pars per c dividatur, proveniet Æquatio $xx \infty aa - yy - \frac{2ab}{c}y$, ſeu $xx \infty aa - yy - {}^{2}fy$, (ſcribendo nempe $2f$ pro $\frac{2ab}{c}$: quandoquidem liberum eſt quolibet nomine datas quantitates inſignire.)

Reductâ ergo utrâque Æquatione inventâ ad eandem quantitatem xx, adæquandæ ſunt reliquæ quantitates inter ſe, ut inveniatur inde quantitas incognita y. Quare cum $2dy - yy - aa$ æquetur $aa - yy - {}^{2}fy$, additis utrinque yy & aa, erit $2dy \infty 2aa - {}^{2}fy$, ſeu, $dy \infty aa - fy$: & tranſlato fy ad alteram partem, factâque utrobique diviſione per $d + f$, fiet $y \infty \frac{aa}{d+f}$. Inventâ autem quantitate y, non eſt difficile alteram quantitatem incognitam x invenire. Si enim in præcedenti æquatione $xx \infty {}^{2}dy - yy - aa$,

pro

Digitized by Google

pro y ſubſtituatur ſumma jam inventa $\frac{a^2}{d+f}$, & pro yy ejuſdem ſummæ quadratum, nempe $\frac{a^4}{d^2+2df+f^2}$, invenietur $xx \propto \frac{a^2d^2-a^2f^2-a^4}{d^2+2df+f^2}$ & $x \propto \sqrt{\frac{a^2d^2-a^2f^2-a^4}{d^2+2df+f^2}}$. Ubi liquet, dd non debere eſſe minorem quàm $ff+aa$, cum aliàs Problema futurum eſſet impoſſibile. Cujus quidem conſtructio talis eſt.



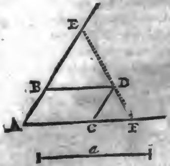
Facto angulo KAB æquali dato D, erigatur ex A ipſi KA perpendicularis AL, occurrens perpendiculari EL in L, centroque L intervallo rectæ d circulus deſcribatur, ſecans KA, EL in K & M. Deinde aſſumptâ EN æquali KA, jungatur MA, & ex N agatur huic parallela NH, quæ ipſi AB occurrat in H. Poſtea deſcripto ex L intervallo LA circuli ſegmento ACB, ducatur ex H ipſi AB perpendicularis HC, occurrens cir-

cumferentiæ in C, ac jungantur AC, CB. Factumque erit, quod requirebatur.

GG *Vel ſi totidem non inveniantur, nec tamen quidquam eorum, quæ in quæſtione deſiderantur, omittatur, argumentum eſt, illam non penitus eſſe determinatam. Tunc enim ad arbitrium aſſumi poſſunt lineæ cognitæ pro incognitis, quibus non reſpondet aliqua Æquatio.*] Quò cuivis hæc obvia ſint, placuit ea per unum aut alterum Problema facile illuſtrare.

I PROBLEMA.

DAtis poſitione duabus rectis lineis concurrentibus AB, AC, punctum invenire intra ipſas D, à quo ſi ducantur duæ rectæ DC, DB ipſis AB, AC parallelæ, ut ſumma ipſarum DC, DB ſit datæ rectæ *a* æqualis.



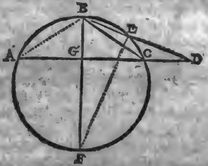
Ponatur factum quod quæritur, hoc eſt, ſuppoſitis rectis DC, DB, ipſis AB, AC parallelis, ſtatuantur & DC, DB ſimul ſumptæ ipſi datæ *a* eſſe æquales. Hinc cum ad determinandum punctum D quærenda ſit longitudo utriuſque rectæ AC, CD ſeu utriuſque AB, BD, pono pro unâ AC, vel BD quantitatem incognitam *x*, & pro altera CD vel AB quantitatem incognitam *y*. Quibus ita poſitis, ut habeatur Æquatio, addendæ erunt tantùm duæ rectæ BD, DC, hoc eſt, *x* & *y*: eritque ſumma $x + y$ æqualis *a*, hoc eſt, erit $y \propto a - x$. Quoniam autem ad alteram Æquationem pro *x* inveniendam nulla ſupereſt materia, cum conditiones in quæſtione præſtandæ jam omnes ſint impletæ: argumentum eſt, illam non penitus eſſe determinatam. Quocirca cum in ipſâ una deſit conditio, ut prorſus determinata exiſtat, poterimus ad arbitrium pro quantitate incognita *x*, cui nulla reſpondet Æquatio, aſſumere lineam aliquam cognitam ipſâ *a* minorem, atque tot inde invenire puncta D, quot ipſi *x* diver

diverſos tribuerimus valores. Ubi notandum, quòd, poſtquam aſſumptæ fuerint rectæ A E, A F ipſi datæ a æquales, ac jungatur E F, puncta hæc omnia in rectam cadant lineam E F, adeoque punctum quodlibet in ea pro libitu ſumptum quæſito ſatisfacere: cum, propter ſimilia triangula A E F & C D F, rectæ C D, C F (puncto D ubicunque in E F aſſumpto) haud aliter atque A E, A F ſemper ſint æquales, ac proinde B D, D C ſimul eædem quæ A C, C F ſimul, hoc eſt, eadem quæ A F vel a.

Haud diſſimilis erit quæſtio, ſi punctum D inveniendum ſit, ita ut ipſarum D C, D B differentia ſit datæ rectæ a æqualis.

II PROBLEMA.

IN circulo A B C F erectâ ſuper diametrum B F perpendiculari G D, circumferentiam hinc inde ſecante in C & A, & à B ad eam ductis B C, B D, quarum hæc circumferentiam ſecet in E, dantur B E ∞ a, & B C ∞ b; oporteatque invenire E D ∞ x.



Quoniam ad quæſtionem hanc ſolvendam, ſupponendo eam, ut jam factam, neceſſariæ videntur lineæ B G ac diameter B F: hinc pro B G pono y, & pro B F pono z: eritque G F ∞ $z - y$. Deinde ut perveniatur ad Æquationem, conſidero lineam G D ipſi B F eſſe perpendicularem, hoc eſt, triangulum B G C eſſe rectangulum. Unde fit, ut, ſi quadratum ex B G ∞ yy auferam è quadrato ex B C ∞ bb, reliquum $bb - yy$ ſit æquale quadrato

ex GC. Quod idem & alio modo inveniri poteſt, conſiderando perpendicularem GD ſecare hinc inde circumferentiam in C & A. Quia enim hinc per 35. Tertii Elementorum rectangulum ſub BG, GF eſt æquale rectangulo ſub AG, GC, hoc eſt, quadrato ex GC: fit ut ſi multiplicavero GF ∞ $z - y$ per BG ∞ y, productum $zy - yy$ ſit denuo quadrato ex GC æquale. Habetur ergo Æquatio inter $bb - yy$ & $zy - yy$, hoc eſt, addendo utrobique yy, inter bb & zy. Porrò cum in hac quæſtione tres ſuppoſitæ ſint incognitæ lineæ, x, y, & z, ſupereſt ut duas adhuc alias Æquationes inveniamus. Hinc, ductâ FE, quoniam, conſiderando lineam BD ſecare circumferentiam in E, ſimilia ſunt triangula BGD & BEF, erit ut BG ad BD, hoc eſt, y ad $a + x$; ita BE ad BF, hoc eſt, a ad z. Ac proinde, cum productum ſub extremis ſit æquale producto ſub mediis, erit $zy \infty aa + ax$. Quæ altera eſt Æquatio. In qua ſi in locum zy ſubrogetur ejus valor ante inventus bb, habebitur $bb \infty aa + ax$, hoc eſt, transferendo aa in alteram partem, atque deinde utrobique dividendo per a, erit $x \infty \frac{bb - aa}{a}$. Quæ quantitas lineæ ED, quam inveſtigare intendebamus. Cæterùm, quia inventâ hâc lineâ ED ∞ x, utraque reliquarum incognitarum BG & BF, per y & z deſignatarum, quæ ad eam inveniendam neceſſariæ videbantur, ad arbitrium ſumi poteſt, cum in Problemate nulla ampliùs materia ſuperſit, quâ perveniatur ad Æquationes, quibus utraque ipſarum determinari queat, atque idcirco difficultas omnis Problematis jam ſit evoluta: indicio eſt, rectam ED eandem ſemper inveniri, etiamſi ad illam quærendam pro utraque Linearum BG, BF diverſa magnitudo accipiatur, hoc eſt, alius atque alius circulus adhibeatur: quandoquidem Problema, ſi de linearum BG, BF longitudine ex datis BE, BC inveſtigandâ quæritur, haud determinatum exiſtit, ſed tantùm ipſius ED.

Qui plura in loci hujus illuſtrationem exempla deſideret, videat quæ ad literam G ſecundi libri à nobis ſunt allata.

GGG *Poſtea verò ſi plures adhuc ſuperſint, ordine quoque utendum erit unaquaque Æquationum reliquarum, ſive illam conſiderando ſeparatim, ſive ipſam comparando cum aliis, ad explicandam unamquamque ex incognitis lineis.*] Sic, quoniam, reducto

ducto Problemate aliquo, in quo ad ipſum conſtruendum tres ſupponendæ ſunt incognitæ lineæ x, y, & z, ad duas Æquationes $xx \infty \begin{array}{l}+2c\\+2z\end{array} x \begin{array}{l}+bb\\-cc\\-yy\\-2cz\end{array}$; & $yy \infty aa + 2zx - xx$, pro incognita linea z, cui nulla reſpondet Æquatio; ad arbitrium ſumi poteſt linea cognita d: potero in locum duarum præcedentium Æquationum ſcribere $xx \infty \begin{array}{l}+2c\\+2d\end{array} x \begin{array}{l}+bb\\-cc\\-yy\\-2cd\end{array}$, & $yy \infty aa + 2dx + xx$. Hinc cum duæ ſuperſint lineæ inveniendæ x & y; ordine quoque utenda erit unaquâque Æquationum reliquarum $xx \infty \begin{array}{l}+2c\\+2d\end{array} x \begin{array}{l}+bb\\-cc\\-yy\\-2cd\end{array}$, & $yy \infty aa + 2dx - xx$; ſive eas conſiderando ſeparatim, ſive unam cum altera comparando; ad explicandam unamquamque ex incognitis lineis. Quocirca conſiderando ſeparatim Æquationem $yy \infty aa + 2dx - xx$, cum quantitatibus $+aa$ & $-xx$ ad alteram partem ſub contrario ſigno translatis, fiat $2dx \infty yy + xx - aa$: hinc ſi in altera Æquatione $xx \infty \begin{array}{l}+2c\\+2d\end{array} x \begin{array}{l}+bb\\-cc\\-yy\\-2cd\end{array}$ pro $2dx$ ſubſtituatur $yy + xx - aa$; habebo Æquationem $xx \infty + 2cx + yy + xx - aa + bb - cc - yy - 2cd$. Hoc eſt, demptis æqualibus, ordinatâque æqualitate, habebitur $2cx \infty aa + cc - bb + 2cd$. Et fit, diviſâ utrâque æqualitatis parte per $2c$, $x \infty \frac{aa + cc - bb + 2cd}{2c}$. Oſtendens quâ ratione linea incognita x ex cognitis a, b, c, & ex ad arbitrium ſumendâ d ſit invenienda. Inventâ autem lineâ x; ut habeatur yy oportet tantùm in Æquatione ſuperiori $yy \infty aa + 2dx - xx$ in locum x ſubrogare valorem inventum $\frac{aa + cc - bb + 2cd}{2c}$, & in locum xx hujus valorem, & fit $yy \infty \frac{2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4 + 4ccdd}{4cc}$. Un-

de, extractâ radice, invenitur

$y \infty \sqrt{\frac{2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4 + 4ccdd}{4cc}}$. Exhibens quo pacto linea incognita y ex cognitis a, b, c, & ex ad arbitrium ſumenda d, obtineri poſſit.

Cæterùm quoniam in Problemate, ad præcedentes Æquationes reducto, propter lineam d, quæ hîc modò major modò minor ad arbitrium ſumi poteſt, lineæ quoque x & y inde majores ac minores evadunt, atque ob id Problema non determinatum exiſtit, ſed infinitas recipit ſolutiones: Jubet & alterum Problema, quod omnino determinatum eſt, atque in cujus ſolutione, ad unumquemque ex quæſitis numeris inveſtigandum, unam Æquationem cum aliâ comparavimus, in medium afferre.

PROBLEMA.

INvenire duos numeros, quorum ſumma multiplicata per ſummam ſuorum quadratorum faciat 715; & differentia per differentiam eorundem quadratorum faciat 99.

Suppoſito Problemate tanquam jam facto, pono pro majori numero quæſito $x + y$, & pro minori $x - y$: eritque ſumma quæſitorum numerorum $\infty\, 2x$, & eorundem differentia $\infty\, 2y$.

Jam quia $x + y$ & $x - y$ in ſe ducti faciunt $xx + 2xy + yy$ & $xx - 2xy + yy$, quorum ſumma eſt $2xx + 2yy$ & differentia $4xy$: reſtat ut $2xx + 2yy$ multiplicata per $2x$, & $4xy$ per $2y$, producta $4x^3 + 4xyy$ & $8xyy$ ſint datis numeris 715 & 99 æqualia.

Quocirca inventis duabus Æquationibus $4x^3 + 4xyy \infty 715$ & $8xyy \infty 99$, ut ex iis obtineatur uterque numerus incognitus x & y, comparo unam Æquationem cum altera: multiplicando primùm utramque partem prioris per 2, & fit $8x^3 + 8xyy \infty 1430$, ac deinde ex ea ſubtrahendo poſteriorem $8xyy \infty 99$, & relinquitur $8x^3 \infty 1331$. In quâ, ſi utrobique extrahatur radix Cubica, habebitur $2x \infty 11$, & fit $x \infty 5\frac{1}{2}$.

Poſtea ad inveniendum y dividatur Æquatio poſterior $8xyy \infty 99$ per jam inventam $2x \infty 11$, & orietur Æquatio $4yy \infty 9$.

In

Digitized by Google

In qua ſi utrinque extrahatur radix quadrata, habebitur $^{2}y \propto 3$, & fit $y \propto 1\frac{1}{2}$.

Cæterùm invento utroque numero incognito x & y, quoniam pro majori quæſitorum poſueramus $x + y$ & pro minori $x - y$: erit major $\propto 7$, & minor $\propto 4$. Et ſolutum erit problema.

Atque ita reducendo illas, efficere oportet, ut tantùm una remaneat, æqualis alteri cognitæ, aut cujus quadratum, ſive cubus, ſive quadrato-quadratum, ſive ſurdeſolidum, ſive quadrato-cubus &c. æqualis ſit ei, quod provenit ex additione vel ſubtractione duarum pluriúmve aliarum quantitatum, quarum una quidem cognita ſit, reliquæ autem compoſitæ ex quibusdam mediis proportionalibus inter unitatem & dictum quadratum, ſive cubum, ſive quadrato-quadratum, &c. multiplicatis per alias cognitas. Quod hoc pacto deſigno H

$$z \propto b, \text{ aut}$$
$$zz \propto -az + bb, \text{ aut}$$
$$z^3 \propto +azz + bbz - c^3, \text{ aut}$$
$$z^4 \propto +az^3 + bbzz - c^3z + d^4, \&c.]$$

Hoc eſt, z, quam pro quantitate incognita ſumo, eſt æqualis quantitati cognitæ b. Aut quadratum lineæ z eſt æquale ei, quod provenit ſubtrahendo az ex bb: quarum quidem bb cognita eſt; ſed az compoſita ex z media proportionali inter unitatem & quadratum zz, ut ſupra explicavimus, & ex quantitate cognita a. Aut cubus lineæ z æqualis eſt ei, quod provenit ex additione & ſubtractione trium quantitatum azz, bbz, & c^3; quarum quidem c^3 cognita eſt; at bbz compoſita ex z, prima duarum mediarum proportionalium inter unitatem & cubum z^3, & ex quantitate cognita bb; ac denique azz, compoſita ex zz, ſecunda dictarum mediarum, & ex quantitate cognita a. Atque ſic de cæteris.

Ubi notandum eſt, per quantitates cognitas, intelligendas eſſe eas, quæ in quæſtione vel datæ ſunt, vel per certas operationes datarum quantitatum, jam traditas & notas, ſic præparatæ ſunt, ut pro cognitis ſive datis ſint habendæ, atque quæſitis ſive incognitis æquiparandæ.

Sic cùm ponitur $z \propto b$, indicatur lineam incognitam, quæ per

Digitized by Google

per z deſignatur, æqualem eſſe alicui ex cognitis, quæ deſignatur per b. Quod quidem rarò contingit, cum incognitæ lineæ plerunque aliqua operatione ſeu præparatione cognitarum linearum indigeant, antequam cognitis evadant æquales.

Ut, ſi fuerit $z \propto \frac{cd}{e}$. Aſſumptâ pro unitate alterutrâ quantitatum c, d, quæ in ſe invicem ductæ numeratorem conſtituunt, dividenda eſt reliqua per denominatorem, ſive quantitatem e (quemadmodum ſuperiùs eſt oſtenſum); eritque quotiens diviſionis æqualis quantitati incognitæ z.

Eodem modo ſi habeatur $z \propto \frac{cc+cd}{e-f}$ erit ut $e-f$ ad $c+d$, ita c ad z; ſive ut $e-f$ ad c, ita $c+d$ ad z.

Et ſi ſit $z \propto \frac{cc-dd}{e+f}$, erit $e+f$ ad $c+d$, ſicut $c-d$ ad z; vel $e+f$ ad $c-d$, ſicut $c+d$ ad z.

Necnon ſi habeatur $z \propto \frac{cd+ef}{g}$, & fiat, ut c ad e, ſic f ad quartam, quæ vocetur h: poterit pro ef ſcribi ch, atque adeò loco $\frac{cd+ef}{g}$ ſubſtitui $\frac{cd+ch}{g}$. Ubi deinde ſi fiat ut g ad c, ſic $d+h$ ad quartam: ſive permutando (quod eodem recidit) ut g ad $d+h$, ſic c ad quartam, quam vocare lubet b: erit $z \propto b$. Id quod & aliis modis præſtari poteſt.

Non ſecus ſi ſit $z \propto \frac{cdef}{ade-agh}$, & ſtatuatur eſſe ut a ad c, ſic e ad quartam, quæ ſit i; erit $ai \propto ce$, ita ut pro $\frac{cdef}{ade-agh}$ ſcribi poſſit $\frac{adif}{ade-agh}$ ſeu $\frac{dif}{de-gh}$. Rurſus ſi ponamus eſſe ut d ad g, ſic h ad quartam, quæ ſit k: erit $dk \propto gh$, ita ut in locum $\frac{dif}{de-gh}$ ſubrogari poſſit $\frac{dif}{de-dk}$ ſeu $\frac{if}{e-k}$. Ubi denuo ſi fiat, ut $e-k$ ad i, ita f ad quartam, quam vocabo b; fiet ut ſupra $z \propto b$. Quod idem variis modis fieri poteſt.

Denique ſit $z \propto \frac{acdd-aacc}{d^3+acd}$. Supponendo eſſe ut a ad d, ita d ad quartam, quæ nominetur e: erit $ae \propto dd$: poteritque pro $\frac{acdd-aacc}{d^3+acd}$ ſubſtitui $\frac{aace-aacc}{aed+acd}$ ſeu $\frac{ace-acc}{ed+cd}$. Rurſus ſtatuendo eſſe ut $e+c$ ad $e-c$, ſic c ad quartam quæ appelletur f, fiet

fiet $\frac{ee-cc}{e+c} \propto f$: licebitque pro $\frac{aee-acc}{ed+cd}$ reponere $\frac{af}{d}$. Ubi demum ſi fiat ut d ad f, ita a ad quartam, quæ vocetur b, fiet rurſus, ut ſupra, $z \propto b$. Quod ſimiliter pluribus modis expedire licet. Atque ita de cæteris.

E quibus conſtat, quantitatem incognitam z, poſt hujuſmodi operationes atque cognitarum lineatum requiſitas præparationes, eò reduci poſſe, ut ſub una ſemper ſpecie efferatur, & alteri cognitæ dicatur æqualis.

Notandum autem, huc quoque referendas eſſe æquationes in quibus quantitatis incognitæ quadratum, aut cubus, aut quadrato-quadratum, &c. æquatur quantitati alicui cognitæ, abſque additione vel ſubductione aliarum quantitatum, quæ componuntur ex quibuſdam mediis proportionalibus inter unitatem & dictum quadratum, aut cubum, aut quadrato-quadratum &c. multiplicatis per alias cognitas. Ubi incognita quantitas, extrahendo tantùm aliquam radicem, inveniri poteſt. Ut cùm zz æquatur aq. Suppoſitâ lineâ a pro unitate, erit radix quadrata extracta ex linea q, ut ſuperiùs eſt oſtenſum, (nimirum inveniendo inter lineas a & q mediam proportionalem,) æqualis quæſitæ lineæ z, quæ hoc modo denotatur: $z \propto \sqrt{aq}$. Ubi apparet, quæſtionem per hanc extractionem, dum planum aq transmutatur in quadratum bb, cujus latus eſt b, eò eſſe reductam, ut incognita quantitas alteri cognitæ dicatur æqualis.

Eodem modo ſi z^3 æquetur aaq, & quæratur z. Aſſumptâ rurſus a pro unitate, erit extracta ex q radix cubica, hoc eſt, inventarum inter a primam & q quartam duarum mediarum proportionalium (ut tertio libro oſtenditur) prior, radici quæſitæ z æqualis. Deſignabitur autem hoc pacto: $z \propto \sqrt{C.\, aaq}$. Ubi ſimiliter conſtat, quòd, dum hâc operatione ſolidum aliquod, utpote aaq, reſolvitur in cubum b^3, & utrobique deinde extrahitur radix cubica, z rurſus fiat ipſi b æqualis.

Nec aliter evenit cùm $z_4 \propto aaqq$. Etenim dum extrahitur utrinque radix quadrato-quadrata ſeu bi-quadrata, hoc eſt, poſtquam radix ſemel extracta, dat $zz \propto aq$, eadem adhuc ſemel repetita radicis extractio, dabit $z \propto \sqrt{aq}$, ſive, ſupponendo aq in quadratum bb eſſe converſum, $z \propto b$. Atque ita ulteriùs in infinitum.

Digitized by Google

Porrò advertendum eſt, ſi quantitates cognitæ, ex quibus radix aliqua extrahi debet, ſub alia ſpecie, quàm hic expoſitum fuit, oblatæ fuerint (ut ſi ex $aa+bb$, aut ex $\frac{aadd-aaff-a4}{dd+2df+ff}$ &c. extrahenda ſit radix quadrata): quòd tunc facile fit, non ſolùm per ea, quæ jam tradita ſunt, ſed & aliis modis quantitates datas in alias tranſmutare: ita ut non aliter ex illis radices extrahendæ ſint, ac ſi ex quantitate aq extrahendæ forent. Quod & de radice cubica, quadrato-quadrata, aliiſque in infinitum, eſt intelligendum.

I *Atque ideo ſufficiet vos monere, ſi quis in reducendis hiſce æquationibus non omiſerit uti diviſionibus omnibus, quæ fieri poſſunt, &c.*] Ubi notandum, inter quatuor operationum ſpecies, Additionem & Subtractionem non reddere terminos alicujus quæſtionis difficiliores, quippe quos tantùm ſignis + vel — conjungunt aut disjungunt; quæ quidem ſigna diverſa genera non conſtituunt. Multiplicationem verò quod attinet, ea eſt, quâ termini involvuntur vel intricantur, & dimenſiones augentur; quæ contra Diviſione extricantur & minuuntur. Idem de radicum extractione intellige, quæ, ut ſupra dictum fuit, diviſionis tantùm ſpecies eſt habenda. Adeò ut ad inveniendos terminos ſimpliciſſimos ad quos quæſtio aliqua reduci queat, maximopere obſervandum ſit, ut in reducendis Æquationibus, omnes diviſiones atque extractiones, quæ fieri poſſunt, tentemus. Cujus rei exemplum non inelegans ſuggerere poteſt demonſtratio proprietatis Parabolæ tertio libro adducta.

K *Erit tota O M æqualis z, linea quæſita. Quæ quidem ſic exprimitur: $z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$.*] Sciendum hìc eſt, æquationem propoſitam $zz \propto az+bb$, juxta ea, quæ habentur lib. III. pag. 69. aliam adhuc habere radicem, minorem quàm nihil, quæ à D. des Cartes falſa appellatur, quæque hìc per lineam P M deſignatur, atque hoc modo exprimitur $z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$. Quemadmodum facilè demonſtrari poteſt. Si enim, poſitâ $z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$, auferatur utrinque $\frac{1}{2}a$, & inde utraque pars $z-\frac{1}{2}a$, & $-\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$ in ſe ducatur quadratè, fiet $zz-az+\frac{1}{4}aa \propto \frac{1}{4}aa+bb$. Ubi ſi demum utrinque dematur $\frac{1}{4}aa$, & $-az$ in alteram partem transferatur, fiet $zz \propto az+bb$.

Erit-

Eritq́ reliqua PM æqualis y, radici quæſita: Ita ut fiat $y \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.] Verùm æquatio $yy \propto -ay + bb$ admittit adhuc aliam radicem, minorem quàm nihil, quæ per lineam OM deſignata ita exprimitur, $y \propto -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Cujus demonſtratio ad exemplar præcedentis fieri poteſt. L

Nec aliter ſit, ſi proponatur $x^4 \propto -axx + bb$, *PM enim eſſet xx, & haberetur* $x \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$.] M
Quoniam enim $x^4 \propto -axx + bb$, transferendo $-axx$ in alteram æquationis partem, erit $x^4 + axx \propto bb$. & additâ utrique parti $+\frac{1}{4}aa$, proveniet $x^4 + axx + \frac{1}{4}aa \propto \frac{1}{4}aa + bb$. Jam verò extractâ utrobique radice, invenietur $xx + \frac{1}{2}a \propto \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. ac proinde tranſponendo $+\frac{1}{2}a$, ut xx unam conſtituat æquationis partem, erit $xx \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Unde extractâ rurſus utrinque radice, fiet $x \propto \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$.

Eodem modo ſi habeatur $z^4 \propto az^2 + bb$, erit $z \propto \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$. Nam cum $z^4 \propto az^2 + bb$, erit per tranſpoſitionem $z^4 - az^2 \propto bb$. Addatur jam utrinque $\frac{1}{4}aa$, fietque $z^4 - az^2 + \frac{1}{4}aa \propto \frac{1}{4}aa + bb$. Unde, extractâ utrobique radice, prodibit $z^2 - \frac{1}{2}a \propto \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, hoc eſt, $z^2 \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, & per conſequens

$$z \propto \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}.$$

Similiter ſi ſit $z^4 \propto az^2 - bb$, erit $z \propto \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}}$, nec non $z \propto \sqrt{\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}}$. Cum enim z^4 æquetur $az^2 - bb$, & per tranſpoſitionem $z^4 - az^2 \propto -bb$; addatur utrinque $\frac{1}{4}aa$, fietque $z^4 - az^2 + \frac{1}{4}aa \propto \frac{1}{4}aa - bb$. Quare extractâ utrobique radice, emerget $z^2 - \frac{1}{2}a \propto \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, hoc eſt, $z^2 \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, ac per conſequens $z \propto \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}}$. Porrò, quoniam radix ex $z^4 - az^2 + \frac{1}{4}aa$ eſt quoque $\frac{1}{2}a - z^2$ hinc & $\frac{1}{2}a - z^2 \propto \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, hoc eſt, $z^2 \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, ac per conſequens

$$z \propto \sqrt{\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}}.$$

Cæterùm ut Geometricè inveniantur harum æquationum radices, ſciendum eſt, quòd, dum omnes termini non æquè multas habent dimenſiones, toties illic, ubi numero pauciores habentur, ſubintelligenda ſit unitas, quoties requiritur; ut in æquatione $x^4 \infty - axx + bb$. Quia in termino axx tres duntaxat dimenſiones reperiuntur, & in termino bb tantùm duæ, cogitandum eſt, terminum axx, ut dimenſiones fiant æquales, ſemel per unitatem eſſe multiplicatum, terminum autem bb bis. Adeò ut, ſi pro unitate accipiamus c, æquatio ſit $x^4 \infty - caxx + ccbb$. Verùm expedit unitatem illam tantiſper diſſimulare, & æquationem hanc $xx \infty - ax + bb$ uſurpare, donec radicem ejus Geometricè, ut traditum eſt, invenerimus, nimirum lineam PM, quæ exprimitur hoc pacto: $x \infty - \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Ita ut deinde tantùm opus ſit ex $-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ extrahere radicem quadratam ſeu inter inventam lineam PM & unitatem c invenire mediam proportionalem, ut Geometricè obtineatur radix $x \infty \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$. Atque ita in aliis.

Unde liquidò conſtat, ad inveniendas harum æquationum radices, nihil aliud requiri, quàm quod circa priores tres Æquationum formulas, & radicis quadratæ extractionem Auctor præcepit. Adeò ut hinc ſimul manifeſtum ſit, quo pacto, poſtquam ſic linea aliqua pro unitate aſſumpta vel concepta fuerit, (quemadmodum hujus Geometriæ methodus requirit) Problemata omnia Geometriæ communis, hoc eſt, quæ rectarum linearum & circulorum beneficio conſtrui poſſunt, per ea tantùm, quæ ab Authore per 4 figuras 1mi libri expoſita ſunt, expediri queant, quemadmodum pag. 7. monuit.

N *Quod ſi circulus, centrum ſuum habens in puncto N, tranſienſque per punctum L, non ſecet nec tangat lineam rectam MQR, nullam itidem Æquatio radicem admittet, ita ut inde aſſerere liceat, conſtructionem Problematis propoſiti eſſe impoſſibilem.*] Quod itidem ex Æquatione cognoſci poteſt. Nam cum Æquatio ſit certum medium, quo Problema aliquod reſolvitur, ſanè, ſi reſolvendo incidimus in æquationem impoſſibilem, argumentum eſt, Problema quoque eſſe impoſſibile. Arguitur autem impoſſibilitas illa ex contradictione, quam involvit,

Digitized by Google

vit, cùm nempe in ea ſtatuitur minor quantitas æquari alicui majori, vel cùm jubemur ad eam reſolvendam aliquid præſtare, quod fieri nullo modo poteſt, ut quantitatem aliquam majorem à minore ſubducere. Quemadmodum in æquatione $zz \propto az - bb$. quoniam ad inveniendam radicem z, bb ex $\frac{1}{4}aa$ ſubtrahi debet; oportet ut bb non ſit majus quàm $\frac{1}{4}aa$, ſive ut b non ſit majus quàm $\frac{1}{2}a$. Aliàs enim radix ejus ſic explicari non poſſet, & æquatio impoſſibilis foret. Quod & ex ejuſdem conſtitutione licet agnoſcere, ſi in ea duæ ſint radices veræ. Si enim ponamus $z \propto c$, ſeu $z - c \propto 0$, itemque $z \propto d$, ſeu $z - d \propto 0$, atque deinde multiplicemus $z - c \propto 0$ per $z - d \propto 0$, exſurget æquatio

$z^2 \begin{smallmatrix}-c\\-a\end{smallmatrix} z + cd \propto 0$, ſeu $zz \propto \begin{smallmatrix}+c\\+d\end{smallmatrix} z - cd$. In qua ſi $+c+d$ interpretemur per $+a$, & $+cd$ per $-bb$, habebimus æquationem propoſitam, $zz \propto az - bb$. Adeò ut conſtet æquationem hanc duas veras radices admittere, ſeu quæ majores ſunt quàm 0, quarum quidem ſumma eſt a, & productum ex earum multiplicatione bb.

Sed ut duas ſemper veras radices recipiat, requiritur, ut bb non ſit majus quàm $\frac{1}{4}aa$, ſeu, b non majus quàm $\frac{1}{2}a$: quoniam maximum productum quod fit ex partibus ipſius a, eſt, cùm a in duas partes æquales dividitur. Ubi notandum, quòd ubi $bb \propto \frac{1}{4}aa$, $\frac{1}{2}a$ eſſe z, quæ quæritur, atque æquationem eo caſu unam tantùm ſortiri radicem, aut duas quidem, ſed æquales. At verò bb exiſtente majore quàm $\frac{1}{4}aa$, æquationem eſſe impoſſibilem, nec ullam admittere radicem. Id quod ſimiliter de æquatione

$zz \propto -az - bb$ eſt intelligendum, quæ de duabus falſis radicibus eſt explicabilis. Ut patet ex ejus conſtitutione. Etenim ponendo $z \propto -c$ ſeu $z + c \propto 0$, nec non $z \propto -d$ ſeu $z + d \propto 0$, & multiplicando $z + c \propto 0$ per $z + d \propto 0$: proveniet Æquatio

$$zz \begin{smallmatrix}+c\\+d\end{smallmatrix} z + cd \propto 0, \text{ ſeu } zz \propto \begin{smallmatrix}-c\\-d\end{smallmatrix} z - cd.$$

In qua ſi interpretemur $-c-d$ per $-a$, & $-cd$ per $-bb$, emerget æquatio propoſita $zz \propto -az - bb$. Cujus porrò radices Geometricè inveniuntur perinde atque Æquationis præcedentis. quæ denique ſic exprimuntur $z \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, & $z \propto -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

Cæterùm quod ad duas reliquas æquationes attinet, primam

 vide-

videlicet $zz \infty az + bb$, & ſecundam $yy \infty - ay + bb$, eæ nulli determinationi ſunt obnoxiæ, & ſemper per duas radices explicari poſſunt, unam veram & alteram falſam. Ut ſi ponatur $z \infty c$, ſeu $z - c \infty 0$, & $z \infty - d$, ſeu $z + d \infty 0$, & multiplicetur $z - c \infty 0$ per $z + d \infty 0$; fiet $z^2 \begin{smallmatrix}-c\\+d\end{smallmatrix} z - cd \infty 0$, ſeu $z^2 \infty \begin{smallmatrix}+c\\-d\end{smallmatrix} z + cd$. In qua æquatione ſi ſtatuamus c majorem eſſe quàm d, ita ut exceſſus ſit penes c cum ſigno $+$, atque $+c-d$ interpretemur per $+a$, & $+cd$ per $+bb$, habebimus eandem æquationem, quam priùs, nimirum $z^2 \infty az + bb$. Adeò ut perſpicuum ſit ipſam de duabus inæqualibus radicibus eſſe explicabilem, majore vera & minore falſa. At verò ſi ponamus c minorem quàm d, ita ut exceſſus ſit penes d cum ſigno $-$, atque $+c-d$ interpretemur per $-a$, & $+cd$ per $+bb$; prodibit æquatio ſecundæ formæ: nimirum, $z^2 \infty -az + bb$, quippe quæ à duabus inæqualibus radicibus explicatur, quarum minor eſt vera, major autem falſa. Denique ſi d conſtituatur ipſi c æqualis, deſtruent ſe invicem $+c$ & $-d$, & evaneſcet ſecundus terminus az, & erit Æquatio $z^2 \infty * + bb$, cujus duæ radices, vera $+b$ & falſa $-b$, ſunt æquales.

E quibus omnibus apparet, ad æquationes allatas Geometricè reſolvendas, earumque radices juxta regulas hic traditas commodè explicandas, requiri, ut ultimus terminus deſignetur per bb, aut ad eam formam, ſicut ſuperiùs eſt oſtenſum, reducatur.

AR-

Digitized by Google

ARGUMENTUM
SECUNDI LIBRI.

Secundus liber agit de lineis curvis, earumq; naturam explicat, docendo, quænam illæ ſint, quas in Geometriam recipere oportet, quæq; Geometricæ appellandæ ſunt, itemq; quo pacto poſſint cognoſci. Modus autem eas cognoſcendi in eo conſiſtit, quòd deſcribi poſſint per motum aliquem continuum, vel per plures ejuſmodi motus, quorum poſteriores regantur à prioribus. Verùm enimverò licèt allato modo deſcriptæ curvæ omnes in Geometriam ſint recipiendæ, atq; pro Geometricis agnoſcendæ; tamen ad comprehendendas omnes, quæ ſunt in natura, & ipſas ordine diſtinguendas in certa genera, prout gradatim magis magiſq; in infinitum ſunt compoſitæ, aptiùs quidquam afferri nequit, quàm ut in genere dicatur: illas omnes Geometricas eſſe appellandas, quarum omnia puncta ad omnia lineæ rectæ puncta certam habent relationem, quæ exprimi poteſt per aliquam æquationem, ſe indifferenter ad omnia utriuſq; lineæ puncta extendentem. Et quidem, quòd, cùm æquatio illa ultra rectangulum ſub duabus quantitatibus indeterminatis, (quæ ad dictam relationem explicandam requiruntur) aut ultra quadratum unius ex ipſis non aſcendit, linea curva tunc primi & ſimpliciſſimi ſit generis (in quo tantùm Circulus, Parabola, Hyperbola, & Ellipſis ſunt comprehenſæ.) At verò cùm ipſa ad tres quatuórve dimenſiones adſcendit, quòd illa tunc ſit ſecundi generis. Cùm verò ad 5 aut 6 dimenſiones aſcendit, quòd illa tunc ſit tertii generis. Atque ita porrò in infinitum.

Ubi porrò facile eſt intelligere, quænam ſint, quæ ex Geometria ſint rejiciendæ, & inter Mechanicas ponendæ: Quandoquidem curvæ illæ omnes, quæ inter prædictas non comprehenduntur, ab hac Geometria rejiciuntur. Cujuſmodi ſunt illæ omnes, quæ per motus continuos deſcribi nequeunt, & ubi poſteriores à prioribus non dependent, ſed per duos motus deſcribi concipiuntur, qui ſunt à ſe invicem diſtincti, nullamq; relationem habentes, quæ poſſit exactè menſurari, ſive quarum omnia puncta ad omnia lineæ rectæ puncta relationem non habent, quæ per aliquam æquationem omnibus communem exprimi poſſit.

Poſtquam autem oſtendimus, quo pacto lineæ curvæ ab Auctore diſtinguantur, tam in illas, quas in Geometriam cenſet introducendas, quàm in illas, quas pari jure ab ea cenſet arcendas: ac deniq; quâ ratione illæ in certa

Digitized by Google

certa genera ſint diſtinguenda ; opera pretium videtur ut deinceps ea , quæ Antiqui circa ipſas contemplati fuêre, expendamus. Quæ quidem ex iis, quæ afferuntur à Pappo ad propoſitionem 4^tam libri tertii, ut & ad prop^nem 30 libri quarti Collectionum Mathematicarum , haud difficulter colligi poſſunt. Ubi, poſtquam explicavit , Problematum Geometricorum tria ab Antiquis genera fuiſſe conſtituta , quorum alia dicuntur Plana , alia Solida , alia denique Linearia ; nimirum prout quædam ex ipſis ſolvi poſſunt , deſcribendo tantùm rectas lineas & circulorum circumferentias ; & alia , quæ conſtrui nequeunt , quin ad minimum adhibeatur aliqua Conica ſectio ; & reliqua denique quin in conſtructionem aſſumatur alia demum curva linea : Tandem de duarum mediarum inventione loquitur , quas inquit Geometricâ rationi innixos invenire non potuiſſe. Quorum quidam , aſſerentes , Problema ſolidum eſſe , reſolutionem per Conicas ſectiones , ſive ſolidos locos , fecerunt ; alii autem per alias curvas, ſive locos lineares ; ac alii deniq; conſtructionem ejus inſtrumentis tantùm perfecerunt. Nullum autem eorum fuiſſe, qui reſolutionem per locos planos , ſive rectas lineas & circulares, abſolverit.

Ubi apparet , quòd tantummodò conſtructiones illas Geometricas appellaverint , quæ per rectas lineas & circulorum circumferentias perficiebantur ; quodq; conſtructiones in genere non aliter reſpexerint , quàm quatenus ipſarum perfectio à manuum dexteritate & inſtrumentorum perfectione proficiſceretur. Unde cum ad planorum Problematum conſtructiones non niſi rectas lineas & circulorum circumferentias adhibendas eſſe viderent , quæ omnium facillimè atq; expeditiſſimè regula & circini beneficio (utpote per inſtrumenta omnino ſimplicia) in plano deſcribuntur , & ſectiones Conicas reliquasq; curvas lineas , varium & difficilem ortum habentes , in plano deſignare difficile exiſtimarent, ideoq; deſcriptionem earum minus certam ſtatuerent ; factum inde quoq; , ut ſolam Planorum conſtructionem , Geometricam pronuntiarent : adeoq; non niſi rectas lineas & circulares, reliquas verò non item , pro Geometricis agnoſcerent. Quod quare ita diſtinxerint , non video. Quandoquidem rectas lineas & Circulos perinde atq; Parabolas , Hyperbolas , & Ellipſes ex Cono ſecari poſſe ab Apollonio ſcio oſtenſum. Qui porrò poſtquam plurimas proprietates tribus hiſce ſectionibus pariter atq; Circulo convenire oſtendit , & quidem propter mirificas Conicorum Theorematum demonſtrationes , cum non ſolùm illâ tempeſtate , verùm etiam ſequentibus ſæculis, magnus Geometra ſit appellatus, non apparet quam ob cauſam prædicta linea non æquè ac recta & circulares pro Geometricis fuerint habita. Adeò ut non ſolùm Veteribus illis , ſed etiam Vieta ejusq; aſſeclis aſſentiri nequeam , dum Geometria defectum hîc ſuſpicantes , neq; Hyperbolas , neq; Para-

Digitized by Google

Parabolas κατ' ἐπιστημονικὸν λόγον *in Geometricis deſcribi aſſeverant, ac proinde Menæchmi inventionem duarum mediarum per Parabolæ & Hyperbolæ, ſive etiam per binarum Parabolarum interſectionem, veluti non Geometricam reſpuunt. Quam ſanè (meo judicio) non minùs Geometricam cenſere oportet, quàm illam, quæ ab Euclide affertur in Problema* 1mum *Libri* 1mi *Elementorum: ſiquidem punctum, in quo hæ ſectiones ſibi mutuò occurrunt, non minùs ſcientificè invenitur, quàm illud, in quo bini circuli ſe invicem interſecant, ad deſcribendum triangulum æquilaterum.*

Cæterùm ſi afferatur, ideo haſce lineas Geometricas non fuiſſe dictas, eò quòd inſtrumentis deſcribi viderent; Annon ob eandem rationem linea recta & circularis non Geometricæ fuiſſent dicendæ, cum ad illas in plano deſcribendas regulâ atq; circino ſit opus? Adeò ut ſi τεχνικὴν καὶ ἐπιστημονικὴν χειρουργίαν *Vieta vocaverit conſtructionem illam quatenus ipſa regulæ & circini beneficio perficitur; Annon pari jure artificioſam atq; ſcientificam appellare licebit conſtructionem illam, quæ non niſi inſtrumentis perfici poteſt, quæ majorem induſtriam atq; artificium in ſui compoſitionem requirunt, cujuſq; demonſtratio ſimul ex penitiori Geometriæ penu eſt depromenda? Quocirca cum recta & circularis non Geometricæ non dicantur, neq; etiam conſtructiones per ipſas factæ; ratum igitur eſto, quòd neq; Sectiones Conicæ, quæ cum circulari unum genus curvarum linearum, illudq; primum (ut ſupra dictum fuit) apud Auctorem noſtrum conſtituunt; neq; etiam omnes ſuperiorum generum curvæ, conſtructioneſq; quæ per ipſas fiunt, aliæ quàm Geometricæ ſint habendæ, prout demonſtratio illas tales eſſe comprobabit. Hæc autem de curvis lineis dicta ſufficiant. Reſtat ut porrò ea, quæ hoc libro ab Autore pertractantur, paucis exponamus.*

Explicatâ linearum curvarum naturâ reſumit quæſtionem Pappi ab Antiquis quæſitam, quam primo libro explicuit, atq; reſolvere incepit; talem deinde ipſam declarans, ut poſtquam in aliis atq; aliis lineis propoſita eſt, illa quoq; alias atq; alias curvas lineas, ſolutionem præbentes, quæq; diverſi generis ſint, prout debita ratio numeri linearum habeatur, admittat. Adeò ut nulla curva linea ſit ſub calculum cadens, quæq; in Geometriam juxta ejus definitionem recipi poſſit (quod ſanè obſervatione dignum,) quæ non etiam ſimul pro certo aliquo linearum numero utilis exiſtat.

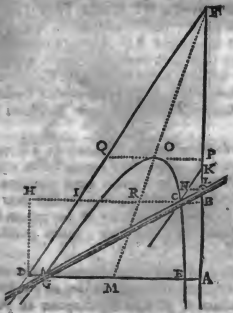
Ubi præterea notandum eſt, quòd eam ſic reſolvere doceat, ut ſimul omne illud, quod ad locorum planorum atq; ſolidorum compoſitionem ſpectat, exponat, ſicq; paucis complectatur, non ſolùm quæſtionis propoſitæ ſolutionem in tribus quatuórve lineis, ſed etiam ſolidorum locorum compoſitionem, tantopere à Veteribus quæſitam. Nullos enim ex iſtis locis omiſit, præter omnium ſimpliciſſimos, quos facilitatis causâ neglexit.

Poſt hæc autem, quæſtione in 5 lineis propoſitâ, docet quænam prima & ſimpliciſſima ſit linearum omnium, quæ ibidem inſervire poſſint. Atque ita tandem illi finem imponit. Quibus peractis declarat, quòd, ad inveniendas omnes proprietates curvarum linearum, ſufficiat ſcire relationem, quam illarum puncta habent ad puncta lineæ rectæ, ſicut etiam quo pacto inveniri poſſint lineæ rectæ, quæ ipſas ſecent in datis punctis ad angulos rectos. Quod quidem ſubtiliſſimâ ac mirabili proſequitur methodo, meoq; judicio digna, ut inter ingenioſiſſima hominum inventa celebretur. Poſtea verò nequid deſit, quod ad uſum curvarum linearum ibidem propoſitarum ſpectare videretur; oſtendit ipſas diverſas habere proprietates, quæ nequaquam ſectionum Conicarum proprietatibus cedunt, deſcribitq; quædam Ovalium genera, ad radiorum reflexionem atque refractionem per ſpecula & vitra, apprimè conducibilia: adeoq; in Catoptrica atq; Dioptrica uſum inſignem habentia. Deniq; oſtendit, quo pacto, quæ de lineis curvis explicuit, adplicari etiam poſſint ad lineas curvas, quæ per motum aliquem ordinatum quorundam punctorum alicujus corporis in ſpatio trium dimenſionum deſcribi poſſunt. Atq; ita, quæcunq; ad curvarum linearum cognitionem neceſſaria ſunt, breviter abſolvit. Quantùm autem ad Geometriam promovendam, ejuſq; arcana detegenda, nec non varias illius functiones cognoſcendas hic liber faciat, vel ea ipſa quæ in illo pertractantur, ac modò recenſuimus, teſtari poſſunt; tum etiam, quia in eo via ad ſurdeſolida, altioraq; loca, hactenus incognita, inveſtiganda ſternitur, atq; in eo infinita ſpeculationis campus aperitur.

COM-

COMMENTARII
IN
LIBRUM SECUNDUM.

QVEMADMODUM *illa re ipsâ nulla alia eſt quàm Hyperbola.*] Si enim producatur AG ad D, ut DG æqualis ſit EA ſeu NL, & per D agatur recta DF ipſi CK parallela, occurrens rectæ AB in F: erit DF una ex Aſymptotis, & AF altera. Quod facilè demonſtrari poteſt. Supponamus namque lineam GOCE Hyperbolam eſſe, cujus Aſymptoti DF, FA, & utraque DG, EA æqualis ſit ipſi NL; nec non DF ipſi CK parallela, ut di-



 ximus;

Digitized by Google

ximus; hoc eſt, angulus DFA æqualis ſit angulo CKB. Producatur autem BC, ut ſecet DF in I; & per D agatur recta DH parallela ipſi AF, occurrens cum BC in H. Quoniam igitur ſimilia ſunt triangula DHI & KLN triangulo FAD, erunt & ipſa inter ſe ſimilia. Unde erit ut KL ad LN, hoc eſt, ut b ad c, ita DH ſeu AB, hoc eſt, x, ad HI, quæ ideo erit $\frac{cx}{b}$. Deinde ſubductâ HI ex HB ſeu DA, hoc eſt, $\frac{cx}{b}$ ex $a+c$, relinquetur IB, $a+c-\frac{cx}{b}$. E qua ſi auferatur BC ſeu y, remanebit IC, $a+c-\frac{cx}{b}-y$. Quia verò in Hyperbola rectangulum ICB æquatur rectangulo DEA, per 10 prop. 2di libri Conicorum Apollonii; ideo ſi multiplicetur IC per CB, hoc eſt, $a+c-\frac{cx}{b}-y$ per y, fiet rectangulum ICB, $ay+cy-\frac{cxy}{b}-yy$, æquale rectangulo DEA ſeu ac, hoc eſt, ei quod fit ex ductu ipſius DE ſeu GA in EA. Quare ordinatâ æquatione, factaque tranſpoſitione, ut yy unam obtineat æquationis partem, invenietur $yy \propto cy-\frac{cxy}{b}+ay-ac$. Quæ æquatio eadem eſt, quæ ſupra ex motu regulæ GL & rectæ lineæ CK fuit inventa. Adeò ut affirmare liceat, deſcriptam lineam curvam CE Hyperbolam eſſe, cujus Aſymptoti AF, FD; quemadmodum ſuppoſuimus. Quorum pleniorem demonſtrationem qui deſiderat, conſulat caput 6tum tractatus noſtri de Organica Conicarum Sectionum in plano deſcriptione, ubi caſus omnes proſecuti ſumus.

Sed utile fuerit unum aut alterum Problema ſimile adjungere.

In plano quocunque concipiatur moveri AB regula, mobilis circa punctum fixum A, atque huic regulæ affixa alia æqualis regula BD, in puncto B, ut ſimiliter circa punctum B in eodem plano moveri poſſit. Aſſumpto autem in BD inter B & D quovis puncto E, & commoto puncto D per rectam lineam AD; Quæritur cujus generis ſit curva linea, quam punctum E motu illo deſcribit?

Quoniam igitur ad hanc quæſtionem oportet cognoſcere relationem, quam hujus curvæ puncta habent ad puncta lineæ rectæ AD, in qua punctum A eſt datum; ſuppono ex puncto E, ad

quod

Digitized by Google



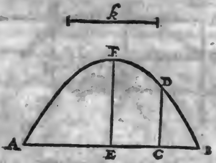
quod inſtrumentum huic curvæ deſcribendæ inſerviens eſt adplicatum, demiſſam eſſe ſuper AD perpendicularem EN. Et quidem cum EN, NA duæ ſint quantitates indeterminatæ ac incognitæ; voco unam x, & alteram y. Deinde, ut relationem unius ad alteram inveſtigem, conſidero etiam quantitates cognitas AB vel BD, & DE, quæ hujus curvæ deſcriptionem determinant; illamque appello a; hanc verò b. Tum quia triangulum NED eſt rectangulum, à quadrato ex DE, hoc eſt bb, auſero quadratum ex NE, hoc eſt xx, & relinquitur quadratum ex ND, ſeu $bb - xx$, cujus radix $\sqrt{bb - xx}$ eſt ipſa linea ND. Porrò demiſsâ ex B ſuper AD perpendiculari Bq, ſecabitur recta AD ab ipſa bifariam in q, propter æqualitatem regularum AB & BD, fientque triangula BqD & END ſimilia. Unde erit ut DE ad DN, hoc eſt, b ad $\sqrt{bb - xx}$; ita DB, hoc eſt, a, ad Dq, ſeu $\frac{a}{b}\sqrt{bb - xx}$. & ſit AD $\infty \frac{2a}{b}\sqrt{bb - xx}$. Cæterùm cum AN ſit $\infty\, y$, & ND $\infty \sqrt{bb - xx}$, erit tota AD $\infty\, y + \sqrt{bb - xx}$. Adeò ut habeatur æquatio inter AD bis inventam, hoc eſt, inter $\frac{2a}{b}\sqrt{bb - xx}$ & $y + \sqrt{bb - xx}$, vel, inter $\frac{2a}{b}\sqrt{bb - xx} - \sqrt{bb - xx}$ ſeu $\frac{2a - b}{b}\sqrt{bb - xx}$ & y. Et multiplicatâ utrâque æqualitatis parte in ſe, ut ſigna radicalia evaneſcant, & æquatio ab aſymmetria liberetur, fit $4aa - 4ab + bb - \frac{4aaxx}{bb} + \frac{4axx}{b} - xx \infty yy$. Quæ æquatio ſi per tranſpoſitionem ac diviſionem ordi-

ordinetur, ita ut xx unam teneat æquationis partem (ſi ſit x quam invenire volumus, relinquendo y indeterminatam), invenietur $xx \propto \frac{4aabb - 4ab^3 + b^4 - bbyy}{4aa - 4ab + bb}$, vel $xx \propto bb - \frac{bbyy}{4aa - 4ab + bb}$. Unde cum æquatio non aſcendat ultra quadratum unius ex quantitatibus indeterminatis, quemadmodum & ſuperiùs in Hyperbola evenit: conſtat, lineam curvam deſcriptam eſſe primi generis, quippe quæ alia non eſt quàm Ellipſis, juxta ea quæ ſecundo capite tractatus noſtri de Organica Conicarum ſectionum deſcriptione demonſtravimus. Ubi advertere licet praxin (quam & Clavius lib. 1. ſuæ Gnom. affert. prop. 26[tâ]) deſcribendi Ellipſin per puncta, quæ ex inventa æquatione colligi poteſt, quæque lignariis & cæmentariis in extruendis fornicibus familiaris eſt, atque in orthographicis Sphæræ delineationibus uſum habet inſignem. Nam ſi productâ AB ad I, ut BI ſit æqualis BE, centro A intervallo AI circulus deſcribatur, ſecans AD, hinc inde productam, in L & K: erit LK axis tranſverſus Ellipſis. Rectus autem invenitur, ſi ex eodem centro, intervallo DE, circulus deſcribatur $pGFg$, ſecans AI in F. Erit enim AG ſemiſſis axis recti. Et ſi à puncto F ipſi AD ducatur FE parallela, ſecans IN in E: erit punctum E unum ex punctis, per quod Ellipſis tranſire debet. Quo quidem modo infinita alia puncta inveniuntur. Quod & ex calculo fit manifeſtum: Eſt enim AI $2a - b$, & AN y; eſtque ut AI ſeu $2a - b$ ad AN ſeu y, ita AF ſeu b ad An, quæ ideo eſt $\frac{by}{2a - b}$. Cujus quadratum $\frac{bbyy}{4aa - 4ab + bb}$ ſi auferatur à quadrato ex AF ſeu bb, remanebit quadratum ex nF $\propto bb - \frac{bbyy}{4aa - 4ab + bb}$, utpote æquale xx quadrato lineæ NE. Quemadmodum fuit inventum.

Eodem modo operaberis in quæſtione ſequenti, quæ ultima eſt propoſitio lib. 4[ti] collectionum Mathematicarum Pappi Alexandrini.

Quæritur cujus generis ſit curva linea AFDB, cujus hæc eſt proprietas: ut, deductâ, à quolibet ejus puncto, ut D, perpendiculari DC, in rectam AB, poſitione & magnitudine datam, id quod ſub perpendiculari DC & alia quadam data linea k continetur, æquale ſit rectangulo, quod ſub ſegmentis AC, CB comprehenditur.

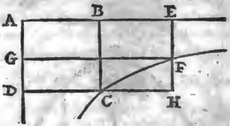
Sectâ



Sectâ AB bifariam in E, pono AE vel EB $\infty\, a$, EC $\infty\, y$, CD $\infty\, x$: eritque AC $\infty\, a+y$, & CB $\infty\, a-y$. Cum igitur ejuſmodi ſit relatio punctorum curvæ ADB ad puncta rectæ AB, ut rectangulum ſub CD & k æquetur rectangulo ſub AC, CB : erit $aa - yy \,\infty\, kx$. Quæ æquatio ad omnia utriuſque lineæ puncta referri poteſt, quandoquidem y & x duæ quantitates indeterminatæ exiſtunt, quæ ad omnes lineas EC, CD applicari poſſunt. Exceptis punctis F & E, quo caſu quantitas y nulla eſt, & EF æquatur $\frac{aa}{k}$. quod & de duobus præcedentibus Problematis eſt intelligendum. Cæterùm cum in æquatione inventa $aa - yy \,\infty\, kx$ una quantitatum incognitarum y adſcendat ad quadratum, indicio eſt, lineam curvam eſſe primi generis. Quam aliam non eſſe, quàm Parabolam, demonſtravit Pappus loco citato.

Non aliter concludes, æquatione exiſtente $xy \,\infty\, ab$, vel $xy \,\infty\, by - ax$, lineam curvam, quæ hanc æquationem produxit, eſſe primi generis : cum tantùm aſcendat ad rectangulum duarum quantitatum indeterminatarum x & y. Eſt autem curva illa linea Hyperbola. Quòd facilè intelligetur, ſi in prima æquatione, ubi $xy \,\infty\, ab$, concipiamus ab conſtituere rectangulum aliquod parallelogrammum ABCD, cujus unum latus AB ſit a, & alterum BC ſit b; atque per punctum C circa Aſymptotos DA, AB Hyperbolen deſcribamus CF; ac denique à quovis in ea pun-

Digitized by Google

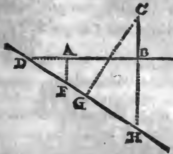


ex puncto F agamus duas rectas lineas FG, FE, ipſis AB, BC parallelas: Erit enim parallelogrammum AEFG parallelogrammo ABCD æquale, per 12 prop. 2^di libri Conicorum Apollonii. Adeò ut AE & EF ſumi poſſint pro duabus quantitatibus indeterminatis y & x, quæ in ſe invicem ductæ efficiant $xy \propto ab$. quod exigebat propoſita æquatio.

Eodem modo, ſi æquatio fuerit $xy \propto by - ax$, & producantur rectæ DC, EF, donec concurrant in punctum H: erit itidem parallelogrammum DHFG parallelogrammo CHEB æquale. Ac proinde ſi DC ponatur $\propto a$, & CB $\propto b$, (ut ante) & binæ quantitates indeterminatæ y & x ad binas lineas CH & HF referantur, atque DH ſeu $a + y$ ducatur in HF ſeu x: erit rectangulum DF ſeu $xy + ax$ æquale rectangulo CE ſeu by, utpote quod invenitur multiplicando CB ſeu b per CH ſeu y. Adeóque ſi utrinque auferatur ax, relinquetur $xy \propto by - ax$. Quæ eſt æquatio poſterior.

E quibus manifeſtum fit, quòd, licèt plurimi referat, quænam rectæ pro quantitatibus indeterminatis ſumantur, ut æquatio brevis atque facilis reddatur, ſemper tamen linea ejuſdem generis appareat, quocunque tandem modo ſumantur.

Omitto alios æquationum modos ſeu formulas, eandem curvam deſignantes, quandoquidem complures ſunt. In genere hoc dicam, totam æquationum illarum varietatem oriri tantùm ex varia harum curvarum ad diverſas rectas lineas relatione. Nam, ut oſtendatur quænam differentia obtineri poſſit, cùm curva linea ad diverſas rectas lineas refertur: Sunto duæ rectæ lineæ poſitione datæ AB, DF, ſibi mutuò occurrentes in D; punctum autem



tem in curva ſit C. Et in AB quidem puncto A exiſtente dato, & in ipſam à puncto C demiſſâ perpendiculari CB, ad referendum punctum C ad aliquod punctum ipſius AB: voco AB, x; & BC, y. Deinde, quoniam, propter poſitione datas AB, DF, datum eſt punctum interſectionis D, data quoque erit recta DA, nec non AF, quæ ipſi AB eſt perpendicularis, ſecans DH in F. Denique, demiſſâ ex puncto C ſuper DH perpendiculari CG, producatur CB, donec occurrat rectæ DF in puncto H. Quibus poſitis, ut inveniantur rectæ DG, GC, oſtendentes relationem, quam habet punctum C ad punctum G; ponatur DA $\infty\, a$, AF $\infty\, b$. Hinc, cum AB ſit $\infty\, x$, erit DB $\infty\, a+x$. Jam verò quia propter ſimilitudinem triangulorum DAF, DBH, DA eſt ad AF, hoc eſt, a ad b, ſicut DB, hoc eſt, $a+x$, ad BH, erit BH $\infty\, \frac{ab+bx}{a}$. Cui ſi addatur CB $\infty\, y$, fiet tota CH $\infty\, y+b+\frac{bx}{a}$. Porrò quoniam rectangulum eſt triangulum DAF, erit quadratum ex DF æquale quadratis ex DA & AF: ideoque DF $\infty\, \sqrt{aa+bb}$. Hinc cum DA ſit ad DF, hoc eſt, a ad $\sqrt{aa+bb}$, ſicut DB, hoc eſt, $a+x$, ad DH; erit ipſa $\infty\, \frac{a+x}{a}\sqrt{aa+bb}$, ſeu $\sqrt{aa+bb}$ $+$ $\frac{x}{a}\sqrt{aa+bb}$. ſimiliter, ob ſimilitudinem triangulorum FAD, HGC, cum ſit ut DF ad FA, hoc eſt, $\sqrt{aa+bb}$, ad b, ita CH, hoc eſt, $y+b+\frac{bx}{a}$ ad HG; erit HG $\infty\, \frac{aby+abb+bbx}{a\sqrt{aa+bb}}$. Quæ ſi ſubtrahatur ex DH $\infty\, \sqrt{aa+bb}+\frac{x}{a}\sqrt{aa+bb}$, relinquetur DG $\infty\, \frac{a^3+aax-aby}{a\sqrt{aa+bb}}$ ſeu $\frac{aa+ax-by}{\sqrt{aa+bb}}$. Denique quoniam DF eſt ad DA, hoc eſt, $\sqrt{aa+bb}$ ad a, ſicut CH, hoc eſt,

Google

$y + b + \frac{bx}{a}$, ad CG; erit CG $\infty \frac{ab + bx + ay}{\sqrt{aa + bb}}$. E quibus perſpicuum fit, differentiam omnem, quæ in referendis curvæ punctis C, tum ad puncta rectæ AB, tum ad puncta rectæ DF, obtineri poteſt, in eo tantùm conſiſtere, quòd, cùm AB indeterminata relinquitur, CB exprimatur per y; ſed CG per $\frac{ab + bx + ay}{\sqrt{aa + bb}}$; & DG per $\frac{aa + ax - by}{\sqrt{aa + bb}}$. Ita ut ſi y ſpeciem induat, quæ ei ex proprietate curvæ convenit; conſtabit ſimul relatio, quam curvæ puncta C obtinebunt ad puncta utriuſque rectæ AB, DF. Id quod eodem modo in omni alia datarum linearum poſitione oſtendi poſſet, niſi breviores eſſe vellemus.

Saltem ſi ſupponamus quantitatem ez majorem quàm cg.
B *nam ſi minor foret, mutanda eſſent omnia ſigna + & —.*] Exiſtente enim ez minore quàm cg, & multiplicando utrobique per z^2, foret ez^3 minor quàm cgz^2. Quo caſu omnes quoque numeratoris termini, qui ſigno + adficiuntur, minores erunt illis, qui ſigno — adficiuntur; adeò ut tantùm mutanda ſint omnia ſigna. Æquationem autem hoc facto illæſam manere, ita oſtenditur. Eſto $y \infty \frac{fe - dk}{d - e}$ (ſufficit enim id per facile aliquod exemplum oſtendere), ſuppoſitaque d minori quàm e, mutentur omnia ſigna + & —: fietque $y \infty \frac{-fe + dk}{-d + e}$.

Quoniam enim ex hypotheſi $y \infty \frac{fe - dk}{d - e}$, erit, multiplicando utrinque per $d - e$, $dy - ey \infty fe - dk$. Unde facta tranſpoſitione, ut totum æquetur nihilo, erit $dy - ey - fe + dk \infty 0$. Transferantur rurſus $+dy - ey$ in alteram æquationis partem, & fiet $-fe + dk \infty -dy + ey$. Quæ æquatio à præcedenti non differt, niſi quòd termini omnes contrariis ſignis ſint adfecti. Quare ſi utraque æqualitatis pars dividatur per $-d + e$, prodibit $y \infty \frac{-fe + dk}{-d + e}$. ut erat propoſitum.

Unde colligere licet: Si quantitates quædam ſignis + & — junctæ æquentur aliis quibuſdam quantitatibus etiam ſignis + & — junctis: erunt quoque eædem contrariis ſignis affectæ inter ſe æquales.

Unde

Digitized by Google

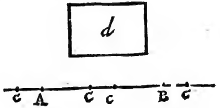
Unde ſi in hac æquatione quantitas y nulla ſit, aut minor BB
quàm nihil, poſtquam punctum C ſuppoſuimus in angulo DAG, oporteret & illud ſupponere in angulo DAE, aut EAR, aut RAG, mutando ſigna + & —, prout ad effectum hunc requireretur. Quòd ſi verò in quatuor hiſce poſitionibus valor ipſius y nullus reperiretur, indicio eſſet, quæſtionem caſu propoſito *Vide fig. pag.* 12.
eſſe impoſſibilem.] Sciendum hîc ab Autore obiter notari, ad plenam compoſitionem loci, in quem cadit quæſitum punctum C, opùs eſſe ut inveſtigemus id ipſum in omnibus 4^or angulis DAG, DAE, EAR, & RAG, quærendo nempe ad hoc 4^or æquationes diverſas. Id quod notat facile eſſe, unâ æquatione jam inventâ, quoniam ad reliquas obtinendas tantummodo mutare oportet ſigna + & —, pro diverſa habitudine quantitatum inventarum ad figuræ lineas; ut punctum C, quando cadit intra angulum DAE, aut EAR, aut RAG quæratur eâdem ratione, quâ illud hîc invenire docuit, cum intra angulum DAG cadere ſupponitur. Manifeſtum enim eſt, quòd, ſi in 4^or hiſce poſitionibus valor ipſius *y* nullus reperiatur, quæſtio propoſita futura ſit impoſſibilis. Quòd ipſum hîc in genere de puncto C intelligi debet, etiamſi quæſtio alias conditiones præſupponat: cum illa vix alioquin Autori (ob exiguam ejus utilitatem) iſtius momenti viſa ſit, ut in conſtructione hujus loci totus eſſet, niſi quatenus hic unà ſimul compoſitionem Locorum Planorum & Solidorum traderet, ſicut ipſius verba indicant p. 12 & 34. Quippe aliàs in hac poſitione datarum linearum contingit, quando videlicet rectangulum ſub CB, CF ponitur æquale rectangulo ſub CD, CH, ut punctum C non tantùm ubivis cadat in Circulum, qui tranſit per puncta A, G, & duas interſectiones linearum FE, GH, & ipſarum DA, FE; verùm etiam in utramque duarum oppoſitarum Hyperbolarum, quarum una tranſit per A & G puncta, & altera per duas reliquas interſectiones dictas. Quemadmodum etiam, ſi duæ ex datis lineis ſunt parallelæ, fieri poteſt, ut punctum C ubilibet cadat in duas oppoſitas Hyperbolas & inſuper in Parabolam vel in duas alias oppoſitas Hyperbolas; aut etiam in duas oppoſitas Hyperbolas & in rectam lineam, ubi videlicet bina ſunt parallelarum paria ſeſe interſecantia. atque ita de aliis. Idem obſervare licet in Apollonii Locis Planis, à me reſtitutis, in quorum nonnullis,

ad plenam loci compoſitionem, quæſitum punctum præter lineas jam expreſſas etiam alia plana loca contingit, quæ pari facilitate inveſtigari & conſtrui poſſunt, prout nimirum idem punctum ad id in aliis tantùm angulis ſuppoſitum fuerit, quemadmodum & ibidem fuit indicatum.

His ſimilia notare quoque licet circa Problemata omnino determinata, in quibus non niſi certus eſt punctorum numerus. Cujuſmodi eſt ſequens

PROBLEMA.

IN recta interminata aſſignatis duobus punctis A, B in eadem aliud aſſignare punctum C, ut rectangulum A C B, quod ſit ſub rectis A C, CB, ad aſſignata puncta A, B abſciſſis, dato ſpatio *d* æquale ſit, quod tamen minus ſit quartâ parte quadrati ex A B, quæ ſit $\infty\ a$.



Quoniam hic juxta mentem Problematis punctum C indeterminatum eſt reſpectu puncti A, ut & reſpectu puncti B, hoc eſt, indeterminatum quò magis ad dextram quàm ad ſiniſtram utriuſque cadat, hinc ſi concipiatur determinatum inter A & B, æquatio huc pertinens comprehendet plus quàm oportet, neque legitima erit, ſi ei ſoli acquieſcere velimus. Quocirca & illud ipſum extra A & B ab utraque parte ſupponendum eſt, ſi velimus ut ſolutio Problematis omnibus numeris ſit abſoluta.

Unde ſupponendo C primùm cadere extra A B ad ſiniſtram ipſius A, erit, aſſumptâ x pro A c, $xx + ax \infty d$; ac deinde ſupponendo C cadere inter A & B, erit $ax - xx \infty d$; & denique ſupponendo *c* cadere extra A B ad dextram ipſius B, erit $xx - ax \infty d$. Hoc eſt in numeris, ſi a ſit $\infty\ 20$; $d \infty 96$, habebitur $x \infty 4$, $x \infty -24$; $x \infty 12$; $x \infty 8$, $x \infty 24$, & $x \infty -4$. Quæ quidem omnes ſunt radices, quæ ad propoſitum Problema pertinent. Quarum prima & ultima deſignant longitudinem lineæ A c $\infty\ x$, qualis

Digitized by Google

qualis ipſa ſumenda eſt ab A versùs ſiniſtram, & quatuor reliquæ, qualis ipſa ſumi debet ab A versùs dextram, cadente puncto C inter A & B, vel ultra B; adeò ut in toto ſint 4^or^ diverſa puncta, quæ quæſito ſatisfaciant.

Cæterùm ſi velimus, ut una obtineatur æquatio, quæ haſce omnes radices ſimul includat, oportet tantùm, ubicunque accepto puncto C, factâque A c $\propto x$, multiplicare $xx + 20x - 96 \propto 0$ per $20x - xx - 96 \propto 0$, & id quod fit rurſus per $xx - 20x - 96 \propto 0$, & invenietur $-x^6 + 20x^5 + 496x^4 - 11840x^3 + 47616xx + 184320x - 884736 \propto 0$, ſeu $x^6 - 20x^5 - 496x^4 + 11840x^3 - 47616xx - 184320x + 884736 \propto 0$.

Id quod etiam univerſaliùs fieri poteſt multiplicando CB $\propto \pm 20 \pm x$ per AC $\propto x$, obtinebitur enim $\pm 20x \pm xx \propto 96$. Quæ æquatio præter radices ſuperiores etiam continet $x \propto -8$, & $x \propto -12$, quippe quæ eliciuntur ex æquatione $-xx - 20x \propto 96$.

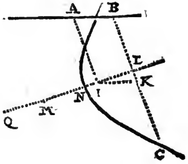
Ubi demum notandum, ex æquatione inventa $\pm 20x \pm xx \propto 96$. facile quoque eſſe aliam vulgari modo affectam invenire, quæ omnes eaſdem radices cum illa comprehendat, utpote multiplicando utramque partem in ſe quadratè, & fit $400xx \pm 40x^3 + x^4 \propto 9216$. Unde ſervatâ $\pm 40x^3$ ab una parte, & deinde utrâque rurſus quadratâ, invenitur æquatio $x^8 - 800x^6 + 141568x^4 - 7372800xx + 84934656 \propto 0$, cujus radices eædem ſunt quæ præcedentis æquationis $\pm 20x \pm xx \propto 96$, quas enumeravimus. Ratio autem, cur D. des Cartes hujuſmodi æquationibus ad ſolutionem quæſtionis ex Pappo allatæ non fuerit uſus, vel ea videtur, quòd alias tum vulgares, tum etiam à quolibet faciliùs perceptibiles animadverterit; ita ut, dum quæſtio per ſe ſatis difficilis exiſtit, præſtare judicaverit, ſpecialem æquationem pro C puncto inveſtigare, poſtquam illud in angulo DAG ſupponitur, ulteriùſque tantùm digito indicare, ſi Problemati penitus ſatisfaciendum ſit, eodem modo in reliquis angulis DAE, EAR, & RAG eſſe procedendum; quàm æquationem univerſalem, quæ omnia ſimul puncta reſpiceret, invenire.

Hinc nihil mihi ampliùs reſtare video pro linea LC præter C
hoſce terminos: $LC \propto \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$. *Unde cognoſcitur*

Digitized by Google

ſcitur, quòd ſi nulli fuiſſent, futurum fuiſſe ut punctum C reperiretur in linea recta IL; & ſi tales extitiſſent, ut inde radix extrahi potuiſſet, hoc eſt, ut, mm & $\frac{p}{m}xx$ ſigno + notatis, oo fuiſſet æqualis 4pm, ſive etiam termini mm & ox, aut ox & $\frac{p}{m}xx$ nihilo fuiſſent æquales, punctum hocce C in aliam rectam lineam cecidiſſet, quæ quidem inventu difficilior non fuiſſet quàm IL.] Hæc verba tres conditiones complectuntur ad determinandum punctum C, quando in lineam rectam cadit. Nam cum facienda ſit $LC \infty \sqrt{mm + ox - \frac{pxx}{m}}$, reperietur illud punctum in linea recta IL, ſi termini, quibus ipſa exprimitur, nulli ſint. Et ſi tales fuerint, ut radix ex iis extrahi poſſit, hoc eſt, ut, *mm* & $\frac{p}{m}xx$ ſigno + notatis, *oo* ſit æqualis $4pm$, hoc eſt, ut LC ſit $\sqrt{mm + \frac{pxx}{m} \; 8 \; x\sqrt{4pm}}$ ſeu $m \; 8 \; x\sqrt{\frac{p}{m}}$: punctum C ſimiliter in recta linea reperietur. Idem continget, ſi termini *mm* & *ox*, aut *ox* & $\frac{pxx}{m}$ fuerint nulli, dummodo reliquus $\frac{pxx}{m}$, aut *mm* ſemper ſigno + adfectus ſit.

CC *Sed ſi hoc non fiat, punctum C reperietur ſemper in aliqua trium Conicarum ſectionum, aut in Circulo, cujus, &c.*] Quò iſta, quæ hîc deinceps pag. 29, 30, & 31 ab Autore traduntur, cuivis manifeſtiora fiant, ſequentia in medium afferre viſum fuit.



Primus caſus, cùm Sectio eſt Parabola, in quâ linea LC una ex iis exiſtit, quæ ordinatim ad diametrum, quæ ſemper in lineam IL cadit, adplicantur; & cujus vertex N in ea ex altera parte puncti L ſumendus eſt reſpectu puncti I, linea LC exiſtente $\infty \sqrt{mm + ox}$. Ad quem inveniendum, ſicut & latus rectum

Digitized by Google

ctum r, pono pro NI f, eritque NL $\propto f + \frac{ax}{z}$,

deinde ita procedo:

Mult. NL. $f + \frac{ax}{z}$

per r

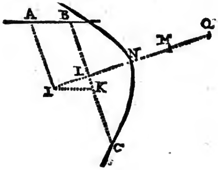
fit □ LC. $fr + \frac{arx}{z}$, æquale $mm + ox$.

$\frac{ar}{z} \propto o$ | $fr \propto mm$, dele r

$ar \propto oz$ | $\frac{foz}{a} \propto mm$

$r \propto \frac{oz}{a}$ | $foz \propto amm$

$f \propto \frac{amm}{oz}$.



2dus casus, ubi vertex N in linea IL ex eadem parte puncti L ſumendus eſt reſpectu puncti I, lineâ LC exiſtente $\propto \sqrt{mm - ox}$.

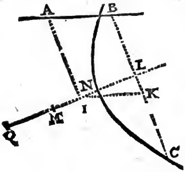
Quod ſic liquet.

Mult. LN. $f - \frac{ax}{z}$

per r

fit □ LC. $fr - \frac{arx}{z}$ æquale $mm - ox$.

Et fit, ut ante, $r \propto \frac{oz}{a}$, & $f \propto \frac{amm}{oz}$.



3tius caſus, ubi vertex N in linea IL ſumi debet inter puncta I & L, lineâ LC exiſtente $\infty \sqrt{-mm+ox}$.

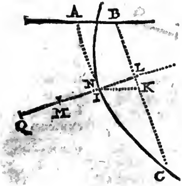
Quod ſic liquet

Mult. NL. $\frac{ax}{z} - f$

per r

fit □ LC. $\frac{arx}{z} - fr$, æquale $-mm + ox$.

Et fit, ut ante, $r \infty \frac{oz}{a}$, & $f \infty \frac{amm}{oz}$.



4tus caſus, ubi vertex N cadit in punctum I, cùm quantitas mm nulla eſt, lineâ LC exiſtente $\infty \sqrt{ox}$.

Quod ſic liquet

Mult. NL. $\frac{ax}{z}$

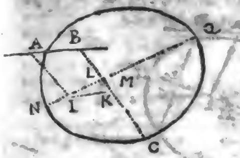
per r

fit □ LC. $\frac{arx}{z}$ æquale ox.

Et fit, ut ante, $r \infty \frac{oz}{a}$.

E quibus colligitur, cum in omnibus hiſce Parabolæ caſibus ſive diverſis ejus poſitionibus latus rectum ſit $\infty \frac{oz}{a}$, atque in iis nullibi reperiatur quantitas in xx ducta, nec præter eaſdem ulla alia excogitari poſſit, quâ linea LC talis, qualis in his omnibus caſibus data fuit, obtineatur, quæſitum punctum C cadere in Parabolam, cujus latus rectum eſt $\frac{oz}{a}$, quæque pro diverſa terminorum ipſius LC conſtitutione, poſitiones jam explicatas admittat.

Primus



Primus caſus, cùm linea eſt Circulus, & centrum ejus M in linea I L ex eadem parte puncti L ſumendum eſt reſpectu puncti I, lineâ L C exiſtente

$\propto \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$.

Ad quod inveniendum, ut & diametrum N Q, pono pro N M vel M Q c, & pro I M d; eritque N L $\propto c - d + \frac{ax}{z}$, & L Q $\propto c + d - \frac{ax}{z}$.

Deinde ita procedo:

$$\begin{array}{l} \text{Mult. N L,}\ c - d + \frac{ax}{z} \\ \text{per L Q.}\ c + d - \frac{ax}{z} \\ \hline cc - cd + \frac{acx}{z} \\ \quad + cd - dd + \frac{adx}{z} \\ \qquad - \frac{acx}{z} + \frac{adx}{z} - \frac{aaxx}{zz} \\ \hline \end{array}$$

fit ▭ N L Q ſeu □ L C, $cc - dd + \frac{2adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$, æquale $mm + ox - \frac{p}{m}xx$.

Intellige hic c majorem eſſe quàm d.

$$\frac{aa}{zz} \propto \frac{p}{m} \qquad \frac{2ad}{z} \propto o$$

$$aam \propto pzz \qquad 2ad \propto oz$$

$d \propto \frac{oz}{2a}$ ſeu $\frac{aom}{2pz}$. Eſt enim $aam \propto pzz$. Et fit $dd \propto \frac{oozz}{4aa}$.

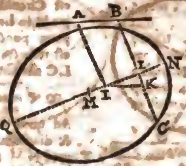
$cc - dd \propto mm$, dele dd

$cc \propto \frac{oozz}{4aa} + mm$

$4cc \propto \frac{oozz}{aa} + \frac{4aamm}{aa}$, dele aam

$4cc \propto \frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}$

$2c \propto r \propto \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$.



2dus casus, ubi centrum M in linea I L ex altera parte puncti L ſumendum eſt reſpectu puncti I, lineâ L C exiſtente $\infty \sqrt{mm - ox - \frac{p}{m} xx}$.

Quod ſic liquet.

Mult. QL. $c + d + \frac{ax}{z}$

per LN. $c - d - \frac{ax}{z}$

$$cc + cd + \frac{acx}{z}$$
$$- cd - dd - \frac{adx}{z}$$
$$- \frac{acx}{z} - \frac{adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$$

fit ▭ QLN ſeu □ L C. $cc - dd - \frac{2adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$, æquale $mm - ox - \frac{p}{m} xx$.

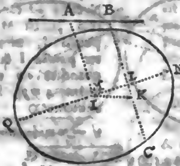
Intellige hîc ſimiliter c majorem quàm d.

Et fit, ut ante, $aam \infty pzz$, $d \infty \frac{oz}{2a}$ ſeu $\frac{aom}{2pz}$, &

$$2c \infty r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}.$$

3tius

Digitized by Google



3^{tius} caſus, ubi centrum M cadit in punctum I, cùm quantitas ex nulla eſt, lineâ L C exiſtente $\infty \sqrt{mm - \frac{p}{m}xx}$. Et fit $2e \infty 2m$ vel $\frac{2pzz}{aa}$, vel etiam $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$.

Quod ſic liquet

Mult. Q L. $e + \frac{ax}{z}$

per L N. $e - \frac{ax}{z}$

$$ee + \frac{aex}{z}$$

$$- \frac{aex}{z} - \frac{aaxx}{zz}$$

& fit ▭ Q L N ſeu □ L C. $ee - \frac{aaxx}{zz}$, æquale $mm - \frac{p}{m}xx$.

Intellige hic d eſſe ∞ o.

$$\frac{aa}{zz} \infty \frac{p}{m}$$

$$aam \infty pzz$$

$m \infty \frac{pzz}{aa}$, & $mm \infty \frac{ppz^4}{a^4} \infty ee$

$$\frac{4ppz^4}{a^4} \infty 4ee$$

$$2e \infty r \infty \frac{2pzz}{aa} \text{ vel } 2m.$$

Nota hic in tribus allatis caſibus, in quibus e major intelligitur quàm d, verticem N cadere ad alteram partem puncti M reſpectu puncti I, hoc eſt, quando habetur $+ mm$.



4^{tus} caſus, ubi vertex N cadit ad eandem partem puncti M reſpectu puncti I, nimirum inter puncta I & L, cùm quantitas oo eſt major quàm $4\,mp$, lineâ LC exiſtente $\propto$

$$\sqrt{-mm+ox-\frac{p}{m}xx}.$$

Et ſit $d \propto \frac{oz}{2a}$ ſeu $\frac{aom}{2pz}$; & $2\,c \propto \sqrt{\frac{oozz}{aa}-\frac{4mpzz}{aa}}$.

Quod ſic liquet

Mult. NL, $c-d+\frac{ax}{z}$

per LQ. $c+d-\frac{ax}{z}$

$$cc-cd+\frac{acx}{z}$$
$$+cd-dd+\frac{adx}{z}$$
$$-\frac{acx}{z}+\frac{adx}{z}-\frac{aaxx}{zz}$$

ſit ▭ NLQ ſeu □ LC. $cc-dd+\frac{2adx}{z}-\frac{aaxx}{zz}$, æquale

$$-mm+ox-\frac{p}{m}xx.$$

Intellige hic c minorem quàm d.

$\frac{aa}{zz} \propto \frac{p}{m}$

$aam \propto pzz$

$\frac{2ad}{z} \propto o$

$2ad \propto oz$

$d \propto \frac{oz}{2a}$ ſeu $\frac{aom}{2pz}$. Eſt enim $aam \propto pzz$,

Et ſit $dd \propto \frac{oozz}{4aa}$.

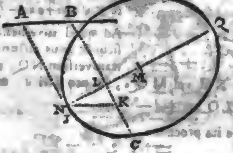
$ee - dd \infty - mm$, dele dd

$ee \infty \frac{oozz}{4aa} - mm$

$4ee \infty \frac{oozz}{aa} - \frac{4aamm}{aa}$, dele aam

$4ee \infty \frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}$

$2e \infty r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$. Ubi etiam liquet, ut punctum C cadat in Circulum, quemadmodum ſuppoſuimus, quantitatem oo hoc caſu majorem requiri quàm $4\,mp$.



5^tus^ caſus, ubi vertex N cadit in punctum I, cùm quantitas mm non reperitur, lineâ LC exiſtente ∞ $\sqrt{ox - \frac{p}{m}xx}$. Et ſit $d \infty e \infty \frac{oz}{2a}$ ſeu $\frac{oam}{2pz}$, & $2e \infty \frac{oz}{a}$.

Quod ſic liquet

Mult. N L, $\frac{ax}{z}$

per L Q. $2e - \frac{ax}{z}$

fit ▭ N L Q ſeu □ L C, $\frac{2aex}{z} - \frac{aaxx}{zz}$, æquale $ox - \frac{p}{m}xx$.

Intellige hic e & d eſſe æquales.

$\frac{2ae}{z} \infty o$ $\qquad$ $\frac{aa}{zz} \infty \frac{p}{m}$

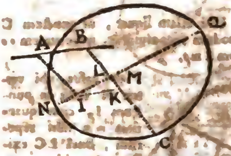
$2ae \infty oz$ $\qquad$ $aam \infty pzz$

$2e \infty r \infty \frac{oz}{a}$

Hinc cùm in omnibus hiſce Circuli caſibus ſive diverſis ejus poſitionibus quantitas in xx ducta ubique ſigno — adfecta reperiatur, ut & quantitas $aam \infty pzz$; nec præter poſitiones haſce ul-

 la alia

la alia excogitari poſſit, quâ linea LC talis, qualis in his omnibus caſibus data fuit, obtineatur; ſequitur, ſi in quæſtione terminus $\frac{p}{m}xx$ ſigno — fuerit adfectus, & quantitas $aam \propto pzz$, angulo ILC exiſtente recto, lineam, in quam punctum quæſitum C cadit, fore Circulum, quemadmodum eſt oſtenſum.



Primus caſus, cùm linea eſt Ellipſis, & centrum ejus M in linea IL ſumendum eſt ex eadem parte puncti L reſpectu puncti I, lineâ LC exiſtente $\propto \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$. Ad quod inveniendum, ſicut & latus rectum r, & tranſverſum NQ, pono, ut ante in Circulo, pro NM vel MQ c, & pro IM d: eritque NL $\propto c - d + \frac{ax}{z}$, & LQ $\propto c + d - \frac{ax}{z}$.

Deinde ita procedo:

lat. tranſv. lat. rect. □ NLQ

$2c$ —— r —— $cc - dd + \frac{2adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$, ad

□ LC

$$\frac{ccr - ddr + \frac{2adrx}{z} - \frac{aarxx}{zz}}{2c}$$ æquale $mm + ox - \frac{p}{m}xx$.

Intellige hic c majorem eſſe quàm d.

$$\frac{adr}{cz} \propto o$$

$$adr \propto coz$$

$$\frac{adr}{oz} \propto c, \ \& \ \frac{aaddrr}{oozz} \propto cc$$

$$\frac{aar}{2czz} \propto \frac{p}{m}$$

dele c, $aamr \propto 2cpzz$. Hinc ut r ad $2c$, ita pzz ad aam

$$aamr \propto \frac{2adpzr}{o}$$

$$aom \propto 2dpz$$

$$\frac{aom}{2pz} \propto d$$

ccr —

$\frac{ccr - ddr}{2c} \propto mm$

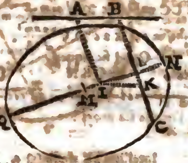
$ccr - ddr \propto 2cmm$, dele c & cc

$\frac{aaddrr}{oozz} - ddr \propto \frac{2admmr}{oz}$

$aaddrr \propto doozz + 2ammoz$

$rr \propto \frac{oozz}{aa} + \frac{2mmoz}{ad}$, dele d, & extr. √

$r \propto \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$. Hinc ad inveniendum latus tranſverſum, fiat ut pzz ad aam, ita $\sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, ad $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$.



2dus caſus, ubi centrum M in linea I L ex altera parte eſt ſumendum puncti L reſpectu puncti I, lineâ L C exiſtente $\propto \sqrt{mm - ox - \frac{p}{m}xx}$.

Quod ſic liquet

lat. tranſv. lat. rect. □QLN

$2c$ —— r —— $cc - dd - \frac{2adx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$, ad

□LC.

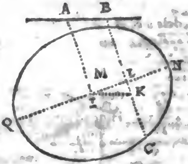
$\frac{ccr - ddr - \frac{2adrx}{z} - \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale $mm - ox - \frac{p}{m}xx$.

Intellige hic ſimiliter c majorem quàm d.

Et fit, ut ante, r ad $2c$, ut pzz ad aam, $d \propto \frac{aom}{2pz}$,

$r \propto \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, & $2c \propto \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$.

3tius



3tius caſus, ubi centrum M cadit in punctum I, cùm quantitas ox nulla eſt, lineâ LC exiſtente $\infty \sqrt{mm - \frac{p}{m}xx}$. Et fit $r \infty \sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$ ſeu $\frac{2z}{a}\sqrt{mp}$, & $2c \infty \sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}}$.

Quod ſic liquet

lat. tranſv. lat. rect. ▭QKN □LC

$2c$ —— r —— $cc - \frac{aaxx}{pzz}$, ad $\frac{ccr - \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale $mm - \frac{p}{m}xx$.

Intellige hic d eſſe ∞ o.

$\frac{aar}{2czz} \infty \frac{p}{m}$

$aamr \infty 2cpzz$. Hinc ut r ad $2c$, ita pzz ad aam.

$c \infty \frac{aamr}{2pzz}$

$\frac{cr}{2} \infty mm$

$cr \infty 2mm$, dele c

$\frac{aamrr}{2pzz} \infty 2mm$

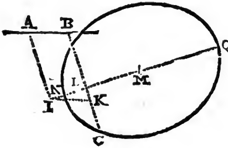
$aarr \infty 4mpzz$

$rr \infty \frac{4mpzz}{aa}$

$r \infty \sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$. Hinc ad inveniendum latus tranſverſum, fiat ut pzz ad aam, ita $\sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$, ad $\sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}}$.

Ubi

Ubi notandum, in allatis tribus caſibus, ſicut in Circulo, propter c ipſâ d majorem, verticem N cadere ad alteram partem puncti M reſpectu puncti I, hoc eſt, quando habetur $+ mm$.



4^{tus} caſus, ubi vertex N cadit ad eandem partem puncti M reſpectu puncti I, nimirum inter puncta I & L, cùm oo eſt major quàm $4mp$, lineâ L C exiſtente ∞ $\sqrt{-mm+ox-\frac{p}{m}xx}$.

Et fit $d \infty \frac{aom}{2pz}$,

$r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa}-\frac{4mpzz}{aa}}$, & $2c \infty \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz}-\frac{4aam^3}{pzz}}$.

Quod ſic liquet

lat. tranſv. lat. rect. ▭NLQ

$2c$ ——— r ——— $cc-dd+\frac{2adx}{z}-\frac{aaxx}{zz}$, ad

□LC

$\frac{ccr-ddr+\frac{2adrx}{z}-\frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale $-mm+ox-\frac{p}{m}xx$.

Intellige hic c minorem quàm d.

$\frac{adr}{cz} \infty o$

$adr \infty coz$

$\frac{adr}{oz} \infty c$, & $\frac{aaddrr}{oozz} \infty cc$ $\frac{aar}{2czz} \infty \frac{p}{m}$

dele c, $aamr \infty 2cpzz$. Hinc ut r ad $2c$, ita pzz ad aam.

$aamr \infty \frac{2adprz}{o}$

$aom \infty 2dpz$

$d \infty \frac{aom}{2pz}$

Digitized by Google

$$\frac{ccr - ddr}{2c} \propto -mm$$

$$ccr - ddr \propto -2cmm, \text{ dele } c \text{ \& } cc$$

$$\frac{aaddr^3}{oozz} - ddr \propto -\frac{2admmr}{oz}$$

$$aadrr \propto doozz - 2ammoz$$

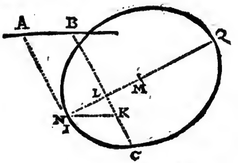
$$rr \propto \frac{oozz}{aa} - \frac{2mmoz}{ad}, \text{ dele } d, \text{ \& extr. } \sqrt{}$$

$$r \propto \sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}.$$

Hinc ad inveniendum latus tranſverſum, fiat ut pzz ad aam, ita

$$\sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}, \text{ ad } \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} - \frac{4aam^3}{pzz}}.$$

Ubi etiam liquet, ut punctum C cadat in Ellipſin, quemadmodum hic ſuppoſuimus, quantitatem oo hoc caſu majorem requiri quàm $4mp$.



5tus caſus, ubi vertex N cadit in punctum I, cùm quantitas mm non reperitur, lineâ LC exiſtente $\propto \sqrt{ox - \frac{p}{m}xx}$. Et fit $d \propto c \propto \frac{aom}{2pz}$, $r \propto \frac{oz}{a}$, & $2c \propto \frac{aom}{pz}$.

Quod ſic liquet

lat. tranſv.	lat. rect.	▭ NLQ	□ LC
$2c$	r	$\frac{2acx}{z} - \frac{aaxx}{zz}$, ad	$\dfrac{\frac{2acrx}{z} - \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale $ox - \frac{p}{m}xx$.

Intellige hîc c & d æquales.

$$\frac{ar}{z} \propto o \qquad \frac{aar}{2czz} \propto \frac{p}{m}$$

$$ar \propto oz \qquad aamr \propto 2cpzz.$$

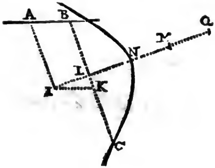
$$r \propto \frac{oz}{a}$$

Hinc ut r ad $2c$, ita pzz ad aam. Unde ad inveniendum latus tranſverſum, fiat, ut pzz ad aam, ita $\frac{oz}{a}$ ad $\frac{aom}{pz}$.

Quo-

Digitized by Google

Quocirca cum in omnibus hiſce Ellipſeos caſibus ſive diverſis ejus poſitionibus quantitas in xx ducta ubique ſigno — adfecta reperiatur, & ratio recti lateris ad tranſverſum ſit, ut pzz ad aam; nec præter allatas poſitiones ulla alia excogitari queat, quà linea LC talis, qualis in his omnibus caſibus data fuit, obtineatur: ſequitur, ſi in quæſtione terminus $\frac{p}{m}xx$ ſigno — denotatus fuerit, lineam, in quam punctum quæſitum C cadit, fore Ellipſin, cujus rectum latus ad tranſverſum ſit ut pzz ad aam, ac ejuſdem poſitio, cujuſmodi jam eſt oſtenſum, exiſtat.



Primus caſus, cùm ſectio eſt Hyperbola, in quâ linea LC eſt una ex iis, quæ ad diametrum, quæ eſt in linea IL, ordinatim adplicantur, & ubi centrum M in linea IM ex eadem parte puncti L ſumendum eſt reſpectu puncti I, cùm quantitas oo eſt major quàm $4mp$, lineâ LC exiſtente $\infty \sqrt{mm - ox + \frac{p}{m}xx}$.

Hinc ad inveniendum centrum M, latus rectum r, & tranſverſum NQ, pono, ut ante in Circulo & Ellipſi, pro NM vel MQ c, & pro IM d: eritque NL $\infty\ d - c - \frac{ax}{z}$, & LQ ∞ $d + c - \frac{ax}{z}$.

 Dein-

Deinde ita procedo:

Mult. NL. $d - c - \frac{ax}{z}$

per LQ. $d + c - \frac{ax}{z}$

$$dd - cd - \frac{adx}{z}$$
$$+ cd - cc - \frac{acx}{z}$$
$$- \frac{adx}{z} + \frac{acx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$$

lat. tr. lat. rect.

$2c - r$ — □NLQ. $dd - cc - \frac{2adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$,

ad □LC. $\dfrac{ddr - ccr - \frac{2adrx}{z} + \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale $mm - ox + \frac{p}{m}xx$.

Intellige hic d majorem eſſe quàm c.

$$\frac{adr}{cz} \infty o$$
$$adr \infty coz$$
$$\frac{adr}{oz} \infty c, \quad \& \quad \frac{aaddrr}{oozz} \infty cc$$

dele c,

$$\frac{aar}{2czz} \infty \frac{p}{m}$$
$$aamr \infty 2cpzz.$$
$$aamr \infty \frac{2adprz}{o}$$
$$aom \infty 2dpz$$
$$\frac{aom}{2pz} \infty d$$

Hinc ut r ad $2c$, ita pzz ad aam.

$$\frac{ddr - ccr}{2c} \infty mm$$

$ddr - ccr \infty 2cmm$, dele c & cc

$$ddr - \frac{aaddr^3}{oozz} \infty \frac{2admmr}{oz}$$
$$doozz - aadrr \infty 2ammoz$$
$$doozz - 2ammoz \infty aadrr$$

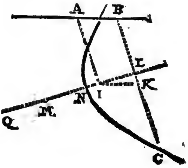
$\frac{oozz}{aa} - \frac{2mmoz}{ad} \infty rr$, dele d, & extr. √

$\sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}} \infty r$. Hinc ad inveniendum latus tranſverſum, fiat ut pzz ad aam, ita

$\sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$, ad $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} - \frac{4aam^3}{pzz}}$.

Ubi

Ubi liquet, ut punctum C cadat in Hyperbolam, quemadmodum ſuppoſuimus, quantitatem oo hoc caſu majorem requiri quàm $4mp$.



2dus caſus, ubi centrum M in linea IL ex altera parte puncti L ſumendum eſt reſpectu puncti I, cùm oo eſt major quàm $4mp$, lineâ LC exiſtente $\infty \sqrt{mm + ox + \frac{p}{m}xx}$.

Quod ſic liquet

Mult. QL. $c + d + \frac{ax}{z}$

per LN. $-c + d + \frac{ax}{z}$

$$-cc - cd - \frac{acx}{z}$$

$$+cd + dd + \frac{adx}{z}$$

$$+\frac{acx}{z} + \frac{adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$$

lat. tr. lat. rect.

$2c - r - \square$ QLN. $dd - cc + \frac{2adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$,

ad $\square$ LC. $\frac{ddr - ccr + \frac{2adrx}{z} + \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale

$$mm + ox + \frac{p}{m}xx.$$

 Simi-

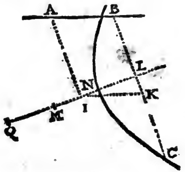
Digitized by Google

Similiter hîc d majorem intellige quàm c.

Et fit, ut ante, r ad $2c$, ut pzz ad aam, $d \propto \frac{aom}{2pz}$,

$$r \propto \sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}, \ \& \ 2c \propto \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} - \frac{4aam^3}{pzz}}.$$

Ubi etiam liquet, ut punctum C cadat in Hyperbolam, quemadmodum ſuppoſuimus, quantitatem oo & hoc caſu majorem requiri quàm $4mp$.



3tius caſus, ubi vertex N ſumendus eſt inter puncta I & L, lineâ L C exiſtente $\propto \sqrt{-mm + ox + \frac{p}{m}xx}$.

Et fit $d \propto \frac{aom}{2pz}$, $r \propto \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, & $2c \propto \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$.

Quod ſic liquet

Mult. QL. $c + d + \frac{ax}{z}$

per LN. $-c + d + \frac{ax}{z}$

$$-cc - cd - \frac{acx}{z}$$

$$+cd + dd + \frac{adx}{z}$$

lat. tr. lat. rect. $+\frac{acx}{z} + \frac{adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$

$2c$ — r — $\square$ QLN. $dd - cc + \frac{2adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$,

ad $\square$ LC. $\dfrac{ddr - ccr + \frac{2adrx}{z} + \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale

$$-mm + ox + \frac{p}{m}xx.$$

Intel-

Intellige hic d minorem eſſe quàm c.

$\frac{adr}{ez} \propto o$

$adr \propto coz$

$\frac{adr}{oz} \propto c$, & $\frac{aaddrr}{oozz} \propto cc$

$\frac{aar}{2czz} \propto \frac{p}{m}$

dele c, $aamr \propto 2cpzz$. Hinc ut r ad $2c$, ita pzz ad aam.

$aamr \propto \frac{2adprz}{o}$

$aom \propto 2dpz$

$\frac{aom}{2pz} \propto d$.

$\frac{ddr - ccr}{2c} \propto - mm$

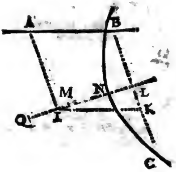
$ddr - ccr \propto - 2cmm$, dele, c & cc.

$ddr - \frac{aaddr3}{oozz} \propto - \frac{2admmr}{oz}$

$doozz + 2ammoz \propto aadrr$

dele d, & extr. $\sqrt{}$. $\frac{oozz}{aa} + \frac{2mmoz}{ad} \propto rr$

$\sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}} \propto r$. Hinc ad inveniendum latus tranſverſum, fiat ut pzz ad aam, ita $\sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, ad $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$.



4tus caſus, ubi centrum M & vertex N ſumi debent inter puncta I & L, lineâ L C exiſtente $\propto \sqrt{- mm - ox + \frac{p}{m} xx}$.

Quod

Quod ſic liquet

Mult. QL. $c - d + \frac{ax}{z}$

per LN. $- c - d + \frac{ax}{z}$

$$- cc + cd - \frac{acx}{z}$$

$$- cd + dd - \frac{adx}{z}$$

lat. tr. lat. rect. $$+ \frac{acx}{z} - \frac{adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$$

$2c$ — r — ▭ QLN. $- cc + dd - \frac{2adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$,

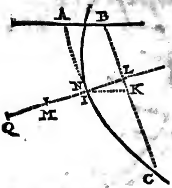
ad □ LC. $\frac{- ccr + ddr - \frac{2adrx}{z} + \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale

$$- mm - ox + \frac{p}{m}xx.$$

Intellige hic ſimiliter d minorem quàm c.

Et fit, ut ante, r ad $2c$, ut pzz ad aam, $d \infty \frac{aom}{2pz}$,

$r \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, & $2c \infty \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$.



5tus caſus, ubi vertex N cadit in punctum I, cùm quantitas mm non reperitur, lineâ LC exiſtente $\infty \sqrt{ox + \frac{p}{m}xx}$.

Quod ſic liquet

Mult. QL. $2c + \frac{ax}{z}$

per LN. $\frac{ax}{z}$

lat. tranſv. lat. rect.

$2c$ — r — ▭ QLN. $\frac{2acx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$,

ad □ LC. $\frac{\frac{2acrx}{z} + \frac{aarxx}{zz}}{2c}$, æquale $ox + \frac{p}{m}xx$.

Intel-

Intellige hic c & d eſſe æquales.

Et ſit, ut ante in Ellipſi, r ad $2c$, ut pzz ad aam,

$$d \propto c \propto \frac{aom}{2pz}, \; r \propto \frac{oz}{ay}, \; \& \; 2c \propto \frac{aom}{pz}.$$



6tus caſus, ubi vertex Q cadit in punctum I, cùm quantitas mn non reperitur, lineâ LC exiſtente

$$\propto \sqrt{-ox + \frac{p}{m}xx}.$$

Quod ſic liquet.

Mult. QL. $\frac{ax}{z}$

per LN. $-c + \frac{ax}{z}$

lat. tranſv. lat. rect.

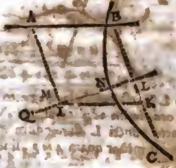
$$2c \text{ — } r \text{ — } \square \text{ QLN. } -\frac{acx}{z} + \frac{aaxx}{zz}.$$

$$\text{ad } \square \text{ LC, } \frac{-\frac{acrx}{z} + \frac{aarxx}{zz}}{2c}, \text{ æquale } -ox + \frac{p}{m}xx.$$

Intellige hic ſimiliter c & d eſſe æquales.

Et ſit, ut ante, r ad $2c$, ut pzz ad aam; $d \propto c \propto \frac{aom}{2pz}$, $r \propto \frac{oz}{ay}$

$$\& \; 2c \propto \frac{aom}{pz}.$$



7mus caſus, ubi centrum M cadit in punctum I, cùm quantitas ox nulla eſt, lineâ LC exiſtente $\propto \sqrt{-mn + \frac{p}{m}xx}$.

 Quod

Quod ſic liquet

Mult. QL. $e+\frac{ax}{z}$

per LN. $-e+\frac{ax}{z}$

$$-ee-\frac{aex}{z}$$

$$+\frac{aex}{z}+\frac{aaxx}{zz}$$

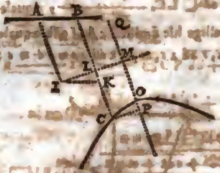
lat. tr. lat. rect.

$2e - r - \square$ QLN. $-ee+\frac{aaxx}{zz}$,

ad $\square$ LC. $\frac{-eer+\frac{aarxx}{zz}}{2e}$, æquale $-mm+\frac{p}{m}xx$.

Intellige hic d eſſe ∞ o.

Unde, ut ante in Ellipſi, invenitur, r eſſe ad $2e$, ſicut pzz ad aam, & $r \infty \sqrt{\frac{4mpzz}{aa}}$, at verò $2e \infty \sqrt{\frac{4aam^3}{pzz}}$.



8vus caſus, ubi linea LC eſt parallela diametro, ad quam illa, quæ eſt in linea IL, ordinatim adplicatur, & ubi centrum M in linea IL ex eadem parte puncti L ſumendum eſt reſpectu puncti I, cùm quantitas oo eſt minor quam $4mp$, lineâ LC exiſtente $\infty \sqrt{mm-ox+\frac{p}{m}xx}$.

Hinc ad inveniendum centrum M, latus rectum R pertinens ad diametrum OP, & latus tranſverſum OQ, pono, ut ante, pro IM, d, & pro OM vel MQ e.

Dein-

Deinde ita procedo:

Mult. L M vel CP. $d - \frac{ax}{z}$

per CP. $d - \frac{ax}{z}$

$dd - \frac{adx}{z}$

$- \frac{adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$

lat. rect. lat. tranſv.

R —— $2e$ —— □CP. $dd - \frac{2adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$,

ad ▭QPO. $\frac{2dde - \frac{4adex}{z} + \frac{2aaexx}{zz}}{R}$,

add. □MO. ee

fit □MP vel LC. $\frac{2dde + eeR - \frac{4adex}{z} + \frac{2aaexx}{zz}}{R}$,

æquale $mm - ox + \frac{p}{m}xx$.

$\frac{4ade}{Rz} \infty o$

$4ade \infty oRz$

$e \infty \frac{oRz}{4ad}$

$\frac{2aae}{Rzz} \infty \frac{p}{m}$

dele e, $2aaem \infty pRzz$.

$\frac{aomRz}{2d} \infty pRzz$

$aom \infty 2dpz$

$\frac{aom}{2pz} \infty d$

Hinc ut $2e$ ad R, ita pzz ad aam.

$\frac{2dde + eeR}{R} \infty mm$

$2dde + eeR \infty mmR$, dele e

$\frac{dozR}{2a} + eeR \infty mmR$

$\frac{oom}{4p} + ee \infty mm$

$ee \infty mm - \frac{oom}{4p}$

$e \infty \sqrt{mm - \frac{oom}{4p}}$, & $2e \infty \sqrt{4mm - \frac{oom}{p}}$

Hinc ad inveniendum latus rectum, fiat ut pzz ad aam, ita $\sqrt{4mm - \frac{oom}{p}}$, ad $\sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4} + \frac{a^4oom^3}{p^3z^4}}$.

Ubi liquet, ut punctum C cadat in Hyperbolam, quemadmodum ſuppoſuimus, quantitatem oo hoc caſu minorem requiri quàm $4mp$, contra quàm in primo caſu.



9nus caſus, ubi centrum M in linea IL ſumendum eſt ex altera parte puncti L reſpectu puncti I, cùm oo eſt minor quàm $4mp$, lineâ LC exiſtente

$$\infty \sqrt{mm + ox + \frac{p}{m}xx}.$$

Quod ſic liquet

Mult. ML vel PC. $d + \frac{ax}{z}$

per PC. $d + \frac{ax}{z}$

$$dd + \frac{adx}{z}$$
$$+ \frac{adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$$

lat. rect. lat. tranſv.

R —— $2e$ —— $\square$ CP. $dd + \frac{2adx}{z} + \frac{aaxx}{zz}$,

ad ▭ QPO. $\dfrac{2dde + \frac{4adex}{z} + \frac{2aaexx}{zz}}{R}$,

add. $\square$ MO. ee

fit $\square$ MP vel LC. $\dfrac{2dde + eeR + \frac{4adex}{z} + \frac{2aaexx}{zz}}{R}$,

æquale $mm + ox + \frac{p}{m}xx$.

Et fit, ut ante, $2e$ ad R, ut pzz ad aam, $d \infty \frac{oom}{2pz}$, $2e \infty \sqrt{4mm - \frac{oom}{p}}$, & $R \infty \sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4} - \frac{a^4oom^3}{p^3z^4}}$.

Ubi

Digitized by Google

Ubi etiam liquet, ut punctum C cadat in Hyperbolam, quemadmodum ſuppoſuimus, quantitatem oo & hoc caſu minorem requiri quàm $4mp$, contra quàm in 2do caſu.



3omus caſus, ubi centrum M cadit in punctum I, cùm quantitas ee nulla eſt, lineâ L C exiſtente $\infty \sqrt{mm + \frac{p}{m}xx}$.

Et ſit $2e \infty 2m$, & $R \infty \frac{2aamm}{pzz}$, & ratio $2e$ ad R,
ut pzz ad aam.

Quod ſic liquet

Mult. M L vel P C. $\frac{ax}{z}$

per P C. $\frac{ax}{z}$

lat. rect. lat. tranſv.

R —— $2e$ —— □ P C. $\frac{aaxx}{zz}$, ad ▭ Q P O. $\frac{2aaexx}{Rzz}$

add. □ M O. ee

fit □ √MP vel L C. $ee + \frac{2aaexx}{Rzz}$,

$\frac{ee \infty mm}{e \infty m}$, & $2e \infty 2m$ æquale $mm + \frac{p}{m}xx$.

$\frac{2aae}{Rzz} \infty \frac{p}{m}$

dele e, $2aaem \infty pRzz$. Hinc ut $2e$ ad R, ita pzz ad aam.

$2aamm \infty pRzz$

$\frac{2aamm}{pzz} \infty R$

 Hinc

Digitized by Google

Hinc cum in omnibus hiſce Hyperbolæ caſibus ſive diverſis ejus poſitionibus quantitas in xx ducta ubique ſigno + affecta reperiatur, & in prioribus ſeptem latus rectum ad tranſverſum ſit, ut pzz ad aam, at in tribus poſterioribus ut aam ad pzz; nec præter has poſitiones ulla alia excogitari queat, quâ linea L C talis, qualis in his omnibus caſibus data fuit, obtineatur: ſequitur, ſi in quæſtione terminus $\frac{p}{m}xx$ ſigno + denotatus fuerit, punctum quæſitum C cadere in Hyperbolam, cujus rectum latus ad tranſverſum ſive etiam tranſverſum ad rectum, pro diverſa terminorum ipſius L C conſtitutione, ſit ut pzz ad aam, ac ejuſdem poſitio, qualis jam oſtenſa fuit, exiſtat.

Ubi denique notandum, quòd, ſicut punctum C in Hyperbolam cadere oſtenſum eſt, cujus vertex N vel O, id ipſum ſimiliter in Hyperbolâ oppoſita pro libitu aſſumi poſſit, cujus vertex eſt Q, non autem indifferenter in quatuor ejuſmodi ſectionibus, quæ Conjugatæ vocantur, ſimul.

CCC *Quâ quidem ratione inde facile eſt invenire hanc Parabolam per Problema 1mum primi libri Conicorum Apollonii.*]

Quò illis, quibus hi Apollonii libri, aut etiam aliorum, qui de Conicis ſcripſerunt, non ſunt ad manus, hac in parte ſatisfiat: lubet hoc loco adducere ea, quæ mihi olim circa hæc, dum me inter peregrinandum in hac Geometriæ methodo exercebam, exciderant, ſimili occaſione ipſe inveſtiganda propoſui ac inveni. Quod etiam iis in hac Methodo ſe oblectare cupientibus, ut proprio marte propoſitiones invenire addiſcant, inſervire poteſt, prout iis, hiſce tanquam exemplis, quibus ad alias quærendas & inveſtigandas inſtigentur, præivero; ne ad univerſalem Matheſeos complexionem plura librorum volumina evolvere & propoſitiones in iis ſingulas excutere (quod pleriſque ſummus eſt ſcopus) opus habeant; quin potiùs quo pacto illæ inventæ fuerint perpendant, novaſque alias innumeras, quibus ſcientia hæc non parvum incrementum capere valeat, invenire moliantur.

Verùm enimvero ut non ſolùm pateat, quâ ratione illa, quæ hoc loco Autor ab Apollonio oſtenſa citavit, juxta Geometriæ ſuæ methodum inveniri poſſint; ſed etiam illa, quæ ex ipſo p. 29, 31, & 32 allegavit (quæ omnia, quod ſciam, ea ſunt, quæ ab eo ad Geometriam ſuam ex Apollonio præſupponuntur); non abs re fue-

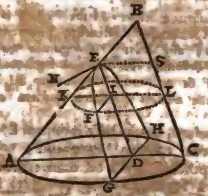
re fuerit illa præſenti commentario ſimul comprehendere atque ad Autoris mentem ſic explicata exhibere.

DE LOCIS SOLIDIS SIVE CONICARUM SECTIONUM PROPRIETATIBUS.

Suppoſitiones.

1. Rectam lineam B A vel BC, quæ à vertice coni B ducitur ad baſis AC circumferentiam, eſſe in ſuperficie conica.

2. Sectionem KFL, baſi coni AC parallelam, eſſe circulum.



De *PARABOLA*, quæ eſt ſectio coni ABC per planum GFEH, in quâ linea ED, communis ſectio trianguli per axem ABC & plani ſecantis GFEH, quæ & ſectionis diameter dici conſuevit, parallela eſt uni laterum AB, BC ejuſdem trianguli, ut hic ipſi BC; lineâ GH, quæ Baſis Sectionis GFEH vocatur, ipſam AC, baſin trianguli per axem, ad rectos angulos ſecante.

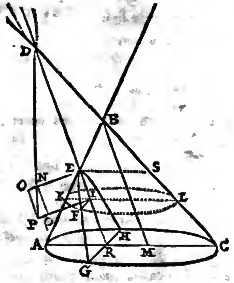
Eſto

Eſto AB ∞ a
BC ∞ b Fiat propter ſimilitudinem △^{rum} ABC & KEI
AC ∞ c
EB ∞ d ut BC ad CA, ita EI ad IK
EI ∞ x b —— c —— x / $\frac{cx}{b}$
FI ∞ y Rurſus fiat propter ſimilitudinem
△^{rum} ABC & EBS — Mult.
ut AB ad AC, ita EB ad ES ſeu IL — ℞ in
a —— c —— d / $\frac{cd}{a}$
—— □EI
fit ▭ KIL. $\frac{ccd}{ab}x$ ∞ yy.

Hinc ſi fiat, ut ab ad cc, hoc eſt, ut ▭ ABC ad □ AC, ita d, hoc eſt, EB, ad quartam, quæ ſit EN: erit EN ∞ $\frac{ccd}{ab}$. Quæ ſi brevitatis causâ nominetur r, habebitur rx ∞ yy. Quod ipſum eſt, quod ab Apollonio eſt oſtenſum Theoremate 11mo primi libri Conicorum, ubi docet, rectangulum quodlibet, ſub rectâ EN ſeu r ſic inventâ, & diametri ſegmento EI, quod inter verticem ejus E & ordinatim adplicatam FI intercipitur, comprehenſum, eſſe æquale quadrato ejuſdem ordinatim adplicatæ FI.

Ubi notandum, lineam hanc inventam EN ſeu r, ab Apollonio vocari Latus rectum Parabolæ, vel etiam Lineam, juxta quam poſſunt, quæ ad diametrum ED ordinatim adplicantur. à Mydorgio autem hæc linea Parameter appellatur. Quam porrò lineam breviùs obtinere licet, quàm hic cum Apollonio oſtendimus. Etenim lineâ ES exiſtente ∞ $\frac{cd}{a}$, cum BC ſit ad CA, hoc eſt, b ad c, ſicut ES, hoc eſt, $\frac{cd}{a}$, ad EN ∞ $\frac{ccd}{ab}$: inveniri poterit EN, quærendo tantùm ipſis BC, CA, & ES quartam proportionalem. Quemadmodum ex oſtenſis eſt maniſeſtum.

De



De *HYPERBOLA*; quæ eſt ſectio coni ABC per planum GFEH, in quâ linea ER, communis ſectio trianguli per axem ABC & plani ſecantis GFEH, quæ & Sectionis diameter dicitur, extra ejus verticem E producta convenit cum uno laterum AB, BC ejuſdem trianguli extra verticem coni B producto, ut hîc in D; lineâ GH, quæ baſis ſectionis GFEH vocatur, ipſam AC, baſin trianguli per axem, ad rectos angulos ſecante.

Sit AM ∞ a

MB ∞ b — Fiat propter ſimilitudinem Δ^{rum} CBM & LDI

MC ∞ c

DE ∞ q — ut BM ad MC, ita DI ad IL

EI ∞ x, eritq; DI ∞ $q+x$ — b — c — $q+x$ / $\frac{cq+cx}{b}$

FI ∞ y.

Rurſus fiat propter ſimilitudinem Δ^{rum} MBA & IEK

ut BM ad MA, ita EI ad IK

b — a — x / $\frac{ax}{b}$ — Mult.

□ FI

fit ▭ LIK, $\frac{acqx+acxx}{bb}$ ∞ yy.

Hinc ſi fiat, ut bb ad ac, hoc eſt, ut □ BM ad ▭ AMC, ita q, hoc eſt, DE, ad quartam, quæ ſit EN: erit EN ∞ $\frac{acq}{bb}$. Ipſa autem brevitatis causâ nominetur r.

Deinde fiat rurſus, ut bb ad ac, hoc eſt, ut DE ad EN, ita x, hoc eſt, EI ſeu NQ ad QP ∞ $\frac{acx}{bb}$. Eritque rx + QP in x ∞ yy. Quod ipſum eſt, quod ab Apollonio eſt oſtenſum Theoremate duodecimo primi libri Conicorum, ubi docet, rectangulum quodvis, ſub rectâ EN ſeu r ſic inventâ, & diametri ſegmento EI ſeu x, quod inter ejus verticem E & ordinatim adplicatam FI interjicitur, comprehenſum, unà cum rectangulo NQP, quod ſub eodem diametri ſegmento EI vel NQ, & lineâ QP, ad quam NQ eandem rationem habet, quam DE ad EN, continetur, quadrato ejuſdem ordinatim adplicatæ FI eſſe æquale.

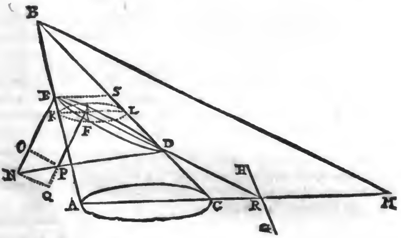
Ubi notandum, lineam DE ab Apollonio vocari Latus tranſverſum Hyperbolæ, & lineam inventam EN Latus rectum, vel etiam Lineam, juxta quam poſſunt, quæ ad diametrum ER ordinatim adplicantur. à Mydorgio verò hæc ipſa Parameter appellatur. Quæ porrò linea faciliùs obtineri poteſt, hoc modo: Ductâ ſcilicet ES ipſi AC parallelâ, ac deinde ipſis BM, MA, & SE quærendo quartam proportionalem EN. Etenim cum BM ſit ad MC, hoc eſt, b ad c, ſicut DE, hoc eſt, q, ad ES: erit ES ∞ $\frac{cq}{b}$. Unde cum præterea BM ad MA, hoc eſt, b ad a, ſit ſicut ES, hoc eſt, $\frac{cq}{b}$, ad quartam $\frac{acq}{bb}$, quæ hîc eadem eſt, quæ linea EN ſuperiori modo inventa: manifeſtum eſt id, quod proponitur.

De *ELLIPSI*, quæ eſt ſectio Coni ABC per planum GFEH, in quâ linea ER, communis ſectio trianguli per axem ABC & plani ſecantis GFEH convenit cum utroque latere AB, BC ejuſdem trianguli in E & D; lineâ GH, quæ baſis ſectionis GFEH vocatur, ipſam AC, baſin trianguli per axem, eandémve productam, ad rectos angulos ſecante.

Eſto

Digitized by Google

Eſto AM $\infty\ a$
MB $\infty\ b$
MC $\infty\ c$
ED $\infty\ q$
EI $\infty\ x$, eritque ID $\infty\ q - x$
FI $\infty\ y$.



Fiat propter ſimilitudinem △rum BCM & DLI
ut BM ad MC, ita DI ad IL

$b \text{ — } c \text{ — } q-x \,/\, \frac{cq-cx}{b}$

Rurſus fiat propter ſimilitudinem △rum ABM & KEI
ut BM ad MA, ita EI ad IK

$b \text{ — } a \text{ — } x \,/\, \frac{ax}{b}$ } Mult.

fit □ KIL. $\frac{acqx - acxx}{bb}$ □FI $\infty\ yy$.

Hinc ſi ut in Hyperbola fiat, ut bb ad ac, hoc eſt, ut □ BM ad ▭ AMC, ita q, hoc eſt, DE, ad quartam, quæ ſit EN: erit EN $\infty\ \frac{acq}{bb}$. Ipſa autem brevitatis cauſâ nominetur r.

Deinde fiat rurſus, ut bb ad ac, hoc eſt, ut DE ad EN, ita x, hoc eſt, IE ſeu PO, ad ON $\infty\ \frac{acx}{bb}$. Eritque rx — NO in $x \infty\ yy$.

Quod ipſum eſt, quod ab Apollonio eſt oſtenſum Theoremate decimo tertio primi libri Conicorum; Ubi docet, rectangulum quodvis, ſub rectâ N E ſeu r ſic inventâ, & diametri ſegmento E I ſeu x, quod inter ejus verticem E & ordinatim adplicatam F I interjicitur, comprehenſum, minus rectangulo N O P, quod ſub eodem diametri ſegmento E I vel O P, & lineâ N O, ad quam O P eandem rationem habet, quam D E ad E N, continetur, quadrato ejuſdem ordinatim adplicatæ F I eſſe æquale.

Ubi notandum lineam E D, ſectionis Diametrum, ab Apollonio vocari Latus tranſverſum ut & Diametrum tranſverſam Ellipſis, & lineam inventam N E Latus rectum, vel etiam Lineam, juxta quam poſſunt, quæ ad diametrum E D ordinatim adplicantur. à Mydorgio autem hæc linea N E Parameter appellatur. Quæ porrò linea, ut ante in Hyperbola, poſtquam linea E S ipſi A C ducta eſt parallela, breviùs obtineri poteſt, ſi tantùm ipſis B M, M A, & S E quæratur quarta proportionalis: quandoquidem hæc ſemper eadem exiſtit, quæ ipſa N E, inventa, ut ſupra. Sicut ſuperiùs à nobis in Hyperbola eſt oſtenſum.

Ex his porrò facilè liquet, quam inter ſe rationem habeant quadrata ordinatim adplicatarum ad diametrum in unaquaque harum trium ſectionum. Etenim ſi in Parabolâ linea E D vocetur z, & ordinatim adplicata G D vocetur v, erit, ut ſupra, $\frac{ccdz}{ab} \propto vv$: ac proinde yy ad vv, hoc eſt, □ F I ad □ G D, ut $\frac{ccdx}{ab}$ ad $\frac{ccdz}{ab}$, ſeu x ad z, hoc eſt, E I ad E D. Hoc eſt, in Parabola quadrata ordinatim adplicatarum F I, G D inter ſe ſunt, ſicut lineæ E I, E D, quæ ab ipſis ex diametro E D ad verticem E abſcinduntur. Quod ipſum eſt, quod docet Apollonius Prop^ne 20ma libri 1^mi Conicorum.

Vide fig. 2. & 3. Eodem modo in Hyperbola & Ellipſi acceptâ pro E I aliâ magnitudine quàm ante, ut puta z, erit in Hyperbola $vv \propto \frac{acqz + aczz}{bb}$, & in Ellipſi $vv \propto \frac{acqz - aczz}{bb}$. Unde yy ad vv in Hyperbola fit, ut $\frac{acqx + acxx}{bb}$ ad $\frac{acqz + aczz}{bb}$, hoc eſt, ut $qx + xx$ ad $qz + zz$; at in Ellipſi, ut $\frac{acqx - acxx}{bb}$ ad

Digitized by Google

$\frac{acqz - aczz}{bb}$, hoc eſt, ut $qx - xx$ ad $qz - zz$. Hoc eſt, in Hyperbola & Ellipſi quadrata ordinatim adplicatarum inter ſe ſunt, ut rectangula contenta lineis, quæ inter ipſas & vertices tranſverſi lateris interjiciuntur. Denique, quia in Hyperbola □ FI $\propto \frac{acqx + acxx}{bb}$ eſt ad ▭ EID $\propto qx + xx$, ut ac ad bb; ſimiliterque in Ellipſi □ FI $\propto \frac{acqx - acxx}{bb}$ ad ▭ EID $\propto qx - xx$, ut ac ad bb, hoc eſt, ut NE ad ED: patet in utrâque figurâ quadrata ordinatim adplicatarum FI eſſe ad rectangula EID, quæ ſub rectis EI, ID, inter FI & vertices tranſverſi lateris E, D interceptis, comprehenduntur, ut figuræ rectum latus NE ad tranſverſum ED. Omnino ut habet Proptio 21ma libri 1mi Conicorum Apollonii. Eadem eſt ratio in Circulo, qui non niſi certa Ellipſis ſpecies cenſenda eſt, quippe in qua rectum latus & tranſverſum ſunt æqualia.

Oſtenſis igitur quo pacto Cono dato, eoque ſecto, ita ut ſectio Parabola, Hyperbola, vel Ellipſis exiſtat, ſectionis ſive figuræ hujus latera inveniri queant: reſtat ut è contra oſtendamus, quâ viâ Conus inveniri poſſit, & in eo unaquæque trium harum figurarum exhiberi, cujus latera ſint datis rectis lineis æqualia.

Ut ad inveniendum Conum ABC, in eoque ſectionem GFEH, quæ Parabola appellatur, cujus latus rectum ſit $\propto \frac{oz}{a}$, facio $\frac{ccd}{ab} \propto \frac{oz}{a}$ ſeu $\frac{boz}{ab}$, & ſit rejecto ab, communi denominatore, $ccd \propto boz$. Hoc eſt, diviſo utrobique per cc, erit $d \propto \frac{boz}{cc}$. Hinc aſſumpto triangulo quolibet ABC, cujus latera ſint, AB $\propto a$, BC $\propto b$, & AC $\propto c$, ſi in ipſo ſumatur EB $\propto \frac{boz}{cc}$, atque ex E ducatur ED ipſi BC parallela: erit AC diameter circuli ſive baſis Coni, & ABC triangulum per axem. Ac proinde ſi per D in plano baſis hujus Coni ipſi AC ad rectos angulos ducatur GH, atque per rectas GH, DE ſectio inſtituatur, faciens in ſuperficie Conica curvam lineam GFEH: erit hæc ipſa Parabola, cujus latus rectum NE ſit datæ $\frac{oz}{a}$ æqualis, quemadmodum requirebatur. Quòd ſi verò ipſa talis præterea exhiberi debeat, ut rectæ FI, quæ ſemper ipſi GH parallelæ intelli-

Vide fig. 1.

guntur, in dato angulo ad diametrum ED adplicentur, opùs tantùm erit angulum GDE ſive EDH dato æqualem efficere, intelligendo ad id circulum AGCH moveri circa AC, tanquam axem, eritque Problemati ex omni parte ſatisfactum.

Vide 2. & 3. fig. Similiter ad inveniendum Conum ABC, & in eo ſectionem GFEH, quæ ſit vel Hyperbola vel Ellipſis, cujus latus rectum ſit $\infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, & transverſum $\infty \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$: facio $\frac{acq}{bb} \infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, & $q \infty \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$. Hoc eſt, aſſumptis horum quadratis, erit $\frac{aaocqq}{b^4} \infty \frac{oozz + 4mpzz}{aa}$. & $qq \infty \frac{aaoomm + 4aam^3p}{ppzz}$. Adeoque ſi in termino $\frac{aaccqq}{b^4}$ pro qq hic numerus ſubſtituatur, habebitur $\frac{a^4ccoomm + 4a^4ccm^3p}{b^4ppzz} \infty \frac{oozz + 4mpzz}{aa}$. Hoc eſt, multiplicato per crucem, erit $a^6ccoomm + 4a^6ccm^3p \infty b^4oopp z^4 + 4b^4mp^3z^4$: & ſit, ſi utrinque per $oopp z^4 + 4mp^3z^4$ dividatur, $\frac{a^6ccoomm + 4a^6ccm^3p}{oopp z^4 + 4mp^3z^4}$ ſeu $\frac{a^6ccmm}{ppz^4} \infty b^4$. Unde extrahendo utrobique radicem biquadratam, invenitur $\sqrt{\frac{a^3cm}{pzz}} \infty b$. Hinc aſſumptis ad libitum duabus lineis AM & MC, iiſque in directum ſeu in unam lineam poſitis, quarum major AM ſit ∞a, & minor MC ∞c, duco ex M in angulo quocunque rectam MB $\infty \sqrt{\frac{a^3cm}{pzz}}$, jungoque AB & BC; ita ut habeatur triangulum per axem ABC, cujus baſis AC diametrum circuli referat, qui Coni baſis exiſtit, & punctum B verticem ipſius Coni. Deinde productâ BC, ad Hyperbolam obtinendam, inter angulum ABD pro utrâque figurâ aptanda erit recta ED $\infty \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$, ita ut ipſa parallela ſit lineæ BM, (quod facile eſt,) continuataque occurrat rectæ AM in R. Quibus ſic poſitis, ſi per R in plano baſis hujus Coni ipſi AM ad rectos angulos ducatur GH, atque per rectas GH, RE ſectio inſtituatur, faciens in ſuperficie conica curvam lineam FE: erit hæc ipſa Hyperbola vel Ellipſis quæſita, hoc eſt, cujus rectum latus eſt $\infty \sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, & transver-

ſum

ſum $\infty \sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam3}{pzz}}$. Quòd ſi verò inſuper tales exhibendæ ſint, ut rectæ FI, quæ ſemper ipſi GH parallelæ intelliguntur, in dato angulo ad diametrum ER adplicentur, oportet tantùm (ut ante in Parabola) angulum GRE ſive ERH dato æqualem efficere, intelligendo ad id planum baſis hujus Coni eſſe mobile circa AM, tanquam axem: eruntque ſic conditiones quæſtionis omnes adimpletæ, ita ut his primo, ſecundo, & tertio Problematis primi libri Conicorum Apollonii ſatisfactum putem. Quorum quidem omnium veritas ex præcedentibus fit manifeſta.

Eodem modo reliquos caſus Ellipſeos & Hyperbolæ, in quibus latera recta & tranſverſa alias quantitates ab his diverſas ſortiuntur, qualeſque eas in antecedentibus determinare docuimus, perſequi licet.

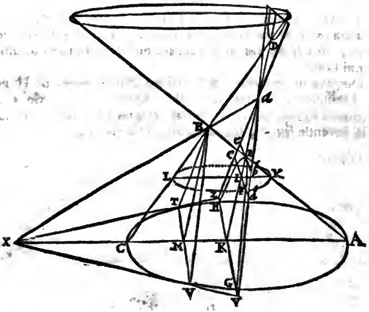
Denique ut appareat, quâ ratione Propoſitiones de Hyperbolæ Aſymptotis agentes, de quibus Apollonius ſecundo atque ſequentibus Conicorum libris multas egregias proprietates demonſtravit, inventæ fuerint, ſequentia protuliſſe juvabit.



Sic

Digitized by Google

Sit AM ∞ a
MB ∞ b
MC ∞ c
DE ∞ q
EI ∞ x
FI ∞ y
ER ∞ z, eritque DR ∞ $q + z$
GR ∞ v
aE ∞ $ſ$
XM ∞ t, eritque XC ∞ $t - c$.



Mult. XA. $t + a$
per XC. $t - c$

$-tc - ac$

Ad □XM. tt — $tt + ta$
add. ▭ CMA ſeu □MV. ac

▭CXA.

per 47. 1*mi* *Elem.* □XV. $tt + ac$ ∞ $tt + ta - tc - ac$. *per* 36. 3*tii* *Elem.*

$2ac$ ∞ $ta - tc$

XM. $\frac{2ac}{a-c}$ ∞ t

Fiat

Digitized by Google

Fiat propter ſimilitudinem △rum B M A & E R A ut B M ad M A, ita E R ad R A

$$b \;—\; a \;—\; z \;/\; \frac{az}{b}$$

Rurſus fiat propter ſimilitudinem △rum B M C & D R C ut B M ad M C, ita D R ad R C

$$b \;—\; c \;—\; q+z \;/\; \frac{cq+cz}{b}$$

add.

$$CA.\ \frac{az+cz+cq}{b} \propto a+c$$

$$az+cz+cq \propto ab+cb$$

$$az+cz \propto ab+cb-cq$$

$$z \propto \frac{ab+cb-cq}{a+c}$$

Ad R C. $\frac{cq+cz}{b}$

adde X C. $t-c$

Fiat propter ſimilitudinem △rum X M B & X R a.

X M — M B — R a

$$t \;—\; b \;—\; XR.\ \frac{cq+cz+bt-bc}{b} \;/\; \text{ad } \text{ſ}+z$$

Eritque, per 16. 6ti Elem.

$$t\text{ſ}+tz \propto cq+cz+bt-bc$$

$$t\text{ſ}+tz-bt \propto cq+cz-bc$$

$$t \propto \frac{cq+cz-bc}{\text{ſ}+z-b} \propto \frac{2ac}{a-c}$$

$$aq+az-ab-cq-cz+cb \propto 2a\text{ſ}+2az-2ab$$

$$ab+cb+aq-cq-2a\text{ſ} \propto az+cz$$

$$\frac{ab+cb-cq}{a+c} \propto \frac{ab+cb+aq-cq-2a\text{ſ}}{a+c} \propto z$$

$$ab+cb-cq \propto ab+cb+aq-cq-2a\text{ſ}$$

$$2a\text{ſ} \propto aq$$

fit aE $\propto \text{ſ} \propto \frac{1}{2}q$. Id quod oſtendit, rectas, quæ oppoſitarum ſectionum Aſymptoti dicuntur, in medio tranſverſi lateris D E ſe invicem decuſſare. Ubi etiam patet, angulos, quos comprehendunt, angulo verticis trianguli T B V, cui planum harum ſectionum æquidiſtat, eſſe æquales.

Ee Fiat

Fiat propter ſimilitudinem △rum BMV & aRY

□BM □MV
bb —— ac

ad

□aE		□Eb
$\frac{1}{4}qq$		$\frac{1}{4}\frac{acqq}{bb}$.
□aI		□Id
$\frac{1}{4}qq+qx+xx$		$\frac{1}{4}\frac{acqq+acqx+acxx}{bb}$. A quo ſubducto □to IF, ante invento, ∞ $\frac{acqx+acxx}{bb}$, relinquetur, per 5. 2di Elem., ▭ eFd ∞ $\frac{1}{4}\frac{acqq}{bb}$.
□aR		□RY
$\frac{1}{4}qq+qz+zz$		$\frac{1}{4}\frac{acqq+acqz+aczz}{bb}$. A quo ſubducto □to RG, ante invento, ∞ $\frac{acqz+aczz}{bb}$, relinquetur, per 5. 2di Elem., ▭ ZGY ∞ $\frac{1}{4}\frac{acqq}{bb}$.

Jam cùm □Eb, ▭ eFd, & ▭ ZGY ſingula ſint inventa $\infty\frac{1}{4}\frac{acqq}{bb}$, conſtat ipſa inter ſe eſſe æqualia. Eadem eſt ratio de quibuſcunque aliis hujuſmodi rectangulis, in infinitum aſſumptis. Quod ipſum eſt, quod docet Proptio 10. 2di libri Conicorum Apollonii.

Porrò, quoniam $\frac{1}{4}\frac{acqq}{bb}$ eſt $\frac{1}{4}$ta pars rectanguli ſub latere tranſverſo DE ∞ q & latere recto NE, ante invento, $\infty\frac{acq}{bb}$, manifeſta hinc etiam eſt Proptio 1ma ejuſdem libri.

Præ-

Digitized by Google

Præterea ſupponatur c E vel E $b \infty e$

e F ∞f, eritque

F $d \infty \frac{ee}{f}$

g E ∞g

E F ∞h

F $b \infty i$, eritque

E $h \infty h + i$

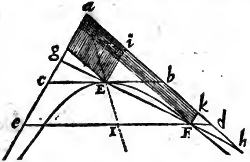
E $i \infty k$

$a\ i \infty l$

F $k \infty m$

& $a\ k \infty n$, eritque

$i\,k \infty n - l$.



Tum fiat propter ſimilitudinem $\triangle$lorum cgE & egF

ut g E ad E c, ita g F ad F e

$g - e - g + h / f$

Eritque per 15. 6ti Elem. $gf \infty eg + eh$

$gf - ge \infty eh$

Rurſus fiat propter ſimilitudinem $\triangle$lorum F $d\ b$ & E $b\ b$

ut F b ad F d, ita E b & E b

$i - \frac{ee}{f} - h + i / e$

Eritque per 16. 6ti Elem. $i \infty \frac{eh + ei}{f}$

$fi \infty eh + ei$

Et fit $gf - ge \infty fi - ei \infty eh$

Id eſt, dividendo utrinque per $f - e$, erit $g \infty i$. Hoc eſt, gE eſt æqualis F b. Eadem eſt ratio de recta E F, quomodocunque per duo quælibet alia puncta in Hyperbolâ ducta, & utrinque Aſymptotis terminata. Id quod cum octava convenit Propoſitione ſecundi libri Conicorum Apollonii.

Ad hæc fiat propter parallelas E i & F k

ut g E ad E F, ita $a\ i$ ad $i\ k$

$g - h - l / n - l$

Eritque per 16. 6ti Elem. $gn - gl \infty hl$

Hoc eſt, in locum g ſubſtituto i, habebitur $in - il \infty hl$, & fit $h \infty \frac{in - il}{l}$.

Deni-

Denique fiat propter ſimilitudinem △^{lorum} E i h & F k h
ut E i ad E h, ita F k ad F h

$$k - h + i - m \quad l \quad i$$

Eritq; per 16. 6^{tı} Elem. $\overline{ki \infty hm + im}$

$$\text{vel } \overline{ki - mi \infty hm}$$

$$\& \text{ fit } h \infty \frac{ki - mi}{m} \infty \frac{in - il}{l}$$

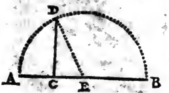
$$\overline{kl - ml \infty mn - ml}$$

& $kl \infty mn$. Hoc eſt, rectangulum ſub E i & i a eſt æquale rectangulo ſub F k & k a. Id quod eodem modo de omnibus aliis rectangulis, ſub ſimilibus lineis comprehenſis, manifeſtum eſt; prout nimirum ad hoc præter puncta E & F alia quævis in Hyperbola aſſumpta fuerint. Quibus haud diſſimilia ſunt ea, quæ Apollonius demonſtravit Prop^{ne} 12ma libri 2^{di} Conicorum.

Unde demum facile eſt inferre, cum puncta hæc ulteriùs atque ulteriùs ſemper in Hyperbola aſſumi poſſint, ac inde uno latere horum rectangulorum continuè accreſcente latus alterum ipſorum perpetuò decreſcat; quòd idcirco Aſymptoti $a\,b$, $a\,c$, & Hyperbola E F in infinitum productæ ad ſe ipſas propiùs accedant, & ad intervallum perveniant, minus quolibet dato intervallo. Quibus & illa quadrant, quæ ab Apollonio Prop^{bus} 1ma & 14ta ejuſdem libri ſunt oſtenſa.

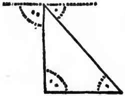
Cæterùm quoniam D^{nus} des Cartes univerſim iis tantùm propoſitionibus uſus fuiſſe videtur, quæ non niſi proprietates declarant, quæ cum ſubjecto ſuo omnimodè reciprocantur, & à Logicis proprietates 4^{ti} modi appellari ſolent: viſum fuit hoc loco deinceps modum, quo cognoſci poſſunt, qualem eum eruditiſſimus atque ingenioſiſſimus Vir-Juvenis D. Johannes Huddenius, Amſtelodamenſis, Gerh. fil. excogitavit, per unum aut alterum exemplum exponere.

Ut



Ut ad inquirendum, utrum proprietas circuli, quæ declarat, quadrata ordinatim adplicatarum ad diametrum eſſe æqualia rectangulis ſub ſegmentis diametri, cum circulo ſit reciproca nec ne; ſupponatur recta A B, & in eam perpendicularis C D, hanc habens proprietatem, ut quadratum ſuper ipſâ ſit æquale rectangulo ſub ſegmentis A C, C B. Quæritur qualis ſit linea A D B.

Ad quod inveſtigandum, ſectâ A B bifariam in E, ponatur A E vel E B ∞ *a*, C E ∞ *x*, & C D ∞ *y*: eritque A C ∞ *a* — *x*, & C B ∞ *a* + *x*. Jam cum A C multiplicatâ per C B proveniat *aa* — *xx*, pro rectangulo A C B; hocque ex data proprietate æquetur quadrato ex C D: erit *aa* — *xx* ∞ *yy*. Deinde, quoniam, lineâ C D perpendiculari exiſtente ſuper A B, quadratum ex E D, per 47 Primi Elementorum Euclidis, eſt æquale duobus quadratis ex E C & C D: erit quadratum ex E D ∞ *xx* + *yy*. Ac proinde ſi in hac ſumma pro *yy* ſubrogetur *aa* — *xx*, habebitur quadratum ex E D ∞ *aa*, hoceſt, E D ∞ *a*. Id quod oſtendit, rectis A E, E D, & E B ſingulis ipſi *a* æqualibus exiſtentibus, lineam A D B eſſe circulum, cujus centrum E, ac idcirco proprietatem allegatam cum circulo eſſe reciprocam. Quod ipſum & hoc modo cognoſci poteſt. Advertendo ſcilicet, utrum proprietas propoſita ſine neceſſariâ ſubjecti incluſione demonſtrari poſſit nec ne. Si enim ea abſque neceſſaria ſubjecti incluſione demonſtrari nequeat, proprietas erit reciproca; ſin ſecus, proprietas communis.



Ut ad intelligendum, num proprietas hæc cum triangulo rectangulo ſit reciproca, nimirum: tres angulos ſimul ſumptos æquales eſſe duobus rectis: advertendum tantummodo eſt, utrum demonſtratio illius triangulum rectangulum præſupponat nec ne; ac proinde cum ipſa abſque ulla diſcretione in quolibet triangulo locum obtineat, concludendum

 eſt

eſt eandem non niſi pro communi trianguli rectanguli proprietate eſſe habendam.

Ita etiam conſiderando demonſtrationem ſupradictæ proprietatis circuli, quoniam ipſa radiorum æqualitatem, in quâ circuli natura conſiſtit, omnino expoſcit, convincitur eandem proprietatem ſoli circulo competere ac cum eodem reciprocari.

Similiter, ſi quis naturam demonſtrationis perpendat, quâ oſtenditur, quadrata ordinatim adplicatarum inter ſe eſſe, ſicut rectangula ſub ſegmentis diametri: comperietur, eandem demonſtrationem radiorum æqualitatem non includere, adeoque proprietatem hanc non niſi communem proprietatem circuli exiſtere: quandoquidem & Ellipſi, cujus Circulus non niſi ſpeciem refert, omnino convenit.

Sed & uſum horum perpendere, cum in univerſa Matheſi haud exigui ſit momenti, non inutile fuerit ſequentia, quibus eundem quadantenus indicaſſe exiſtimamus, in medium afferre.

Primò itaque, poſtquam in quærenda æquatione proprietas reciproca adhibita fuit, certi ſumus totam ſubjecti naturam hâc ratione in ea eſſe incluſam; adeoque, ad aliam adhuc æquationem à præcedenti diverſam obtinendam, non licere ut ad id alia ejuſdem ſubjecti proprietas adhibeatur, niſi accedat aliquid, quod in præcedenti æquatione nondum ſit involutum: quandoquidem ſic circulum committi manifeſtum eſt.

2do, Theoremata omnia, quæ neceſſitatem ſubjecti inferunt ex proprietate jam oſtensâ, (ut, verbi gratiâ, Prop. 48. primi libri Elementorum) quæque ut plurimùm indirectè per deductionem ad abſurdum demonſtrari ſolent, poſſunt directè demonſtrari, dummodo oſtendatur, proprietatem illam cum ſubjecto ſuo eſſe reciprocam.

3tio, Si quis ad ſolvenda Problemata naturam ſubjecti retinere velit, commodiſſimè id præſtare poterit, retinendo tantùm proprietatem aliquam, cum eodem ſubjecto reciprocam, quæ aut omnium facillimè memoriæ mandari queat, aut etiam ſimpliciſſima exiſtat: cum minimè neceſſum ſit, ut is retinendis omnibus illius Theorematis aggravetur, quippe quæ omnia Geometriæ hujus Methodo certâ arte ex hujuſmodi proprietate deducuntur.

4to, Hinc etiam perſpicuum eſt, quàm parùm neceſſe ſit, libros, qui Theorematibus referti ſint, conſcribere, quæ aut uſum nullum

lum habent, aut difficulter retineri poſſunt, aut etiam beneficio alicujus facilioris ſive ſimplicioris proprietatis reciprocæ è natura ſubjecti ſui nullo negotio eruuntur.

Nimirum ſi latus hocce rectum ſtatuatur $\sqrt{\frac{oozz}{aa} + \frac{4mpzz}{aa}}$, D *tranſverſum erit* $\sqrt{\frac{aaoomm}{ppzz} + \frac{4aam^3}{pzz}}$.] Qui termini hoc etiam pacto ſcribi poſſunt $\frac{z}{a}\sqrt{oo + 4mp}$, & $\frac{am}{pz}\sqrt{oo + 4mp}$, quemadmodum poſtea in demonſtratione pag. 33 à Domino des Cartes ſunt aſſumpti. Similiter, ſi habeatur, ut paulò ſuperiùs $\sqrt{\frac{oozz}{aa} - \frac{4mpzz}{aa}}$: poterit ejus loco ſcribi $\frac{z}{a}\sqrt{oo - 4mp}$. Eodem modo cùm habetur $\sqrt{\frac{4a^4m^4}{ppz^4} - \frac{a^4oom^3}{p^3z^4}}$ (ut paulò poſt pagin. 31): poſſumus ejus loco ſcribere $\frac{aam}{pzz}\sqrt{4mm - \frac{oom}{p}}$, tollendo ſcilicet ex ſigno radicali quicquid eſt rationale. Haud ſecus fit, cùm pro $\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$ ſcribitur $\frac{a}{b}\sqrt{3}$. Quæ ſcribendi ratio non ineptè quoque ad radicum commenſurabilium ſpecies ſive operationes adhiberi poteſt. Ut, ad addendum $\sqrt{27}$ ad $\sqrt{75}$: quoniam $3\sqrt{3}$ idem eſt quod $\sqrt{27}$, & $5\sqrt{3}$ idem quod $\sqrt{75}$, hinc ſumma earum erit $8\sqrt{3}$, & differentia $2\sqrt{3}$, productum verò multiplicationis 15,3 ſeu 45; & quotiens ex diviſione majoris per minorem $\frac{5}{3}$ ſeu $1\frac{2}{3}$. Sic ad multiplicandum $\frac{8}{27\sqrt{3}}$ per $3\sqrt{3}$, divido *Vide pag.* $27\sqrt{3}$ per $3\sqrt{3}$, ſeu, quod idem eſt, 27 per 3, & fit productum $\frac{8}{9}$. *75. lin.* Similiter ad dividendum fractiones $\frac{2}{3}$, 1, & $\frac{4}{3}$ per $\sqrt{3}$, multiplico *penult. & ult.* earum denominatores per $\sqrt{3}$, & fiunt quotientes $\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$, & *Vide pag. 76. lin. 7.* $\frac{4}{3\sqrt{3}}$, ſeu $\frac{2}{9}\sqrt{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt{3}$, & $\frac{4}{9}\sqrt{3}$, perinde enim eſt ſive hoc ſive illo modo ſcribantur. Idem de ſequentibus formulis, quas hîc ſubjungere viſum fuit, intellige. Ut ſi habeatur $\sqrt{ac}$, ejus loco ſcribere poſſumus $a\sqrt{\frac{c}{a}}$, vel $c\sqrt{\frac{a}{c}}$. Et ſi habeatur $\frac{ab}{\sqrt{ac}}$, ſcribi ejus loco poteſt $b\sqrt{\frac{a}{c}}$; adeò ut, ſi habeatur $\frac{acc + a^3}{2\sqrt{aa + cc}}$, ejus loco ſub- *Vide pag. 82. lin. 18.* ſtitui poſſit $\frac{1}{2}a\sqrt{aa + cc}$. Ita pro $b\sqrt{\frac{ac}{bb}}$ ponere licet $\sqrt{ac}$, nec

non

Digitized by Google

non pro $2b\sqrt{\frac{cbb}{a}}$ reponere $\frac{2bb}{a}\sqrt{ac}$. Similiter pro $d+\frac{bb-bd}{b+d}$ ſcribi poteſt $\frac{dd+bb}{b+d}$. Sic etiam loco $d+\frac{bb}{b+d}$ ſcribi poteſt $b+\frac{dd}{b+d}$: cum ſub eodem denominatore reducti faciant $\frac{bb+bd+dd}{b+d}$. Et denique pro $\frac{c}{\sqrt{c}}-\frac{a}{\sqrt{a}}$ ſcribere poſſumus $\frac{c-a}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$ vel $\sqrt{c}-\sqrt{a}$. Et ſic de aliis, ut paſſim in hiſce commentariis eſt videre.

E *Sed ſi ſectione Hyperbolâ exiſtente &c.*] Notandum hic, applicatam eſſe Hyperbolam ei linearum poſitioni, cui poſtea Circulum quadrare ab Authore oſtenditur. Quod tam perſpicuitatis quàm brevitatis ſtudio factum; quandoquidem ea, cùm literæ A, B, C, D, &c. in iiſdem omnium figurarum locis reperiuntur, quæ ibidem ſcripſit, ſic faciliùs intelligi poſſunt, quàm ſi nunc in uno, nunc in alio eſſent quærendæ.

Etenim cùm requiritur, ut productum, quod oritur ex multiplicatione CB per CF, æquale ſit ei, quod fit ex ductu CD in CH, oportet lineam illam curvam tranſire per quatuor interſectionum puncta datarum linearum: nimirum, per interſectionem A, linearum DA, AB (quoniam eo caſu lineæ BC & CD nullæ ſunt, ac proinde ſingulæ, in ſingulas ex reliquis ductæ, nihil producunt), & per interſectionem G linearum AB, GH, (quo caſu lineæ CH & CB nullæ ſunt): nec non per utramque reliquam, utpote ipſarum FE, GH (quo caſu CF & CH nullæ ſunt), & ipſarum DA, EF (quo caſu CD & CF nullæ ſunt), quæ in hac figura non ſunt expreſſæ, ſed in Circulo obſervatæ apparent. Unde, cum Dnus des Cartes, brevitati ſtudens, referre voluerit caſus omnes ad unum exemplum, figuræ nempe pag. 12. mirum videri non debet, quòd, poſtquam hujus exempli locum Circulum eſſe oſtendit, nec in quæſtione quicquam mutavit, eidem linearum poſitioni non Hyperbola ſicut Circulus reſponderit. Nec etiam hinc ullus ſequitur error, quandoquidem tota quæſtio nondum determinata exiſtit, ſed pagin. 33 primò determinatur. Quippe fieri poteſt, ut, paucis in ea mutatis, eidem linearum poſitioni, cui Circulus competit, quadret Hyperbola; & quidem Hyperbola, quæ non tranſeat per ullas datarum linearum interſectio-

ſectiones. Ut, exempli cauſâ, ſi rectangulum ex FC in CD debeat eſſe majus, quàm rectangulum ex CB in CH, datâ quâdam quantitate, vel aliud quid ſimile: ſequitur eam ſic applicari poſſe, ut, manentibus literis I, K, L, B, C, D, &c. ſuis locis, ea pauca, quæ de Hyperbola afferre voluit, faciliùs intelligantur, quàm ſi figura mutata fuiſſet.

Ejuſdem brevitatis ſtudio nulla etiam hìc mentio fit oppoſitarum Hyperbolarum, non quòd ab Authore ignorentur, utpote qui paulò poſt pag. 37. quatuor lineas Hyperbolæ affines, inter ſe oppoſitas, exhibuit: Sed quòd faciliora ferè ſemper in hac Geometria neglexerit. In difficilioribus certè, quæ tractanda ſuſcepit, nihil omiſit. Atque idcirco hìc maluit eam linearum poſitionem exhibere, cui conveniret Circulus, quàm cui competeret Ellipſis, aut Hyperbola, quia ejus inventio peculiarem habet difficultatem.

Quippe hæc loca nihil aliud ſunt, quàm cùm in quæſtione aliqua eſt inveniendum punctum, in quâ una deficit conditio, ut ipſa prorſus ſit determinata.] Nimirum, ubi ad inveniendum illud punctum duas ſupponere oportet lineas incognitas, & materia tantùm pro una æquatione ſuppetit. Ut in hoc exemplo, ubi ad determinandum punctum C, duæ ſupponendæ ſunt incognitæ lineæ AB & BC; quarum una oſtendat, ad quod punctum lineæ AB duci debeat recta BC in dato angulo; & altera, ubinam illud ipſum in eadem recta ſit ſumendum. Ubi porrò, poſtquam conditiones omnes ſunt adimpletæ, inventa eſt æquatio F

$$yy \infty \frac{\begin{array}{l}-dekzz\\+cfglz\end{array} y \begin{array}{l}-dezzx\\-cfgzx\\+bcgzx\end{array} y \begin{array}{l}+bcfglx\\-bcfgxx\end{array}}{ez^3-cgzz},$$

duas continens quantitates incognitas x & y. Adeò ut, cum in ipsâ una deſit conditio ut ſit prorſus determinata, quantitatem aliquam cognitam pro arbitrio aſſumere liceat pro incognita x, cui non reſpondet aliqua æquatio, atque tot inde invenire puncta C, quot ipſi radici x tribuerimus diverſos valores.

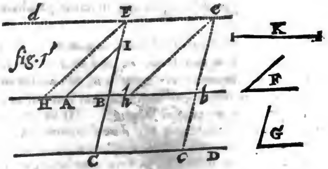
Cæterùm quoniam hæc quæſtio extendi poteſt ad omnes lineas curvas, quæ ſub calculum cadunt, atque in Geometriam recipi poſſunt: ita ut nulla ſit linea curva primi generis, quæ ad illam non ſit utilis, quando in quatuor lineis proponitur: nec ulla

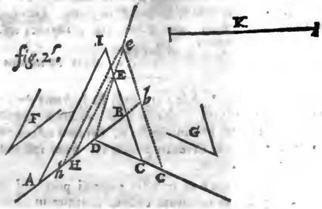
 ſecun-

Digitized by Google

ſecundi, quando in 8 lineis: nec ulla tertii, quando in 12 lineis eſt propoſita, atque ita porrò: placuit hic quoque ſubjungere caſum, quando in duabus tantùm lineis eſt propoſita, qui quidem omnium ſimpliciſſimus exiſtit.

Locus ad duas lineas. Datis poſitione duabus rectis lineis AB, CD, inter ſe parallelis, aut concurrentibus in puncto D; punctum extra ipſas invenire, ut E, à quo ſi in datis angulis F & G ad poſitione datas AB, CD, duæ ducantur rectæ lineæ EH, EC, ipſæ datam inter ſe habeant rationem *r* ad *ſ*.





Supponantur anguli BAI, DCB æquales angulis F, G; & con-

concurrant rectæ A I, C B, (ubicunque hoſce æquales angulos ad poſitione datas conſtituentes) in punctum I. Deinde ratio, quam H E ad E C ſervare debet, detur ut A I ad K, vel ſi non ita detur, ad hanc formam reducatur.

Reſolutio. Puta factum eſſe, quod quæritur, ponaturque B C ∞ q, A I ∞ r, K ∞ *ſ*, B I ∞ t, & B E ∞ x. Unde, cum propter triangulorum B I A, B E H ſimilitudinem, B I ſit ad I A, hoceſt, t ad r, ſicut B E ſeu x ad E H, erit E H ∞ $\frac{rx}{t}$. Deinde quoniam A I eſt ad K, hoceſt, r ad *ſ*, ſicut H E ad E C, ſive $\frac{rx}{t}$ ad $q + x$: erit productum ſub extremis $rq + rx$, æquale producto ſub mediis $\frac{r\text{ſ}x}{t}$. Ac proinde ſi utrinque dividatur per r, atque multiplicetur per t, æquatio erit $\text{ſ}x - tx$ ∞ tq. Hoc eſt, revocatâ æqualitate ad proportionem, erit ut $\text{ſ} - t$ ad t, ita q ad x. Unde talis emergit *Conſtructio.* Fiat, ut exceſſus, quo K excedit B I, ad B I; ita B C ad B E. Tum per E ducatur E d ipſi A B ſeu C D parallela (ut in prima fig.); aut ex D per E agatur recta D E indefinitè (ut in ſecunda fig.): Dico ſi ex quolibet ejus puncto, ut e, ad poſitione datas A B, C D, duæ ducantur rectæ lineæ eb, ec in datis angulis F & G, hoc eſt, ipſis A I, I C parallelæ, dictas lineas datam inter ſe rationem ſervaturas, hoceſt, he fore ad ec, ſicut A I ad K, ſeu r ad *ſ*.

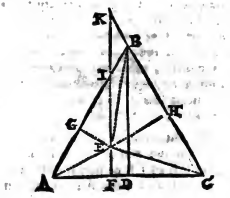
Demonſtratio. Quoniam enim eſt, ut exceſſus, quo K excedit B I, ad B I, ita B C ad B E : erit quoque componendo K ad B I, ſicut C E ad E B. Unde cum ratio C E ad E B compoſita ſit ex ratione C E ad E H, & ex ratione H E ad E B ſeu A I ad I B: erit quoque ratio K ad B I ex eiſdem rationibus compoſita. Eodem modo, quoniam item ratio K ad B I componitur ex ratione K ad A I, & ex ratione A I ad I B: erit ratio compoſita ex ratione C E ad E H, & ex ratione A I ad I B, eadem cum ratione, quæ componitur ex K ad A I, & ex A I ad I B. Quare ſi communis auferatur ratio A I ad I B, erit quoque reliqua ratio C E ad E H eadem reliquæ rationi K ad A I, ſeu *ſ* ad r. Quod erat faciendum. Eadem eſt ratio ubicunque tandem in recta d E punctum e aſſumatur. Unde manifeſtum fit, punctum quæſitum e rectam lineam contingere D E, poſitione datam, ac proinde in loco plano eſſe. Omitto reliquos hujus quæſtionis caſus, cum à quovis ad horum imitationem facilè conſtrui poſſint.

Digitized by Google

G *At verò duabus conditionibus deficientibus ad hujus puncti determinationem, locus, in quo illud reperitur, ſuperficies eſt, quæ ſimiliter aut plana, aut Sphærica, aut magis compoſita eſſe poteſt.*] Quæ verba, ut rectè intelligantur, exemplis ſequentibus illuſtrare conabimur.

Locus ad Superficiem.

Dato triangulo æquilatero A B C, à cujus vertice B ad baſin A C demiſſa ſit perpendicularis B D: oporteat intra ipſum invenire punctum, ut E; à quo ſi ad oppoſita latera deducantur perpendiculares EF, EG, & EH, ipſæ ſimul ſumptæ æquentur perpendiculari BD.



Factum jam ſit, & productâ FE, uſquedum ſecet latus AB in I, BC verò productum in K; ponatur AD ſeu DC $\infty\ a$, DB $\infty\ b$, AF $\infty\ x$, & FE $\infty\ y$. Hinc cum ſimilia ſint triangula ADB, & AFI, erit ſicut AD ad DB, hoc eſt, a ad b, ita AF ſeu x ad FI; quæ ideo erit $\frac{bx}{a}$. E qua ſi auferatur FE $\infty\ y$, relinquetur EI $\infty\ \frac{bx}{a} - y$. Similiter, quoniam ſimilia ſunt triangula CDB & CFK, erit CD ad DB, hoc eſt, a ad b, ut CF ſeu $2a - x$ ad FK; quæ ideo erit $2b - \frac{bx}{a}$. E qua ſi auferatur FE $\infty\ y$, reſtabit EK $\infty\ 2b - \frac{bx}{a} - y$. Eodem modo cum, propter ſimilitudinem triangulorum ADB, EGI, AB ſit ad AD, hoc eſt, $2a$ ad a, ſeu 2 ad 1, ſicut IE ſeu $\frac{bx}{a} - y$ ad EG; erit EG $\infty\ \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}y$. Non ſecus, cum ſimilia ſint triangula EKH & DBC, erit ut BC ad CD, hoc eſt, $2a$ ad a, ſeu 2 ad 1, ita EK ſeu $2b - \frac{bx}{a} - y$ ad EH; quæ ideo

erit

erit $b - \frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}y$. Adeoque ſi addantur perpendiculares inventæ EF, EG, & EH, erit earum ſumma b, æqualis b, perpendiculo trianguli ABC.

Ubi patet, quòd, poſtquam incidimus in æquationem, in qua ab utraque parte reperitur eadem quantitas, quæſtio propoſita non ſit Problema, ſed Theorema; ſeu quòd conditio, ex qua hæc æquatio deducta fuit, in quæſtionis datis ſit comprehenſa, neque unquam ſine hac conditione eſſe poſſit: Atque adeò, duas in ea conditiones deſiderari, ad dicti puncti determinationem; unam, ad æquationem pro x inveniendam, quâ innoteſcat, ad quod punctum lineæ AC duci debet perpendicularis EF; atque alteram, ad æquationem pro y inveniendam, quâ cognoſcatur, ubinam illud ipſum in hac perpendiculari ſit ſumendum: quibus mediantibus quæſtio penitus determinata reddatur. Quare, poſtquam conditiones in quæſtione præſtandæ adimpletæ ſunt, & neutri linearum incognitarum AF, FE æquatio reſpondet, poterunt illæ ad arbitrium accipi, atque idcirco quæſitum punctum E ubique intra triangulum ABC aſſumi. Cujus demonſtratio facilis eſt.

Vide ea, quæ habentur pag. 4.

Ducantur enim rectæ AE, EB, & EC, ut conſtituantur tria triangula AEC, AEB, & BEC.

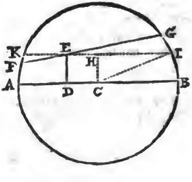
Quoniam igitur horum triangulorum baſes ſunt æquales, ac quælibet ex ipſis æqualis baſi trianguli ABC; habebunt ipſa ad triangulum ABC eandem rationem, quam perpendicula EF, EG, & EH. Quare cùm triangula AEC, AEB, & BEC ſimul ſumpta ipſi triangulo ABC ſint æqualia: erunt quoque perpendiculares EF, EG, & EH ſimul ſumptæ ipſi perpendiculari BD æquales. Quod erat demonſtrandum.

Porrò notandum eſt, quòd, quemadmodum punctum E, intra triangulum ABC aſſumptum, exhibet ſemper eandem ſummam perpendicularium EF, EG, & EH, quæ ab eo ad trianguli latera deducuntur, & æqualem perpendiculari BD; ita contra, ſi ſumatur extra triangulum ABC, atque ab eo ad ſingula ejus latera, ſi opùs eſt, producta perpendiculares demittantur, obtineatur ſemper eadem perpendicularium differentia, quæ rurſus perpendiculari BD ſit æqualis. Oportet autem perpendicularem, quæ ducitur in latus ſubtenſum angulo, intra quem punctum ſumptum erit,

Digitized by Google

erit, auferre ex ſumma duarum reliquarum. Quæ ſimili ratione aliis quoque figuris rectilineis ordinatis competunt, cum eadem in omnibus ſit demonſtratio.

Alterum exemplum, quod hic afferendum duxi, deſumpſi ex inventis Nobiliſſimi & præclari Juvenis D. Chriſtiani Hugenii, quibus ſibi jam pridem apud Doctos tantam paravit laudem atque admirationem, ut non niſi magna quæque ab eo expectanda eſſe affirmare non veriti fuerint.



Dato Circulo AGB, dataque poſitione diametro AB: invenire extra ipſam punctum E, à quo ſi ad AB demittatur perpendicularis ED, & per idem punctum agatur recta quædam linea FG utrinque à circumferentiâ terminata, ut rectangulum FEG, ſub ſegmentis ejus FE, EG comprehenſum, unà cum quadrato perpendicularis demiſſæ ED, æquetur rectangulo ADB, ſub ſegmentis diametri AD, DB.

Ductâ per E rectâ KI parallelâ ipſi AB, deducatur ex centro C in eam perpendicularis CH, jungaturque CI. Poſitâ igitur AC vel CB $\propto a$, CD $\propto x$, & DE $\propto y$: erit HI $\propto \sqrt{aa-yy}$, EI $\propto \sqrt{aa-yy}+x$, & EK $\propto \sqrt{aa-yy}-x$. Unde ſi multiplicavero EK $\propto \sqrt{aa-yy}-x$ per EI $\propto \sqrt{aa-yy}+x$, fiet rectan-

rectangulum KEI ſeu FEG ∞ $aa - yy - xx$. Cui ſi addatur quadratum ex ED ∞ yy, erit ſumma $aa - xx \infty aa - xx$, rectangulo ADB, utpote æqualis ei, quod ſit ex $a - x$ in $a + x$. 35. Tertii Elem.

Quia igitur hic utrinque eædem reperiuntur quantitates, & adimpletis omnibus conditionibus nulla ampliùs inveniri poteſt æquatio, quâ innoteſcat utraque incognita quantitas x & y: liquet eas ad arbitrium ſumi poſſe, atque Problema propoſitum eſſe Theorema. Defectus itaque duarum in hac quæſtione conditionum, ad determinandum punctum E, oſtendit, illud ubique extra diametrum, intra circulum cadere poſſe, & locum ejus eſſe ad ſuperficiem Circuli. Id quod facilè demonſtrari poteſt.

Quoniam enim CH perpendicularis eſt ad KI, ſecabit rectam KI bifariam in H. Unde cum in E quoque inæqualiter ſit ſecta, erit rectangulum KEI, ſub inæqualibus ſegmentis comprehenſum, ſeu, quod idem eſt rectangulum FEG, unà cum quadrato ſegmenti intermedii EH, æquale quadrato dimidiæ lineæ HI. Eodem modo, quoniam recta AB bifariam diviſa eſt in C, & non bifariam in D: erit rectangulum ADB unà cum quadrato interſegmenti DC, æquale quadrato ex CB ſeu CI. Quare cum quadratum CI æquetur quoque quadratis CH, HI, quorum quidem quadratum HI æquale eſt oſtenſum rectangulo FEG, unà cum quadrato EH: ſequitur rectangulum ADB unà cum quadrato DC ſeu EH æquari rectangulo FEG unà cum duobus quadratis CH, EH. Ac proinde, dempto communi quadrato EH, remanebit rectangulum ADB æquale rectangulo FEG, unà cum quadrato CH ſeu ED. Quod erat demonſtrandum. Non ſecus demonſtrabitur, omne aliud punctum, intra Circulum extra diametrum AB aſſumptum, præſtare id quod quæritur: Quocirca, Si in Circulo extra diametrum, ſumatur aliquod punctum, à quo ad diametrum demittatur perpendicularis, & per idem punctum agatur recta linea à circumferentia utrinque terminata: erit rectangulum ſub ſegmentis hujus rectæ comprehenſum, unà cum quadrato perpendicularis demiſſæ, æquale rectangulo ſub ſegmentis diametri. Idem ferè contingit ſi extra Circulum acceptum fuerit punctum.

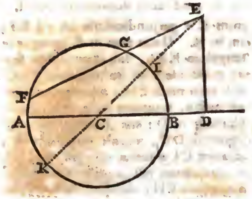
3 Tertii Elem.
5 Secundi Elem.
35 Tertii Elem.

Etenim,

Digitized by Google

Etenim,

Aſſumpto extra Circulum puncto quolibet, ut E, ab eoque ad diametrum AB, ipſámve productam, ſi opùs eſt, deductâ perpendiculari ED, tum verò rectâ EF, Circulum utcunque in F & G ſecante: erit rectangulum ADB, unà cum quadrato rectæ DE, æquale rectangulo FEG. Quod ſimiliter ut ſupra experiri licet, atque demonſtrare.



Porrò ſicut in allatis exemplis loca quæſitorum punctorum fuerunt ad ſuperficies planas, eaſque terminatas, vel in infinitum extenſas; ita quoque inveniuntur loca punctorum, quæ ſunt ad ſuperficies curvas, & quidem vel terminatas, vel in infinitum extenſas.

Si enim, exempli causâ, in figurâ pag. 123 manente rectâ AB, & in ea punctis A & B, circumvolvatur ſemicirculus FDE, donec ad eum locum, à quo moveri cœpit, redeat, deſcribetur ſuperficies Sphærica, in qua ſi quodlibet punctum accipiatur, ut D, ab eoque ad puncta A & B rectæ agantur DA, DB: habebunt ipſæ datam inter ſe rationem, hoc eſt, eandem, quam PH ad MN. Ita ut punctum D ſit ad ſuperficiem curvam terminatam, utpote ad ſuperficiem Sphæricam, converſione ſemicirculi FDE deſcriptam. Eâdem ratione, ſi à duobus datis punctis duæ inflectantur

rectæ

rectæ lineæ in data differentia: punctum ad inflexionem erit ad ſuperficiem Hyperbolicam, poſitione datam. Etenim ſi in plano quocunque, quod per data puncta tranſit, deſcribatur Hyperbola, cujus foci hæc puncta exiſtant, & axis tranſverſus differentia data: & manentibus punctis Hyperbola circa axem circumvertatur; donec ad eum locum, à quo moveri cœpit, redeat; deſcribetur ſuperficies curva, quæ in infinitum extenditur, & Hyperbolica dicitur (quippe Hyperbolâ in infinitum extensâ), in qua ſi ad libitum ſumatur punctum, à quo ad data puncta agantur duæ rectæ lineæ, ſervabunt illæ inter ſe differentiam datam.

Atque ſic progrediendo curvæ ſuperficies oſtendi poſſunt, in infinitum magis magiſque compoſitæ, quæ quæſitorum punctorum determinationi inſerviunt. Verùm cum ſufficiat nobis per exempla aliquot modum explicuiſſe, quo hæc loca per calculum detegantur, & à locis planis, ſolidis, aliiſve magis compoſitis diſcernantur: ulteriori explicationi ſuperſedebimus.

Cæterùm, ne quid, quod ad hanc materiam ſpectare poſſit, deſideretur, ſed Geometria omnibus numeris ſit abſoluta, paucis ſubjiciam, quomodo cognoſci poſſit, quando locus alicujus puncti eſt ad ſolidum: cum id neque ab Antiquis, neque à Recentioribus (quod ſciam) hactenus ſit deprehenſum.

Tribus igitur conditionibus deficientibus, ad puncti alicujus determinationem, locus, in quo illud reperitur, Solidum eſt: & vel planis conſtans ſuperficiebus, vel Sphæricâ, vel aliâ magis compoſitâ, vel denique mixtis ex planis & curvis. Solida autem hæc vel ſunt terminata, vel indefinitè extenſa.

Ut, ſi intra Tetraëdrum, inveniendum ſit punctum, ita ut ſumma perpendicularium, ab eo in quatuor ejus plana, quibus conſtat, demiſſarum, æquetur perpendiculo Tetraëdri: cadet illud quovis loco intra Tetraëdrum, ita ut nullum intra ipſum punctum aſſumi poſſit, quod quæſito non ſatisfaciat. Quod eodem modo indagatur & demonſtratur, atque ſuperiùs in triangulo æquilatero eſt oſtenſum. Nam, cum ad hujus puncti determinationem tres requirantur radices ſeu incognitæ quantitates (quarum una inſervit determinandæ longitudini perpendicularis, *Locus ad Solidum.*

Digitized by Google

quæ à quæſito puncto cadit ſupra unum ex planis, & reliquæ duæ, ad locum hujus perpendicularis in eodem plano determinandum), & adimpletis conditionibus omnibus tandem in æquationem incidamus, ubi utrinque eædem occurrunt quantitates: indicio eſt, incognitas quantitates ad libitum ſumi poſſe, atque Problema propoſitum eſſe Theorema. Nihil igitur refert quodcunque intra Tetraëdrum aſſumatur punctum, cum omnia quæſito ſatisfaciant.

Non diſſimili ratione demonſtrare poſſumus: Si extra Tetraëdrum ſumatur punctum, à quo ad ſingula ejus plana demittantur perpendiculares, earum differentiam æquari perpendiculo Tetraëdri. Adeò ut, ſi quæſtio fuerit de inveniendo puncto, à quo demiſſæ perpendiculares ſimul collectæ, æquentur Tetraëdri perpendiculo, punctum illud futurum ſit in ſolido terminato, utpote ubique intra Tetraëdrum; ſi verò poſtuletur, ut differentia ipſarum eidem perpendiculo ſit æqualis, reperietur punctum illud in ſolido indefinitè extenſo, atque ſumi poterit extra Tetraëdrum, ubicunque libuerit. Idem de aliis figuris ordinatis, planiſque ſuperficiebus contentis, dici & demonſtrari poſſe, perſpicuum eſt.

Alterum exemplum, quod hic adducemus, ex Hugeniano Problemate deduci poteſt, quemadmodum præcedens Tetraëdri ex triangulo æquilatero deduximus, & eſt hujuſmodi: Si Sphæra plano per centrum ſecetur, ſumatur autem extra planum quodlibet punctum intra Sphæram, ab eoque ad planum demittatur perpendicularis, & per ſubjectum punctum in eodem plano utcunque ducatur recta linea, utrinque à Sphæræ ſuperficie terminata: erit rectangulum, ſub ſegmentis hujus rectæ comprehenſum, æquale rectangulo ſub ſegmentis rectæ, utcunque per aſſumptum punctum ad Sphæræ ſuperficiem ductæ, unà cum demiſſæ perpendicularis quadrato. Idem fermè contingit ſi punctum ſumatur extra Sphæram.

His adde ſequens Problema, quod occaſione iſtius Hugeniani ſibi ante tres annos è veſtigio inquirendum propoſuit Vir Celeber-

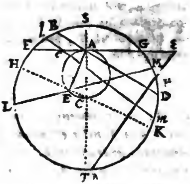
Digitized by Google

berrimus atque undequaque Doctiſſimus D. Johannes Walliſius, S. T. D, & in Academiâ Oxonienſi Geometriæ Profeſſor Savilianus. Eſtque hujuſmodi :

In circulo, cujus centrum C, aſſignato ubivis puncto A, per quod ducta recta peripheriæ occurrat in punctis B, D ; inveniantur alia quotlibet puncta, ita ut, ſi per quodvis eorum ducatur recta peripheriæ occurrens in punctis L, M, quadratum diſtantiæ AE æquetur vel differentiæ vel ſummæ rectangulorum LEM, BAD.

Puta □AE ∞ { ▭LEM — ▭BAD. / ▭BAD — ▭LEM. / ▭BAD + ▭LEM.

Diametro AC deſcribatur *circellus*, quem contingat recta infinita FAG. Dico, ſingula puncta in peripheria circelli præſtare



primum quæſitum : quæ verò in recta FG intra circulum, ſecundum : quæ denique in eadem continuata extra circulum, tertium.

Nam 1mò, ſi ſit E in peripheria circelli, (ductis diametris SACT, HECK,) erit *▭BAD ∞ ▭SAT ∞ □to Radii (—□AC ∞) —□EC—□AE*. Et ▭LEM ∞ ▭HEK ∞ □to Radii —□EC. Ergo ▭LEM — □AE ∞ ▭BAD, vel ▭LEM—▭BAD ∞ □AE.

* *per 35 Tertii Elem.*
* *per 5 Secundi Elem.*

2dò. Si in recta FG intra circulum ſumatur E vel *e* : erit ▭BAD ∞ ▭FAG ∞ □FA ∞ ▭F*e*G + □A*e*. Et ▭*lem* ∞ ▭F*e*G. Ergo ▭BAD—▭*lem* ∞ □A*e*.

3tiò. Si in FG continuatâ ſumatur ε vel ε extra circulum, erit * ▭ $\lambda\varepsilon\mu \infty$ ▭ $F\varepsilon G \infty \square A\varepsilon\,(-\square FA \infty) -$ ▭ BAD* Ergo ▭ BAD + ▭ $\lambda\varepsilon\mu \infty \square A\varepsilon$. Quod erat faciendum. Idem, mutatis paucis, procederet pariter, etiamſi punctum A extra circulum aſſignaretur.

* per 36 Tertii Elem.
* per 6. Secundi Elem.

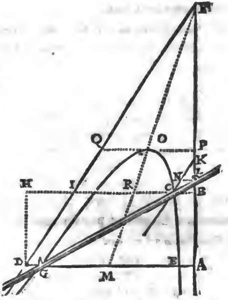
Quoniam igitur aſſumpto puncto A ceu dato, puncta invenienda E cadunt in locum planum, utpote in peripheriam circelli, aut in rectam FG intra circulum, aut denique in eandem extra circulum continuatam: patet, ſi in locum horum circulorum accipiantur duæ ſphæræ, quòd ſimiliter hæc puncta E ubique pro lubitu ſumi poſſint in ſuperficie convexa ſphæræ AEC, aut in ſuperficie plana circuli, cujus diameter FG, aut denique in eodem plano, extra hujus circumferentiam in infinitum extenſo, prout ſcilicet, ut ante, dictorum rectangulorum vel differentia vel ſumma quadrato diſtantiæ horum ſumendorum punctorum E à puncto A requiritur æqualis. Quòd ſi verò idem punctum A non unum locum obtineat, ſed ubivis intra circulum SLT aſſignetur, quòd tunc quidem locus puncti E ubique in ſolido intra vel extra ſuperficiem ſphæræ SLT, pro diverſa quæſiti ratione, ſit futurus. Atque ita de aliis.

H *Jam verò ex hoc ſolo, quòd ſcitur relatio, quam omnia lineæ curvæ puncta habent ad puncta omnia lineæ rectæ, modo illo, quem ſupra explicavi; facile quoque eſt invenire relationem, quam habent ad omnia alia puncta & datas lineas: atque exinde cognoſcere diametros, axes, centra, aliaſq; lineas, & puncta, ad quæ unaquaque curva linea relationem habebit ſpecialiorem vel ſimpliciorem, quàm ad alia: atque ita imaginari diverſos modos illas deſcribendi, ex quibus faciliores eligi poſſunt.*] Ita, cum relatio, quam habent puncta lineæ CE, per motum regulæ GL & plani rectilinei CNKL deſcriptæ, (quam ſuperiùs Hyperbolam eſſe oſtendimus) ad puncta lineæ rectæ AB exprimatur per æquationem $yy \infty cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$; prout nimirum in ea aſſumitur punctum A, tanquam certum ac determinatum, à quo calculus incipiat: facile quoque eſt invenire relationem, quam habent ad puncta ejuſdem AB, quando in ea, loco puncti A, aſſumitur aliud punctum nempe F, à quo calculus ini-

tium

Digitized by Google

tium ſumat. Etenim ſi fiat, ut NL ad LK, hoc eſt, ut c ad b, ita DA ſeu $a+c$ ad AF, erit ipſa $\infty \frac{ab}{c}+b$. E qua ſi dematur BF



$\infty\ x$, relinquetur BA $\infty \frac{ab}{c}+b-x$. Hinc ſi in æquatione inventa $yy \infty cy-\frac{cx}{b}y+ay-ac$ loco x ſubſtituamus $\frac{ab}{c}+b-x$: inveniemus æquationem $yy \infty \frac{cx}{b}y-ac$, quâ oſtenditur relatio, quam habent puncta Hyperbolæ CE ad puncta rectæ BA, reſpectu puncti F. Quæ æquatio, cum præcedenti ſit *ſimplicior*, arguit, Hyperbolæ puncta ad puncta rectæ BA *ſpecialiorem* ſeu ſimpliciorem habere relationem, quando in AB punctum F pro certo & determinato aſſumitur, quàm cum in ea accipitur punctum A.

Cæterùm relationem, quam Hyperbolæ puncta ſervant ad omnia alia puncta & lineas datas, cognoſces ex pag. 177. Ubi ex relatione, quam habent puncta alicujus curvæ ad puncta rectæ poſi-

poſitione datæ, datus eſt modus inveniendi relationem eorundem punctorum ad puncta alterius cujuſvis rectæ poſitione datæ. Adeoque tot inventis æquationibus diverſis, ad quot diverſas rectas curva illa fuerit relata, atque ex iis juxta æquationum regulas extractis radicibus: conſtabunt totidem modi eam deſcribendi, ex quibus faciliores ſeligi poterunt.

Immo verò, poteſt quoque ex hoc ſolo inveniri propemodum omne id, quod determinari poteſt, atque ad ſpatii, quod comprehendunt, magnitudinem ſpectat: ita ut non opùs ſit de his agere apertiùs.] Sic ad comparandam Ellipſin cum Circulo, atque ad inveniendam relationem, quam inter ſe habent, prout circa eundem axem ſunt deſcriptæ: Eſto axis $\infty\, q$, latus rectum pertinens ad axem $\infty\, r$, ſegmentum axis inter verticem & utriuſque ordinatam interceptum $\infty\, x$, ipſa verò adplicata $\infty\, y$. Hinc cum in Circulo latus tranſverſum ſive diameter æquale ſit lateri recto, & æquatio exprimens relationem punctorum Circuli ad puncta diametri vel axis ſit $yy \infty qx - xx$; at verò quæ relationem exprimit punctorum Ellipſis ad puncta axis ſit $yy \infty rx - \frac{rxx}{q}$: quæ inter ſe ſunt ut q ad r, hoc eſt, ut axis ad latus rectum pertinens ad eundem axem; quæ quidem ratio duplicata eſt rationis, quam habet hic axis ad axem ſecundum, ſequitur Circulum ad Ellipſin eſſe, ut axis primus ad axem ſecundum. Id quod demonſtratum eſt ab Archimede propne 5tâ libri de Conoïdibus & Sphæroïdibus, ut & à nobis cap. 2do tractatus de organica Conicarum Sectionum in plano deſcriptione.

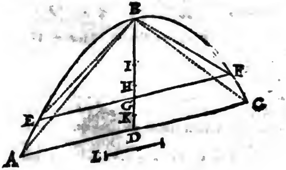
Porrò extendi poteſt hoc ipſum ad cognoſcendam quoque relationem, quam habet Sphæra ad Sphæroïdes, prout eundem habent axem.

Etenim, cum oſtenſum ſit, quadrata ordinatim adplicatarum utriuſque curvæ eſſe inter ſe, ſicut axis ad latus rectum, pertinens ad eundem axem; & quadrata illa ad ſe invicem ſint ut Circuli, qui ab ipſis tanquam radiis converſione ſemicirculi & ſemi-ellipſis fiunt & utramque figuram deſcribunt: patet Sphæram ad Sphæroïdes eſſe, ut axis ad latus rectum, pertinens ad eundem axem: vel, ut quadratum ejuſdem axis ad quadratum axis minoris. Quod & ab Archimede oſtenſum.

Adeò ut non modò ex hoc ſolo inveniri propemodum poſſit omne

omne id, quod determinari poteſt, atque ad magnitudinem ſpacii, quod hæ curvæ comprehendunt, ſpectat, quemadmodum Auctor innuit; ſed etiam, quod ſpectat ad magnitudinem ſolidi, à ſuperficie aliqua curva comprehenſi, atque ab hujuſmodi linea generati. Sic ut ex his omnibus conſtet, Authorem id præcipuè operam dediſſe, ut, neglectis particularibus, & præſuppoſitis iis, quæ ab aliis vel inventa vel demonſtrata eſſent, ea tantùm traderet, quæ difficilia, utilia, & maximè generalia eſſent, omniaque paucis comprehenderet; quæ verò faciliora & levioris momenti, non niſi obiter tantùm perſtringeret. Quod ſanè rarò ab Auctoribus hodie obſervatum cernimus, cum plerique id ſtudeant, ut eorum opera in ampliſſima volumina excreſcant.

Cæterùm cum ex hac ſpacii aut ſolidi magnitudine deinceps facile ſit invenire ejuſdem centrum gravitatis, non abs re fuerit ſi hic ſimiliter modum, quo id inveſtigari poſſit, uno atque altero exemplo exponam.



Igitur ad inveniendum, exempli cauſâ, gravitatis centrum Parabolæ ABC ac ejus portionis AEFC, abſciſſæ videlicet per rectam EF ipſi AC parallelam: ſuppono centrum totius ABC eſſe H, Parabolæ autem EBF centrum eſſe I, & centrum portionis AEFC eſſe K. Deinde factâ BD $\infty\, a$, AD vel DC $\infty\, b$, EG vel GF $\infty\, c$, BH $\infty\, x$, & HK $\infty\, y$, jungo AB, BC, EB, & BF. Quibus poſitis, quæro rationem, quæ eſt inter triangulum ABC & triangulum EBF. Hinc cum ex natura Parabolæ quadratum ex AD ſeu bb ſit ad quadratum ex EG ſeu cc, ſicut DB ſeu a ad GB:

Digitized by Google

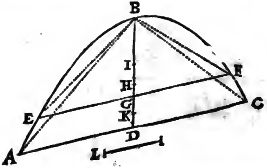
GB: erit GB $\propto \frac{acc}{bb}$. Ac proinde cum AD multiplicata per DB producat ab, at EG multiplicata per GB producat $\frac{ac^3}{bb}$, erit ratio trianguli ABC ad triangulum EBF, quæ ab ad $\frac{ac^3}{bb}$ ſeu b^3 ad c^3. Hæc autem cum eadem ſit rationi, quam inter ſe habent Parabolæ ABC & EBF (ſiquidem Parabola quælibet trianguli ſibi inſcripti maximi eſt ſeſquitertia): ſequitur rationem portionis AEFC ad Parabolam EBF eandem fore quam $b^3 - c^3$ ad c^3. Porrò cum eadem ſit ſitus ratio centri I in Parabola EBF, quæ centri H in Parabola ABC: erit DB ſeu a ad BH ſeu x, ſicut GB ſeu $\frac{acc}{bb}$ ad BI $\frac{ccx}{bb}$. Quâ ſubductâ ex BH ſeu x, relinquitur IH $\propto \frac{bbx - ccx}{bb}$. Denique cum IH ad HK, hoc eſt, $\frac{bbx - ccx}{bb}$, ad y, eandem habere debeat rationem, quam portio AEFC ad Parabolam EBF ſeu $b^3 - c^3$ ad c^3, fiet, abbreviando primum & tertium terminum per $b - c$, ac deinde multiplicando extremos tum medios, $\frac{bc^3x + c^4x}{bb} \propto bby + bcy + ccy$, vel

$\frac{bc^3x + c^4x}{b^4 + b^3c + bbcc} \propto y$. E quibus liquet, invento H, centro gravitatis Parabolæ ABC, ad inveniendum K, centrum gravitatis portionis AEFC, faciendum eſſe, ut BH ſeu x ſit ad HK ſeu y, ſicut $b^4 + b^3c + bbcc$ ad $bc^3 + c^4$; hoc eſt, inventis in ratione AD ad EG quinque continuè proportionalibus, erit BH ad HK, ut ſumma priorum trium ad ſummam duarum poſteriorum. Ubi demum, ad obtinendum ipſum punctum H, opus tantùm eſt concipere rectas AD & EG eſſe æquales, hoc eſt, $b \propto c$, ita ut EGF coincidat cum ADC, quo caſu & punctum I in punctum H cadet, & K in D, lineaque DH ſeu y æqualis fiet $\frac{2}{3}x$, hoc eſt, duabus tertiis ipſius HB. Quod ipſum monſtrat, ſectâ diametro BD in 5 æquales partes, pro linea BH ſeu x tunc earundem ſumendas eſſe tres. Id quod aliter quoque à nobis eſt oſtenſum in Exercitationibus noſtris Mathematicis libr. 5. ſectione 19.

Eodem modo ſi in Conoïde Parabolico ABC & ejuſdem portione AEFC centra gravitatum H & K invenire velimus, oportet, iiſdem quæ ſupra poſitis, quærere rationem, quæ eſt inter Conum ABC & Conum EBF: invenieturque ut b^4 ad c^4. Hæc

enim

Digitized by Google



enim cum eadem quoque ſit rationi, quæ eſt inter duos Conoïdes ABC & EBF (quandoquidem per 23 Prop. de Conoïdibus & Sphæroïdibus Archimedis Conoïs quilibet Parabolicus ſeſquialter eſſe probatur Coni, qui eandem habet baſin eundemque axem cum Conoïde): patet portionem AEFC ad Conoïdem EBF fore, ut $b^4 - c^4$ ad c^4. E quibus porrò, ut ſupra, invenitur $y \propto \frac{c^4 x}{b^4 + bbcc}$, hoc eſt, invento H, centro gravitatis Conoïdis ABC, ad obtinendum K, centrum gravitatis portionis AEFC, faciendum eſſe ut BH ſit ad HK, ſicut $b^4 + bbcc$ ad c^4, ſeu, quod idem eſt, ad DB & GB quærendam eſſe tertiam proportionalem L, atque deinde faciendum ut BH ſit ad HK, ſicut ſumma ipſarum DB, GB ad tertiam L. Ubi tandem, ſi ad ipſum punctum H habendum ſtatuamus, ut ante, $b \propto c$, invenietur $y \propto \frac{1}{2}x$. Quod ipſum docet diametrum BD in 3 æquales partes eſſe dividendam, atque pro BH earundem ſumendas eſſe duas. Atque ita de aliis.

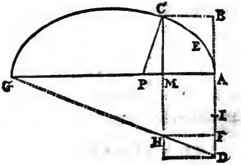
Sit CE linea curva, oporteatq́; per punctum C, &c.] K
Quæ hâc lineâ & ſequentibus uſque ad paginæ ſequentis lineam 25 continentur, in genere referri debent ad illa, quæ deinceps ab Authore afferuntur uſque ad pag. 44, quibus in ſpecie agit de natura quarundam curvarum, quas, poſtquam ad æquationes reduxit, deinde haſce æquationes cum alia comparat, nempe $yy - 2ey + ee \propto 0$ aut $zz - 2fz + ff \propto 0$, aliáve quæ ex hac vel illa ſit compoſita, ut inveniatur tandem quantitas incognita v.

Quemadmodum ſi CE eſt Ellipſis, in qua MA ſit ſegmentum diametri, ad quam CM ſit ordinatim adplicata, quodq; L

 pro

Digitized by Google

pro latere recto habeat r, pro tranſverſo autem q: *fiet per* 13*tium Theorema* 1*mi libri Conicorum Apollonii*: $xx \infty ry - \frac{r}{q}yy$. *unde tollendo* xx, *reſtabit* $\text{ſſ} - vv + 2vy - yy \infty ry - \frac{ryy}{q}$, *vel* $yy \frac{+qry - 2qvy + qvv - q\text{ſſ}}{q-r}$ *æquale nihilo*.] Etenim AD latere exiſtente recto $\infty\ r$, eoque ad AG perpendiculari: erit, propter triangulorum GAD, DHF ſimilitudinem, ut GA ad AD, hoc eſt, q ad r, ita HF ſeu MA, hoc eſt, y, ad FD, quæ ideo eſt $\frac{ry}{q}$. Quam ſi per HF multiplicemus, fiet rectangulum HFD $\infty \frac{ryy}{q}$. Deinde quoniam per 13tiam Prop. 1mi libri Conicorum Apollonii rectangulum MAD, minus rectangulo HFD, æquatur quadrato ex CM; & quidem rectangulum MAD ſit ry: erit rectangulum MF $\infty\ ry - \frac{ryy}{q}$. Atque idcirco æquatio talis: $ry - \frac{ryy}{q} \infty xx$; hoc eſt, $ry - \frac{ryy}{q} \infty ss - vv + 2vy - yy$: quippe quod ſimiliter ipſi xx eſt æquale. Hæc autem æquatio ut ad ſuperiorem reducatur, oportebit utrobique per q multiplicare, ut fractio evaneſcat: fietque $qry - ryy \infty qss - qvv + 2qry - qyy$. Denique factâ tranſpoſitione, ut quantitates in yy ductæ unam teneant æquationis partem, reliquæ autem alteram, dividatur utrinque per $q - r$, habebiturque

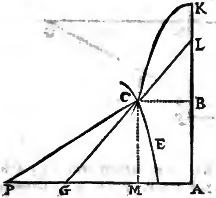


$$yy \infty \frac{qss - qvv + 2qvy - qry}{q-r} \text{ ſive } yy \frac{-qss + qvv - 2qvy + qry}{q-r} \infty 0.$$

Cætera, quæ huc ſpectant, inveniuntur inter lin. 21. pag. 45. & lin. 9. p. 46: quæ, cum ſatis ſint clara, explicatione non egent.

M *Eodem modo, ſi CE ſit curva linea, per motum Parabolæ deſcripta, &c.*] Cum enim, propter ſimilitudinem triangulorum

rum GMC, CBL, GM ſit ad MC, hoc eſt, $b-y$ ad x, ut CB, hoc eſt, y, ad BL; erit BL $\frac{xy}{b-y}$. Cui ſi addatur KL $\infty\ c$, fiet KB $\infty\ \frac{cb-cy+xy}{b-y}$. Jam verò, quia, per 11 Prop^nem^ libri 1^mi^ Conicorum Apollonii, in Parabola CK rectangulum ſub diametri ſegmento KB & latere ejus recto d æquatur quadrato ipſius CB, quæ ad eandem diametrum ordinatim eſt applicata: hinc ſi multiplicetur $\frac{cb-cy+xy}{b-y}$ per d, erit æquatio talis:



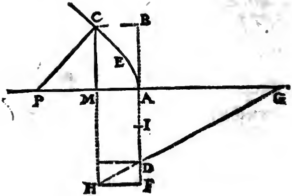
$yy\ \infty\ \frac{dcb-dcy+dxy}{b-y}$. Unde multiplicando utrinque per $b-y$, fiet $dcb-dcy+dxy\ \infty\ byy-y^3$. Factaque tranſpoſitione, ut dxy unam teneat æquationis partem, erit $dxy\ \infty\ dcy-dcb+byy-y^3$. In qua ſi pro x ponatur ſumma ipſi æqualis, habebitur $dy\sqrt{ss-vv+2vy-yy}$, ſeu $\sqrt{ddssyy-ddvvyy+2ddvy^3-ddy^4}\ \infty\ dcy-dcb+byy-y^3$. Ut autem æquatio ab aſymmetria liberetur, quadretur utraque pars, fiatque tranſpoſitio ut quantitates omnes ab una parte habeantur, invenieturque

$$y^6-2by^5\left.\begin{matrix}+bb\\+dd\\-2dc\end{matrix}\right\}y^4\left.\begin{matrix}+4bcd\\-2ddv\end{matrix}\right\}y^3\left.\begin{matrix}+ddcc\\+ddvv\\-2dcbb\\-ddss\end{matrix}\right\}yy-2ddcby+ddccbb\ \infty\ 0.$$

Reliqua huc ſpectantia invenientur à lin. 9. pag. 46. uſque ad lineam ultimam paginæ ſequentis, quæ explicatione non indigent.

Quoniam autem inventio harum linearum non ſolùm elegans ac ſubtilis, verùm etiam per ſe jucunda atque utilis exiſtit: non ingratum futurum confido, quibus hæc exercere volupe eſt, ſi oſtendero quo pacto in Hyperbola & Parabola nec non in Conchoide ſint inveniendæ.

Digitized by Google



Inventio dictarum linearum in Hyperbola.

Sit latus tranſverſum AG $\infty\ q$, rectum verò $\infty\ r$, CM vel AB $\infty\ x$, MA vel BC $\infty\ y$, PA $\infty\ v$, & PC ∞ ſ. Deinde, propter ſimilitudinem triangulorum GAD, DFH, fiat, ut GA ad AD, hoc eſt, q ad r, ita HF ſeu MA, hoc eſt, y, ad FD, quæ ideo erit $\frac{ry}{q}$. Hæc ſi multiplicetur per HF $\infty\ y$, prodibit rectangulum HFD $\infty\ \frac{ryy}{q}$. Cui porrò ſi addatur rectangulum DM $\infty\ ry$, fiet rectangulum MAF $\infty\ \frac{ryy}{q} + ry$. Jam verò, quia, per 12^{mam} Prop^{nem} 1^{mi} libri Conicorum Apollonii, rectangulum MAF æquale eſt quadrato ex MC ſeu xx, erit æquatio $\frac{ryy}{q} + ry\ \infty\ xx$, vel $\frac{ryy}{q} + ry\ \infty\ ſſ - vv + {}^{2}vy - yy$, ſubrogando nempe $ſſ - vv + {}^{2}vy - yy$ in locum xx. Unde multiplicatâ utrâque parte per q, fiet $ryy + qry\ \infty\ qſſ - qvv + {}^{2}qvy - qyy$; tranſpoſitisque qyy & qry in contrarias partes, $qyy + ryy\ \infty\ - qry + {}^{2}qvy - qvv + qſſ$; ac denique utrâque parte diviſâ per $q + r$,

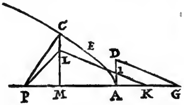
$$yy\ \infty\ \frac{-qry + {}^{2}qvy - qvv + qſſ}{q + r}, \text{ vel}$$

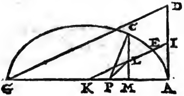
$$yy \frac{+qry - {}^{2}qvy + qvv - qſſ}{q + r}\ \infty\ 0,$$ collocando nimirum quantitates omnes ad unam partem.

Dein-

Deinde, ad inveniendam quantitatem quæſitam v, comparetur æquatio inventa cum æquatione ejuſdem formæ $yy - {}^{2}ey + ee \propto 0$, ubi y æquatur e. Quare cum utriuſque primus terminus planè ſit idem, comparetur ſecundus cum ſecundo, nempe, $\frac{+qry - {}^{2}qvy}{q+r}$ cum $- {}^{2}ey$, vel, quod idem eſt, $\frac{+qr - {}^{2}qv}{q+r}$ cum $- {}^{2}e$: ac idcirco multiplicetur utrinque per $q+r$, & fiet $+qr - {}^{2}qv \propto - {}^{2}qe - {}^{2}re$. Poſtea tranſlato ${}^{2}re$ ad alteram partem, dividatur utrinque per ${}^{2}q$, fietque $\frac{1}{2}r + e + \frac{re}{q} \propto v$, vel $v \propto y + \frac{ry}{q} + \frac{1}{2}r$, quandoquidem e ipſi y ſuppoſita eſt æqualis.

E quibus patet, ad inveniendam rectam PC, latus rectum AD ſecandum eſſe bifariam in I, & rectam PM ipſi IF ſumendam eſſe æqualem. Quod in Ellipſi quoque eſt obſervandum.





His adde ſequentem conſtructionem, quam Vir inſignis ac Geometra præſtantiſſimus D. Auzotius utrique huic ſectioni pariter convenientem invenit, ejuſque me quinquennio abhinc per literas participem fieri voluit, & talis eſt.

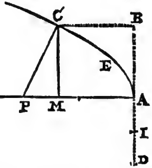
Exiſtente AD, ut ante, latere recto, & AG latere tranſverſo, ad inveniendam PC, ductis CM, AD ordinatim ad AG, junctâque GD, agatur per centrum ſectionis K eidem parallela KI, ſecans CM in L. Dein aſſumptâ PM æquali ML, jungatur PC, eritque ſecans quæſita.

Quod ita patet.

Eſt enim propter ſimilitudinem triangulorum GAD, KML, ut GA ad AD, hoc eſt, q ad r, ita KM, hoc eſt, $\frac{1}{2}q \; 8 \; y$ ad ML $\frac{1}{2}r \; 8 \; \frac{ry}{q}$. Unde cum AP inventa ſit $\propto y \; 8 \; \frac{ry}{q} + \frac{1}{2}r$, adeoque PM $\propto \frac{1}{2}r \; 8 \; \frac{ry}{q}$, liquet PM & ML eſſe æquales. Quemadmodum fuerunt aſſumptæ.

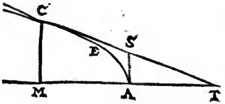
Ubi porrò animadvertere licet, ſi ex puncto P ceu dato recta PC ſit ducenda, quæ utramque ſectionem vel earum contingentes ad rectos angulos ſecet, ſive ut circulus, qui ex P ejus intervallo deſcribitur, utramque curvam tangat, opus tantùm eſſe ducere PL, ita ut angulus APL ſit ſemiſſis anguli AMC: ſi enim per L, ubi hæc recta ipſi KIL occurrit, ducatur MLC ordinatim ad AG, hoc eſt, ipſi AD parallela, erit juncta PC ſecans quæſita, ſive circulus ex P intervallo PC deſcriptus utramque curvam in C continget; ut requirebatur.

In Parabola. Sit latus rectum AD ∞ r, CM vel AB ∞ x, MA vel BC ∞ y, PA ∞ v, & PC ∞ s. Quoniam igitur per 11mam Propnem 1mi libri Conicorum Apollonii rectangulum ſub ſegmento diametri MA & latere recto AD æquatur quadrato ordinatim applicatæ CM: erit $ry \infty xx$, vel $ry \infty ss - vv + 2vy - yy$, ſubſtituendo nempe $ss - vv + 2vy - yy$ in locum xx. Deinde quantitatibus omnibus ab una parte in alteram translatis, ut yy ſit adfecta ſigno +, habebitur æquatio



$$yy \begin{array}{l}+r\\-2v\end{array} y \begin{array}{l}+vv\\-ss\end{array} \infty 0.$$

Quam ſi porro compares cum æquatione $yy - 2ey + ee \infty 0$, ubi y & e ſunt æquales, conferendo nempe ſingulos terminos unius cum ſingulis alterius: nimirum, ſecundum $+r - 2v$ cum ſecundo $-2e$, invenietur $v \infty e + \frac{1}{2}r$, vel $v \infty y + \frac{1}{2}r$. E quibus manifeſtum fit, ad ducendam rectam PC, opus tantùm eſſe, dividere latus rectum AD bifariam in puncto I, atque deinde aſſumere PM ipſi AI ſeu ID æqualem.



Quòd ſi verò ipſa tangens CT ſit inveſtiganda, poterimus, ut ante, ſupponendo latus rectum ∞ r, CM ∞ x, & MA ∞ y, quærere AT ∞ v, & AS ∞ $ſ$, hoc pacto: Fiat

Fiat propter ſimilitudinem triangulorum AST & MCT, ut AT ad AS, hoc eſt, v ad s, ſic MT, hoc eſt, $y+v$, ad MC. Quæ ideo erit $\frac{sy+sv}{v}$. Unde cum & MC ſit $\infty\, x$, erit $\frac{sy+sv}{v} \infty\, x$. Hoc eſt, ductâ utrâque parte in ſe quadratè, habebitur $\frac{ssyy+2ssvy+ssvv}{vv} \infty\, xx$. Quoniam autem, multiplicatâ MA per latus rectum, rectangulum ry, quod inde fit, ſimiliter ipſi xx, hoc eſt, quadrato ex MC eſt æquale: erit pariter $\frac{ssyy+2ssvy+ssvv}{vv} \infty\, ry$. Unde ordinatâ æquatione, terminiſque omnibus ad unam partem tranſpoſitis, fit $yy \begin{smallmatrix}+2v\\ -\frac{vvr}{ss}\end{smallmatrix}\, y + vv \infty\, 0$. Quam ſi porrò compares cum æquatione $yy - 2ey + ee \infty\, 0$, conferendo ſingulos terminos unius cum ſingulis alterius, tertium videlicet cum tertio, obtinebitur $vv \infty\, ee$, hoc eſt, $v \infty\, e$. Ac proinde ſi in locum e ſubſtituatur y: fiet $v \infty\, y$. Id quod oſtendit, ad ducendam rectam CT ad datum punctum C, opùs tantummodo eſſe aſſumere AT æqualem AM, atque connectere puncta C & T.

Quòd ſi autem quæratur AS, poterimus ſecundum terminum cum ſecundo comparare, ſubrogando y in locum v, ut & y in locum e: invenieturque $s \infty\, \frac{1}{2}\sqrt{ry}$.

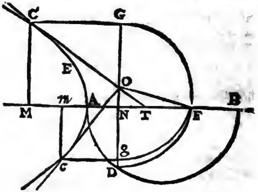
Eodem modo procedendo in binis reliquis ſectionibus, invenietur in Ellipſi $v \infty\, \frac{qy}{q-2y}$ & $s \infty\, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{qry}{q-y}}$; at in Hyperbola $v \infty\, \frac{qy}{q+2y}$, & $s \infty\, \frac{1}{2}\sqrt{\frac{qry}{q+y}}$.

Porrò ut appareat, quo pacto è puncto T, in axe vel diametro dato, recta TC ſit ducenda: oportet duntaxat, aſſumptâ quantitate v ceu datâ, quærere y, reliquis manentibus invariatis. Ac proinde, cum in Parabola v & y æquentur, opùs tantùm erit accipere MA æqualem AT, &, ductâ MC ordinatim adplicatâ ad MA, jungere deinde puncta C & T, ut habeatur tangens quæſita.

Quoniam verò in Ellipſi v æquatur $\frac{qy}{q-2y}$, multiplicando utrinque per $q-2y$, fiet $qv - 2vy \infty\, qy$, ſeu $qy + 2vy \infty\, qv$. Adeoque ſi dividatur utrobique per $q+2v$, invenietur MA $\infty\, y \infty\, \frac{qv}{q+2v}$.

Pati

Pari ratione ſi quæratur MA in Hyperbola, erit ipſa $\infty \frac{qv}{q-2v}$. Ubi liquet, ad ducendam ex puncto T rectam TC, quæ tangat Hyperbolam AEC, quantitatem v ſive lineam AT minorem ſemper debere dari quàm $\frac{1}{2}q$, hoc eſt, minorem ſemiſſe lateris tranſverſi, cum aliàs propter Aſymptotos Problema hoc impoſſibile ſit futurum. Quæ determinatio, cum in Parabola & Ellipſi nullum locum habeat, oſtendit, quòd in duabus hiſce ſectionibus ejuſmodi Aſymptotæ non ſint ſuſpiciendæ; ſed in iis ex omni puncto, ubi libet in producta MA aſſumpto, rectas duci poſſe, quæ eaſdem ſectiones contingant.



Ad hæc, ſi ex puncto O, extra axem vel diametrum dato, rectam lineam ducere velimus, ut OC, quæ Parabolam CE contingat: ponatur, ut ſupra, latus rectum ∞r, MA ∞y, MC ∞x, AN ∞a, & NO ∞b, eritque ex jam inventis MT $\infty 2y$, & NT $\infty y-a$.

Deinde cum propter ſimilitudinem triangulorum MCT & NOT, MC ad MT, hoc eſt, x ad $2y$, ſicut NO ad NT, hoc eſt, b ad $y-a$: erit $xy-ax$, productum ſub extremis, æquale $2by$, producto ſub mediis. Quoniam verò ex natura Parabolæ, ry, ut ſupra, æquatur xx, hoc eſt, dividendo utrinque per r, y eſt æqualis $\frac{xx}{r}$: hinc ſi in æquatione inventa $xy-ax \infty 2by$ in locum y ſubſtituamus $\frac{xx}{r}$ habebimus

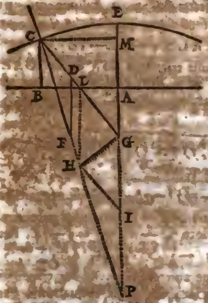
mus

mus $\frac{x^3}{r} - axx$ ∞ $\frac{2bxx}{r}$. Hoc eſt, dividendo ubique per x, & multiplicando per r, invenietur $xx - ar$ ∞ $2bx$, ſeu xx ∞ $2bx + ar$. Quæ eſt æquatio primi caſus quadratarum pag. 6 & 7, admittens unam veram radicem, quæ eſt $b + \sqrt{bb + ar}$, & unam falſam, ſeu minorem quàm nihil, quæ eſt $b - \sqrt{bb + ar}$. Sicut ibidem annotavimus. Cujus utriuſque uſus porrò hic eleganter elucet.

Nam ſi ad ducendam OC, aſſumptâ NB æquali r, hoc eſt, ∞ lateri recto Parabolæ, ſuper totâ AB deſcribatur ſemicirculus, ſecans ON productam in D: erit ND ∞ $\sqrt{ar}$. Quâ poſitâ ab N ad F, ſi jungatur OF, erit ipſa ∞ $\sqrt{bb + ar}$. Ac proinde ſi centro O intervallo OF circulus deſcribatur, ſecans NO hinc inde productam in punctis G, g, deſignabit NG verum valorem inventum $b + \sqrt{bb + ar}$, & Ng valorem falſum $b - \sqrt{bb + ar}$. Unde ducendo ex punctis G, g rectas GC, gc, ipſi AM parallelas, donec Parabolæ occurrant: obtinebuntur duo ſimul puncta C, c in quibus rectæ ex O ducendæ eandem contingent.

Simili modo in reliquis ſectionibus eſt procedendum.

Eſto CE prima Conchoïdes Veterum, cujus Polus G, norma N In Conchoïdem.
verò vel regula, cujus ope ducta eſt, ſit AB; ita ut rectæ omnes, quæ tendunt verſus G, atque intra curvam CE & rectam AB continentur, (ut AE, LC) ſint æquales. Oporteat autem rectam lineam ducere (ut CP), quæ Conchoïdem hanc ad angulos rectos ſecet in dato puncto C.] Notandum hic, quòd, ſi per præcedentem methodum quæratur pun-



 ctum

ctum in recta AB, per quod quæſita linea CP tranſire debet, calculus occurrat nullo antecedentium brevior, licèt conſtructio ſit valde brevis. *Oportet enim tantùm in recta CG ſumere CD, æqualem CB, quæ perpendicularis eſt ad AB, & deinde ex puncto D rectam ducere DF, parallelam ipſi AG, atque æqualem GL: habebiturq́ hâc ratione punctum F, per quod quæſita linea CP erit ducenda.*] Quoniam autem in hoc exemplo calculus multò eſt brevior, ſi in recta AG quæratur punctum P, per quod linea quæſita CP tranſire debet, quàm ſi quæratur in recta AB, atque etiam conſtructio allata ex illo faciliùs poteſt oſtendi: viſum fuit breviorem hìc ſubjungere, atque conſtructionem ex eo patefacere.

Eſto ergo GA $\propto b$, AE vel LC $\propto c$, CM vel AB $\propto x$, MA vel BC $\propto y$, AP $\propto v$, & PC $\propto s$; eritque tota PM $\propto v + y$. Cujus quadratum $vv + 2vy + yy$ ſi ſubtrahatur à quadrato rectæ PC $\propto ss$, relinquetur quadratum rectæ CM $\propto ss - vv - 2vy - yy$. Unde cum CM ſit $\propto x$, & quadratum ejus $\propto xx$, erit $xx \propto ss - vv - 2vy - yy$.

Eodem modo, ſi in triangulo rectangulo BCL à quadrato ex LC $\propto cc$ auferatur quadratum rectæ BC $\propto yy$, relinquetur quadratum rectæ BL $\propto cc - yy$: adeoque ipſa BL $\propto \sqrt{cc - yy}$: quâ ab AB $\propto x$ ſublatâ, reſtabit AL $\propto x - \sqrt{cc - yy}$.

Jam verò, cum, propter ſimilia triangula GMC & GAL, GM ſit ad MC, hoc eſt, $b + y$ ad x, ſicut GA ad AL, hoc eſt, b ad $x - \sqrt{cc - yy}$: erit rectangulum ſub extremis æquale rectangulo ſub mediis, nimirum $bx + xy - \sqrt{bbcc + 2bccy \genfrac{}{}{0pt}{}{-bb}{+cc} yy - 2by^3 - y^4} \propto bx$, & deletis utrobique bx, ordinataque æquatione: $xy \propto \sqrt{bbcc + 2bccy \genfrac{}{}{0pt}{}{-bb}{+cc} yy - 2by^3 - y^4}$. Deinde ut evaneſcat ſignum radicale, ducatur utraque pars in ſe quadratè, atque ad tollendum xx ſubſtituatur ejus loco $ss - vv - 2vy - yy$, fietque æquatio $ssyy - vvyy - 2vy^3 - y^4 \propto bbcc + 2bccy \genfrac{}{}{0pt}{}{-bb}{+cc} yy - 2by^3 - y^4$. Ubi ſi utrinque auferatur y^4, & fiat tranſpoſitio ut quantitates in y^3 ductæ unam obtineant æquationis partem, [illegible] tem,

tem, reliquæ verò alteram, ac demum utraque pars dividatur per $2v-2b$, orietur æquatio talis:

$$y^3 \infty \frac{\begin{array}{l}+bb\\-cc\\+ff\\-vv\end{array} yy - 2bccy - bbcc}{2v-2b}.$$

Hoc eſt, tranſlatis quantitatibus omnibus ad unam partem, erit:

$$y^3 \frac{\begin{array}{l}-bb\\+cc\\-ff\\+vv\end{array} yy + 2bccy + bbcc}{2v-2b} \infty 0.$$

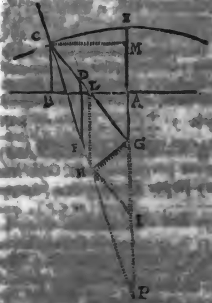
Quæ æquatio relationem oſtendit, quam puncta Conchoidis CE habent ad puncta lineæ rectæ BA. Quare, poſtquam in ipſa quantitas y eſt data, quandoquidem punctum C datum eſt, ſupereſt ut inveniamus quantitates v & f, determinantes punctum quæſitum P. Hunc in finem aliam æquationem inſtituo, quæ æquè multas habeat dimenſiones, & in qua y duas valeat quantitates, quæ ſibi invicem ſint æquales. Ideoque ſupponendo $y \infty e$, ſive $y-e \infty 0$: duco $y-e$ in ſe, & fit $yy-2ey+ee \infty 0$. æquatio duas habens radices æquales. Hanc porrò multiplico per $y+f$, ut aſcendat ad aliam trium dimenſionum, ejuſdemque formæ cum præcedente, & provenit æquatio $y^3 \begin{array}{l}+f\\-2e\end{array} yy \begin{array}{l}-2ef\\+ee\end{array} y + eef \infty 0$. Cujus terminos ſeparatim confero cum terminis præcedentis

$$y^3 \frac{\begin{array}{l}-bb\\+cc\\-ff\\+vv\end{array} yy + 2bccy + bbcc}{2v-2b} \infty 0.$$

Unde cum primus terminus in utraque æquatione ſit idem, comparo ſecundum cum ſecundo, ac reliquos cum reliquis. Adeò ut, ſi ſtatuamus $\frac{bbcv}{2v-2b} \infty eef$, & utrinque dividamus per ee, orLatur $f \infty \frac{bbcv}{2vee-2bee}$. Pari ratione, ſi $\frac{+2bccy}{2v-2b} \infty \begin{array}{l}-2ef\\+ee\end{array} y$, ſeu $\frac{bcc}{v-b} \infty -2ef+ee$, in locum f ſubrogetur valor ejus inventus

$\frac{bbee}{{}^{3}yee - {}^{3}bee}$: habebitur $\frac{bee}{v-b} \propto \frac{-bbee}{ve-be} + ee$, hoc eſt, ſub eodem denominatore $\frac{-bee e}{ve-be} \propto \frac{+bbee+be^3-e^3v}{ve-be}$. Et omiſſo denominatore, adhibitaque decenti tranſpoſitione, ut quantitas $e^3 v$ unam conſtituat æquationis partem, reliquæ verò alteram; dividatur utrinque per e^3, invenieturque $v \propto b + \frac{bee}{ee} + \frac{bbee}{e^3}$. Sive, ſubſtituendo y in locum quantitatis ſuppoſitæ e, $v \propto b + \frac{bee}{yy} + \frac{bbee}{y^3}$.

Eodem modo ſi reliquus terminus cum reliquo comparetur, invenietur quantitas incognita s. Quia verò quantitas inventa v ſatis determinat punctum P, quod modò in recta AG quærebatur; & tantùm ab invento puncto P rectam lineam PC ducere oportet, ut quæſtioni ſatisfiat: ulteriori operationi incumbere ſupervacaneum fuerit.



Ut verò ad demonſtrationem ſupra dictæ conſtructionis accedamus, producatur inventa linea CF donec ſecet AG productam in P, atque per L agatur recta LH parallela AG, occurrens ipſi PC in H: unde ductâ HI ipſi CG parallelâ, quæ ſecet AP in I; Dico AP ſeu v æqualem eſſe inventæ quantitati $b + \frac{bee}{yy} + \frac{bbee}{y^3}$.

Cum enim, propter ſimilitudinem triangulorum BCL, AGL, BC ſit ad CL, hoc eſt, y ad e, ſicut AG, hoc eſt, b, ad GL: erit GL $\propto \frac{be}{y}$. Deinde, quia, propter ſimilia triangula CDF & CLH, CD $\propto y$ eſt ad DF ſeu GL $\propto \frac{be}{y}$, ſicut CL $\propto e$ ad LH: erit

erit LH $\infty \frac{bcc}{yy}$. Denique, cum, ob ſimilia triangula CDF, HIP, CD ſit ad DF ſeu GL, hoc eſt, y ad $\frac{bc}{y}$, ſicut HI ſeu GL, hoc eſt, $\frac{bc}{y}$, ad IP: erit IP $\infty \frac{bbcc}{y^3}$. Quare ſi ducatur recta GC, in eaque aſſumatur CD æqualis CB, ac deinde ex puncto D recta agatur DF æqualis GL, & parallela AG: manifeſtum eſt, rectam, quæ puncta F, C connectit, eſſe lineam quæſitam, quippe quæ Conchoïdem ſecat ad angulos rectos. Quandoquidem, ſi producatur ad P, GI ſit $\infty \frac{bcc}{yy}$, IP $\infty \frac{bbcc}{y^3}$, atque adeò tota AP ∞ $b + \frac{bcc}{yy} + \frac{bbcc}{y^3}$. Quod erat faciendum.

Porrò, ut conſtructio adhuc brevior evadat, operæ pretium eſt conſiderare, rectam ab H ad G ductam ipſi GC eſſe perpendicularem. Id quod, ab acutiſſimo noſtro Hugenio primùm obſervatum, deinde ſic verum deprehendi:

Quoniam enim LH ipſi AG eſt parallela, erit angulus HLG æqualis angulo LGA. Deinde, quoniam GA ∞ b multiplicata per LH $\infty \frac{bcc}{yy}$ facit $\frac{bbcc}{yy}$, quadratum ipſius GL, quæ eſt $\frac{bc}{y}$: erit AG ad GL, ſicut GL ad LH. Unde cum in triangulis AGL, LGH latera circa æquales angulos ad G & L ſint proportionalia, erunt itidem anguli GAL & LGH æquales. Eſt autem GAL rectus. Quare & LGH rectus erit.

Hinc talis emergit conſtructio:

Ductâ CG, ſecante AB in L, agatur ex L ipſi AG parallela LH, donec occurrat perpendiculari GH in H: eritque recta HC, quæ ex H per C ducitur, ſecans quæſita.

Non diſſimili ratione invenire licet conſtructionem exempli pag. 47.

Verùm enimverò quoniam lineæ CP alio quoque modo inveſtigari queunt, beneficio Methodi de Maximis & Minimis, cujus Author eſt Vir Clariſſimus D. de Fermat, in Parlamento Toloſano Conſiliarius, quam Herigonius in ſupplemento Curſus ſui Mathematici exemplis aliquot illuſtravit, atque ibidem etiam ad inveniendas tangentes adhibere docuit: haud abs re fore duxi, ſi

 hoc

hoc loco viam, quâ lineæ CP ope ejuſdem Methodi ſint inveniendæ, ſequenti calculo expoſuero.

Eſto, ut ſupra, GA $\infty\ b$, AE vel LC $\infty\ c$, AM $\infty\ y$, & PA $\infty\ v$: eritque GM $\infty\ b+y$, & PM $\infty\ v+y$. Deinde quæro quadratum ex PC, ſupponendo illud eſſe minimum quadratorum omnium, quæ fiunt à lineis ex P ad Conchoïdem ductis. Hoc pacto:

AM	LC	GM	GC
y	c	$b+y$, ad	$\frac{bc+cy}{y}$

$$\frac{bc+cy}{y}$$

ſubtr. $\begin{cases} \square \text{GC}.\ \dfrac{bbcc+2bccy+ccyy}{yy} \\ \square \text{GM}.\ bb+2by+yy \end{cases}$

$$\square \text{MC}.\ \frac{bbcc+2bccy+ccyy}{yy}-bb-2by-yy$$

$$\text{add. } \square \text{PM}.\ vv+2vy+yy$$

$$\text{fit } \square \text{PC}.\ \frac{bbcc+2bccy+ccyy}{yy}-bb-2by+vv+2vy.$$

Hoc autem ut ſit minimum, poſitâ jam AM $\infty\ y+e$, quæratur rurſus, ut ante, quadratum ex PC, quò obtineatur æquatio inter id ipſum bis inventum, quâ innoteſcat quæſita quantitas v, ſupponendo e eſſe ∞ o.

AM	LC	GM	GC
$y+e$	c	$b+y+e$, ad	$\frac{bc+cy+ce}{y+e}$

$$\frac{bc+cy+ce}{y+e}$$

ſubtr. $\begin{cases} \square \text{GC}.\ \dfrac{bbcc+2bccy+ccyy+2bcce+2ccey+ccee}{yy+2ey+ee} \\ \square \text{GM}.\ bb+2by+yy+2be+2ey+ee \end{cases}$

$$\square \text{CM}.\ \frac{bbcc+2bccy+ccyy+2bcce+2ccey+ccee}{yy+2ey+ee}-bb-2by-yy-2be-2ey-ee.$$

$$\text{add. } \square \text{PM}.\ vv+2vy+yy+2ve+2ey+ee$$

$$\square \text{PC}.\ \frac{bbcc+2bccy+ccyy+2bcce+2ccey+ccee}{yy+2ey+ee}-bb-2by-2be+vv+2vy+2ve.$$

Hinc

Hinc dempto utrobique $-bb-2by+vv+2vy$, remanebit $\frac{bbcc+2bccy+ccyy}{yy} \infty \frac{bbcc+2bccy+ccyy+2bcce+2ccey+ccee}{yy+2ey+ee} - 2be + 2ve$, ſeu $\frac{bbcc+2bccy+ccyy+2bcce+2ccey+ccee-2beyy-4beey-2be^3+2evyy+4eevy+2e^3v}{yy+2ey+ee}$.

Hoc eſt, multiplicato per crucem, erit $bbccyy+2bccy^3+ccy^4+2bbccey+4bcceyy+2ccey^3+bbccee+2bcceey+cceeyy \infty bbccyy+2bccy^3+ccy^4+2bcceyy+2ccey^3+cceeyy-2bey^4-4beey^3-2be^3yy+2evy^4+4eevy^3+2e^3vyy$. Ac proinde ſublatis utrinque æqualibus, reſtabit $2bbccey+2bcceyy+bbccee+2bcceey \infty -2bey^4-4beey^3-2be^3yy+2evy^4+4eevy^3+2e^3vyy$. Diviſo jam ubique per e, reſerventur quantitates in v ductæ ad unam partem, fietque, tranſlatis reliquis, $2vy^4+4evy^3+2eevyy \infty 2bbccy+2bccyy+bbcce+2bccey+2by^4+4bey^3+2beeyy$. Unde neglectis iis, quæ in e aut ee ductæ ſunt, obtinebitur $2vy^4 \infty 2bbccy+2bccyy+2by^4$. Et fit, dividendo utrinque per $2y^4$, $v \infty \frac{bbcc}{y^3}+\frac{bcc}{yy}+b$. ut ante. Ubi ſciendum, calculum multò abbreviari poſſe, ſi in ſecunda hac operatione multiplicationes, quibus ad ee aut e^3 aſcenditur, continuè omittantur.

Atque hæc quidem via eſt, quam & Hugenium ſecutum fuiſſe confido, prout tangentes curvarum linearum ſe aliter quàm Fermatius ope hujus ipſius Methodi quæſiviſſe mihi aſſeveravit. Quam viam ut omnium maximè contrahamus, poterimus, invento, ut priùs, quadrato ex PC, cum ſubtiliſſimo ac ſæpiùs laudato noſtro Huddenio ſecundam hanc operationem omnino inſuper habere, atque rejectis quantitatibus cc, bb, vv, & ss reliquas per ipſius y dimenſiones multiplicare, invertendo porrò ſigna + & — quantitatum, per y & yy diviſarum. Perinde, ut hic videre eſt.

$$\square PC \infty \frac{bbcc}{yy} + \frac{2bcc}{y} + cc - bb - 2by + vv + 2vy \infty ss$$

Mult. per 2 1 1 1

$$-\frac{2bbcc}{yy} - \frac{2bcc}{y} - 2by + 2vy \infty 0$$

$$2vy \infty \frac{2bbcc}{yy} + \frac{2bcc}{y} + 2by$$

Et fit $v \infty \frac{bbcc}{y^3} + \frac{bcc}{yy} + b$. ut ante. Atque ita de aliis.

Cæte-

Cæterùm quod ad alias Methodos attinet, quibus tum Maximi & Minimi determinatio, tum tangentium ſive ſecantium harum inventio, tum etiam infinitorum aliorum difficiliorum Problematum ſolutio obtineri queunt, poteris eas ab eodem Huddenio expectare; qui adeò multa ac præclara circa hæc invenit, ut neminem putem repertum iri, qui cum eo in his ſit æquiparandus; quippe is non tantùm Maximi aut Minimi determinationem, cùm quæſtio non niſi unum tale agnoſcit, exhibere valet; ſed etiam, quando complura nec non vario modo infinita Maxima aut Minima admittit, viâ omnium ſimpliciſſimâ elicere novit.

Ad hæc ſi ſuperiori modo ipſam tangentem Conchoidis CT inveſtigare lubeat, ponatur, ut ante, GA $\propto b$, AE vel LC $\propto c$, CM vel AB $\propto x$, MA vel BC $\propto y$, ET $\propto v$, & ES $\propto ſ$: eritque ME $\propto c - y$, & MT $\propto c - y + v$. Tum fiat, propter ſimilitudinem triangulorum STE & CTM, ut TE ad ES, hoc eſt, v ad $ſ$, ita TM, hoc eſt, $c - y + v$, ad MC. $\frac{cſ - ſy + ſv}{v} \propto x$. Hinc cum & ſupra inventum ſit $xy \propto \sqrt{bbcc + 2bccy - bbyy + ccyy - 2by^3 - y^4}$, id eſt, dividendo utrinque per y,

$x \propto \frac{\sqrt{bbcc + 2bccy - bbyy + ccyy - 2by^3 - y^4}}{y}$: erit $\frac{cſ - ſy + ſv}{v}$

$\propto \frac{\sqrt{bbcc + 2bccy - bbyy + ccyy - 2by^3 - y^4}}{y}$. Unde quadratis ſingulis partibus ordinatâque æquatione invenitur

$$y^4 \propto \frac{\begin{array}{llll} +2cſſy^3 & +ccvvyy & +2bccvvy & +bbccvv \\ +2vſſ & -bbvv & & \\ -2bvv & -ccſſ & & \\ & -2cvſſ & & \\ & -vvſſ & & \end{array}}{ſſ + vv}$$

Hoc eſt, tranſlatis quantitatibus omnibus ad unam partem, habebitur

$$\frac{\begin{array}{lllll} y^4 - 2cſſy^3 & -ccvvyy & -2bccvvy & -bbccvv & \propto 0. \\ -2vſſ & +bbvv & & & \\ +2bvv & +ccſſ & & & \\ & +2cvſſ & & & \\ & +vvſſ & & & \end{array}}{ſſ + vv}$$

Deinde, ad inveniendas quantitates v & $ſ$, poſitâ $y \propto e$, ſeu $y - e$ $\propto 0$,

$\propto o$, multiplico $y - e \propto o$ per $y - e \propto o$, & fit $yy - {}^2ey + ee \propto o$. æquatio duas habens radices æquales. Quam porrò, ut ad æquè-multas cum præcedente dimenſiones aſcendat ac ejuſdem cum illa ſit formæ, multiplico per $yy - ſy - gg$, & provenit

$$\begin{array}{lllll} y^4 & - {}^2ey^3 & + eeyy & - eeſy & - eegg \propto o. \\ & - ſ & + {}^2eſ & + {}^2egg & \\ & & - gg & & \end{array}$$

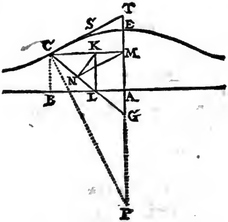
Cujus itaque terminos ſeparatim comparo cum terminis præcedentis. Ultimus terminus, qui hîc eſt quintus, dat $gg \propto \frac{bbccvv}{eeſſ + eevv}$, quartus dat $ſ \propto \frac{{}^2bbccvv + {}^2bcccvv}{e^3ſſ + e^3vv}$, tertius dat $ſſ \propto \frac{{}^3bbccvv + {}^4bcccvv + e^4vv + ccccvv - bbeevv}{cccc + {}^2ccev + eevv - e^4}$, & ſecundus dat $vv \propto \frac{e^3ſſv + ce^3ſſ - e^4ſſ}{e^4 + be^3 + bbcc + bcce.}$ Quocirca, ut obtineatur v, ſi ipſius $ſſ$ valor jam inventus multiplicetur per $\frac{e^3v + ce^3 - e^4}{e^4 + be^3 + bbce + bcce}$, abbreviando priùs, ad facilitatem operationis, numeratorem prioris & denominatorem poſterioris fractionis per $e + b$, ac deinde denominatorem prioris & numeratorem poſterioris fractionis per $eev + cee - e^3$, exurget $e^4 - be^3 + ccce + {}^3bcce \propto e^4 + e^3v + ce^3 + bcce + bccv + bc^3$. Fietque, ordinatâ æqualitate, $v \propto \frac{-bc^3 + {}^2bcce + ccce - be^3 - ce^3}{bcc + e^3}$. Seu, quia y eſt $\propto e$, erit $v \propto \frac{-bc^3 + {}^2bccy + ccyy - by^3 - cy^3}{bcc + y^3}$.

Denique, inventâ quantitate v, facile eſt invenire quantitatem $ſ$. Si enim in ſuperiori æquatione $\frac{cſ - ſy + ſv}{v}$ $\propto \frac{\sqrt{bbcc + {}^2bccy - bbyy + ccyy - {}^2by^3 - y^4}}{y}$ in locum v ſubrogetur valor ejus nunc inventus, obtinebitur

$$ſ \propto \frac{-bcc + bcy + cyy + byy}{y^4 + by^3 + cy^3 + bcyy} \sqrt{bbcc + {}^2bccy - bbyy + ccyy - {}^2by^3 - y^4}.$$

Quod ad conſtructionem hujus attinet, quoniam ipſa, quam inveni, haud inconcinna mihi eſt viſa, placuit eam hîc paucis ſubnectere.

Digitized by Google



Ductâ ex C ſuper GE perpendiculari CM, agatur GC, ſecans AB in L; & ex L ducatur LK parallela GE, occurrens ipſi CM in K. Deinde ex K demiſsâ KN perpendiculari ad CG, jungatur NM; eritque CT huic parallela tangens quæſita.

Quibus explicatis facile etiam eſt hîc oſtendere, quonam pacto punctum Conchoïdis C, quod duas ejus portiones, concavam & convexam, à ſe invicem diſtinguit, inveſtigari queat. De quo egit Nobiliſſimus D. Hugenius ultimo Problematum Illuſtrium, quæ de Circuli magnitudine inventis adjecit.

Etenim inventâ ad hoc, ut ante, æquatione

$$\frac{\begin{array}{lll} y^4 - 2c\,ss\,y^3 & - ccvvyy & - 2bccvvy - bbccvv \\ \quad - 2vss & + bbvv & \\ \quad + 2bvv & + ccss & \\ & + 2cvss & \\ & + vvss & \end{array}}{vv + ss} \infty\ 0,$$

quoniam ex puncto T, utcunque in productâ GE accepto, nulla recta duci poteſt, Conchoïdem in aliquo puncto tangens, quæ, ſeu poſtquam eſt producta, hanc ipſam in alio puncto non ſecat, exceptâ tantùm rectâ, quæ per flexus punctum ducitur: requiritur ut dicta æquatio ad puncti hujus determinationem tres admit-

tat

tat radicis valores, qui omnes inter ſe ſint æquales. Quod ipſum ut fiat, confero æquationem ſuperiorem cum æquatione $y^3 - 3eyy + 3eey - e^3 \infty 0$, in qua y tres habet valores æquales, qui ſinguli ſunt $\infty\ e$. Hanc autem, ut ad æquè multas dimenſiones aſcendat, & ejuſdem cum præcedenti ſit formæ, multiplico per $y+f$, & prodit æquatio

$$y^4 \begin{smallmatrix} -3e \\ +f \end{smallmatrix} y^3 \begin{smallmatrix} +3ee \\ -3ef \end{smallmatrix} yy \begin{smallmatrix} -e^3 \\ +3eef \end{smallmatrix} y - e^3f \infty 0.$$

Cujus termini ſi cum alterius terminis comparentur, invenientur inde $f \infty \frac{bbccvv}{e^3ff + e^3vv}$, $ff \infty \frac{3bbccvv}{e^4} + \frac{2bccvv}{e^3} - vv$, $v \infty \frac{bbcc + 2bcce + ccee}{3bcc - 3bee} - b - c$, & $e^3 \infty -3bee * + 2bcc$, ſeu, quia y eſt $\infty\ e$, $y^3 \infty -3byy * + 2bcc$.

Quoniam autem hæc æquatio Cubica eſt, neque ad Quadratam reduci poteſt, ſupereſt ut valorem radicis y per ſectiones Conicas determinemus. At verò cum æquationes omnes inferiores conſtrui etiam queant beneficio linearum curvarum, quæ ſunt ſuperiorum generum, non ingratum fore judicavi, ſi hîc ulteriùs exponerem, quo pacto ope datæ Conchoïdis CE Problema propoſitum ſolvi poſſit, ſic ut ad conſtructionem ejus non niſi regula atque circino utamur, haud ſecus ac ſi Problema foret Planum. Quemadmodum id ab eruditiſſimo ac præſtantiſſimo Viro-Juvene D. Henrico van Heuraet, Harlemo-Batavo, inventum fuit, mihiq́ue ab eo communicatum.

Eſto, ut ante, GA $\infty\ b$, AE vel LC $\infty\ c$, BC vel AM $\infty\ y$, & AT $\infty\ z$. Unde ut ſupra pro AP invenietur $\frac{-by^3 + bccy + bbcc}{y^3}$

add. AM. y

PM. $\frac{y^4 + by^3 + bccy + bbcc}{y^3}$

MT. $z - y$

$\square$PMT. $\frac{-y^5 \begin{smallmatrix} +z \\ -b \end{smallmatrix} y^4 + bzy^3 - bccyy \begin{smallmatrix} +bccz \\ -bbcc \end{smallmatrix} y + bbccz.}{y^3}$

Eſt autem $\square$CM. $\frac{-y^4 - 2by^3 \begin{smallmatrix} -bb \\ +cc \end{smallmatrix} yy + 2bccy + bbcc.}{yy}$

 Erit

Erit itaque $\dfrac{-y^5 \begin{smallmatrix}+z\\-b\end{smallmatrix} y^4 + bzy^3 - bccyy \begin{smallmatrix}+bccz\\-bbcc\end{smallmatrix} y + bbccz}{y^3}$

$$\infty \; \frac{-y^4 - {}^2by^3 \begin{smallmatrix}-bb\\+cc\end{smallmatrix} yy + {}^2bccy + bbcc}{yy}$$

$$-y^5 \begin{smallmatrix}+z\\-b\end{smallmatrix} y^4 + bzy^3 - bccyy \begin{smallmatrix}+bccz\\-bbcc\end{smallmatrix} y + bbccz \; \infty \; -y^5 - {}^2by^4 \begin{smallmatrix}-bb\\+cc\end{smallmatrix} y^3 + {}^2bccyy + bbccy$$

$$\begin{smallmatrix}+z\\+b\end{smallmatrix} y^4 \begin{smallmatrix}+bz\\+bb\\-cc\end{smallmatrix} y^3 - {}^3bccyy \begin{smallmatrix}+bccz\\-{}^2bbcc\end{smallmatrix} y + bbccz \; \infty \; 0$$

div. per $y+b$. fit $\begin{smallmatrix}+z\\+b\end{smallmatrix} y^3 - ccyy - {}^2bccy + bccz \; \infty \; 0$. Hæc æquatio duas habet veras radices, quippe quæ ad duas tangentes, ex eodem puncto ad utramque portionem ductas, pertinent; quæ ſi æquales fuerint, tanget TC utramque portionem in eodem puncto.

$$\begin{array}{l} y - e \\ y - e \\ \hline yy - {}^2ey + ee \; \infty \; 0 \\ y + g \\ \hline y^3 - {}^2eyy + eey + eeg \; \infty \; 0 \\ \quad + g \quad - {}^2eg \end{array}$$

$$\frac{-cc}{z+b} \; \infty \; -{}^2e + g$$

$$g \; \infty \; {}^2e - \frac{cc}{z+b}$$

$$\frac{bccz}{z+b} \; \infty \; eeg$$

dele g.

$$\frac{bccz}{z+b} \; \infty \; {}^2e^3 - \frac{ccee}{z+b}$$

$$bccz \; \infty \; {}^2ze^3 + {}^2be^3 - ccee$$

$${}^2ze^3 + {}^2be^3 - ccee - bccz \; \infty \; 0$$

Mult. per 3. ${}^6ze^3 + {}^6be^3 - {}^3ccee - {}^3bccz \; \infty \; 0$

ſubtr. ${}^6ze^3 + {}^6be^3 - {}^4ccee - {}^4bcce \; \infty \; 0$

div. per cc. $\dfrac{ccee + {}^4bcce - {}^3bccz \; \infty \; 0}{ee + {}^4be - {}^3bz \; \infty \; 0}$

$$\frac{-{}^2bcc}{z+b} \; \infty \; ee - {}^2eg$$

dele g.

$$-\frac{{}^2bcc}{z+b} \; \infty \; ee - {}^4ee + \frac{{}^2cce}{z+b}$$

$$-{}^2bcc \; \infty \; -{}^3zee - {}^3bee + {}^2cce$$

$${}^3zee + {}^3bee - {}^2cce - {}^2bcc \; \infty \; 0$$

Mult. per ${}^2e$. ${}^6ze^3 + {}^6be^3 - {}^4ccee - {}^4bcce \; \infty \; 0$

Mult. per ${}^3z + {}^3b$.

$${}^3zee + {}^3bee + {}^{12}bze + {}^{12}bbe - {}^9bzz - {}^9bbz \; \infty \; 0$$

ſubtr. ${}^3zee + {}^3bee - {}^2cce - {}^2bcc \; \infty \; 0$

$${}^{12}bze + {}^{12}bbe + {}^2cce - {}^9bzz - {}^9bbz + {}^2bcc \; \infty \; 0$$

$${}^{12}bze + {}^{12}bbe + {}^2cce \; \infty \; {}^9bzz + {}^9bbz - {}^2bcc$$

$$e \; \infty \; \frac{{}^9bzz + {}^9bbz - {}^2bcc}{{}^2cc + {}^{12}bz + {}^{12}bb}.$$

Igi-

Igitur ſi in æquatione $ee + {}^{4}be - {}^{3}bz \infty 0$ in locum e ſubſtituatur hic valor inventus, habebitur:

$$\begin{array}{l} 81bbz^4 + 162b^3z^3 - 108bbcczz - 204b^3ccz - 12bbc^4 \\ \qquad + 81b^4 \qquad\qquad - 12bc^4 - 96b^4cc \end{array} \infty 0$$

div. per $3b$.

$$\begin{array}{l} 27bz^4 + 54bbz^3 - 36bcczz - 68bbccz - {}^{4}bc^4 \\ \qquad + 27b^3 \qquad\qquad - 4c^4 \quad - 32b^3cc \end{array} \infty 0$$

div. per $z + b$.

$$\begin{array}{l} 27bz^3 + 27bbzz - 36bccz - 32bbcc \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - 4c^4 \end{array} \infty 0$$

div. per $27.b$.

$$\text{Et fit } z^3 + bzz - \tfrac{4}{3}ccz - \frac{32bbcc - 4c^4}{27b} \infty 0.$$

Jam ut æquatio hæc ope circuli ac datæ Conchoidis ſolvatur, ponatur $GA \infty b$

$AE \infty c$ Tum fiat, ut ſequitur.

$AT \infty x$

$TC \infty y$

& $AM \infty z$, eritque $MT \infty x - z$.

ſubtr. $\begin{cases} \square CT.\ yy \\ \square MT.\ xx - {}^{2}xz + zz \end{cases}$ $\square$ CM. Ex natura Conchoidis.

$$\square CM.\ yy - xx + {}^{2}xz - zz \infty \frac{-z^4 - {}^{2}bz^3 - bbzz + cczz + {}^{2}bccz + bbcc}{zz}$$

$$yyzz - xxzz + {}^{2}xz^3 - z^4 \infty -z^4 - {}^{2}bz^3 - bbzz + cczz + {}^{2}bccz + bbcc$$

$$\begin{array}{c} +{}^{2}x \\ +{}^{2}b \end{array} z^3 \begin{array}{c} +yy \\ -xx \\ +bb \\ -cc \end{array} zz - {}^{2}bccz - bbcc \infty 0$$

div. per ${}^{2}x + {}^{2}b$.

$$\text{Et fit } z^3 \frac{\begin{array}{c} +yy \\ -xx \\ +bb \\ -cc \end{array}}{{}^{2}x + {}^{2}b} zz - {}^{2}bccz - bbcc \infty 0$$

Hinc cum termini hujus æquationis cum terminis proximè antecedentis ſint comparandi, & quidem ad inveniendas quantitates x & y tres eſſent æquationes quærendæ: facio ut in eadem æquatione tertius terminus ſit ad quartum, ſicut tertius hujus eſt ad quartum. In quem finem ſecundum illius terminum multiplico

 per

per $\frac{9bb}{16bb + 2cc}$, & tertium per $\frac{81b^4}{256b^4 + 64bbcc + 4c^4}$. Omnino ut hîc videre eſt.

$$z^3 + bzz - \tfrac{4}{3}ccz - \&c. \propto 0$$

$$\frac{9bb}{16bb + 2cc} \qquad \frac{81b^4}{256b^4 + 64bbcc + 4c^4}$$

$$z^3 + \frac{9b^3}{16bb + 2cc}zz - \frac{27b^4cc}{64b^4 + 16bbcc + c^4}z - \&c. \propto 0.$$

$$\frac{27b^4cc}{64b^4 + 16bbcc + c^4} \propto \frac{bcc}{x + b}$$

$$\frac{27b^3}{64b^4 + 16bbcc + c^4} \propto \frac{1}{x + b}$$

$$27b^3x + 27b^4 \propto 64b^4 + 16bbcc + c^4$$

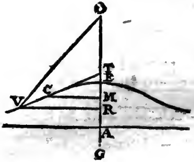
$$x \propto \frac{64b^4 + 16bbcc + c^4}{27b^3} - b.$$

$$\frac{9b^3}{16bb + 2cc} \propto \frac{yy - xx + bb - cc}{2x + 2b}$$

$$\frac{9b^3x + 9b^4}{8bb + cc} \propto yy - xx + bb - cc$$

$$yy \propto \frac{9b^3x + 9b^4}{8bb + cc} + xx + cc - bb$$

$$y \propto \sqrt{\frac{9b^3x + 9b^4}{8bb + cc} + xx + cc - bb}.$$



Igitur ſumendo in axe lineam AO $\propto \frac{64b^4 + 16bbcc + c^4}{27b^3} - b$, eamque vocando x, ſi ex puncto O intervallo OV $\propto \sqrt{\frac{9b^3x + 9b^4}{8bb + cc} + xx + cc - bb}$ arcus Circuli deſcribatur, atque ex ſectionis puncto V ducatur ad AO perpendicularis VR: erit AT, quæ ſe habet ad AR, ut $16bb + 2cc$ ad $9bb$, inventæ æquationis radix. Unde facile eſt invenire lineam AM. Oſtenſum enim eſt $yy + 4by - 3bz \propto 0$.

Denique cum inventio ſupponendi duas ejuſdem formæ æquationes, ad comparandum ſeparatim omnes terminos unius cum omnibus terminis alterius, non tantùm ad inveniendas tangentes aut ſecantes curvarum linearum, quemadmodum fuit expoſitum, adhiberi poſſit; ſed ipſa generalis ſit atque infinitis aliis Problematis reſolvendis, ut Author aſſerit, inſervire queat: haud inutile fuerit hîc ulteriùs quoque exponere, quo pacto illam ad Maximi aut Minimi determinationem applicari poſſe deprehendi, proponendo in eum finem ſequentia Problemata.

Datam

Digitized by Google



Datam rectam lineam A C ſecare in puncto B, ut parallelepipedum, quod ſit ſub quadrato unius partis AB & altera parte BC, ſit omnium parallelepipedorum, ſic factorum, maximum.

Eſto AC ∞ a, & AB ∞ x: eritque BC ∞ $a-x$. Deinde maximum ſolidum, cui parallelepipedum quæſitum ſtatui poteſt æquale, eſto b^3. Quibus ſic poſitis, ſi quadratum ex AB ∞ xx multiplicetur per BC ∞ $a-x$, proveniet $axx - x^3 \infty b^3$, ſeu $x^3 - axx * + b^3 \infty 0$. Jam factâ $x \infty e$, ſeu $x - e \infty 0$, multiplico $x-e$ per $x-e$, & fit $xx - 2ex + ee \infty 0$. Quam porrò, ut ejuſdem ſit formæ cum præcedente, multiplico per $x+f$, & exurgit $x^3 \begin{array}{l}-2e\\+f\end{array} xx \begin{array}{l}+ee\\-2ef\end{array} x + eef \infty 0$. Ex quarum mutua inter ſe collatione eliciuntur hæ tres æquationes $-2e+f \infty -a$, $+ee-2ef \infty 0$, & $eef \infty b^3$: quæ reſolutæ dant $f \infty \frac{1}{2}e$, e ſeu $x \infty \frac{2}{3}a$, & $b^3 \infty \frac{4}{27}a^3$. Quod ipſum docet, ad ſecandam lineam AC, qualis requiritur, eandem in B ita eſſe dividendam, ut AB ipſius AC contineat duas tertias partes; & maximum ſolidum, cui parallelepipedum quæſitum adæquari poteſt, eſſe $\frac{4}{27}a^3$.

Dividere p planum in tria plana proportionalia, ita ut ſolidum, quod fit ex ductu ſummæ duorum priorum in latus ſecundum, vel duorum poſteriorum in latus primum, ſit omnium maximum.

Aſſumptis ad hoc x pro latere primo, & y pro latere ſecundo, ſient inde proportionalia plana xx. 1mum

xy. 2dum

yy. 3tium.

Et manifeſtum eſt, $xxy + xyy$, quod fit ex $xx + xy$, ſummâ duorum priorum planorum, in latus ſecundum y, eſſe æquale ei, quod fit ex $xy + yy$, ſummâ duorum poſteriorum planorum, in latus primum x. Supereſt ut $xxy + xyy$ ſit omnium ejuſmodi ſolido-

lidorum maximum. Quoniam autem $xx + xy + yy$ eſt $\propto p$

vel $yy \propto p - xx - xy$

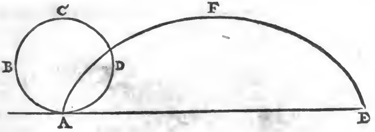
mult. per x $\quad x$

vel etiam $xyy \propto px - x^3 - xxy$:

Hinc ſi pro xyy dicti ſolidi $xxy + xyy$ ſubſtituatur $px - x^3 - xxy$, habebitur $px - x^3$. Quocirca ut $px - x^3$ fiat maximum ſolidum, quod eſſe poſſit, intelligatur ipſum æquale ſolido q: eritque $x^3 * - px + q \propto 0$. Deinde factâ $x \propto e$ ſeu $x - e \propto 0$, multiplico $x - e$ per $x - e$, & fit $xx - 2ex + ee \propto 0$. Quam rurſus, ut eandem formam habeat cum præcedenti, multiplico per $x + 2e$, & exſurgit $x^3 * - 3eex + 2e^3 \propto 0$. Ex quibus binis æquationibus, ſi ſinguli termini unius cum ſingulis terminis alterius comparentur, elicio $x \propto \sqrt{\frac{1}{3}p}$, & $q \propto \frac{2}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p}$. Eodem modo invenitur $y \propto \sqrt{\frac{1}{3}p}$. Quod ipſum monſtrat, ad dividendum p planum in tria plana proportionalia, maximum ſolidum, quod ex ductu ſummæ duorum priorum in latus ſecundum vel ex ductu duorum poſteriorum in latus primum gignitur, eſſe illud, quod obtinetur dividendo p planum in tria plana æqualia. Et ſic de aliis.

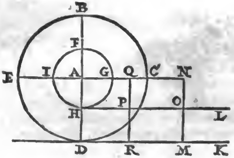
Cæterùm, cum allatis exemplis ſatis ſuperque ſit oſtenſum, quâ ratione lineæ rectæ inveniri poſſint, ſecantes lineas curvas in Geometriam recipiendas in datis punctis ad angulos rectos: lubet etiam afferre modum ducendi illas in iis curvis, quas pro Geometricis pari jure habere non licet. Qualem Dominus des Cartes excogitavit, atque jam pridem ejus exemplum R. P. Merſenno per literas oſtendit in curva, quæ Cycloïdes ſive Trochoïdes appellatur, quam Vir Clariſſimus, Evangeliſta Toricellius, ſcribit à Galilæo Galilæi, prædeceſſore ſuo, primùm fuiſſe conſideratam; cujuſque ulteriori ſpeculationi ipſum poſtea, ut & Virum Celeberrimum, D. de Roberval, Mathematum in Academia Pariſienſi Profeſſorem Regium, ſe addixiſſe novi. Originem autem ducit ex motu puncti, in rota ſive circulo aſſumpti, ſuper rectam aliquam lineam circumvoluti.

Ut



Ut ſi ſuper recta linea AE circumvolvatur rota ſive circulus ABCD, donec punctum ejus A, in quo dictam lineam tangit, eidem rurſus occurrat in E: deſcribet punctum A hoc motu lineam curvam AFE, quæ Trochoïdes ſive Cycloïdes appellatur. Idem intellige de quovis alio puncto, extra vel intra rotam ſive circulum aſſumpto, excepto tantùm ejus centro.

Jam ut in genere oſtendatur, quâ ratione lineæ rectæ duci poſſint, quæ haſce curvas ſecent in datis punctis ad angulos rectos; non abs re fuerit cum Ariſtotele hîc explicare, quo pacto inæquales circuli, qui circa idem centrum conſtituti ac conjuncti circumvolvuntur, æquales rectas lineas abſolvant.



Sunto ergo duo circuli inæquales, major quidem BCDE; minor autem FGHI, idem habentes centrum A: ſintque diametri majoris BD, EC; minoris verò FH & IG, ſeſe ad angulos re-

ctos ſecantes in A, ita ut quadrans circuli majoris ſit CD; minoris verò GH. Jam igitur ut pateat ratio, quâ hi circuli, ſimul circumvoluti, æquales lineas abſolvant; concipiatur primùm majorem BCDE dextrorſum moveri ſuper recta DK, & minorem FGHI ad motum illius deſcribere lineam rectam ipſi DK parallelam, quæ ſit HL. Unde manifeſtum, cùm punctum C pervenerit ad M, exiſtente arcu DC æquali rectæ DM, ſemidiametrum quoque AC tunc fore perpendicularem ſuper DK in M; ita ut coïncidat cum MN, hoc eſt, punctum C cum puncto M, & punctum A cum puncto N. Ac proinde cum punctum G circuli minoris ſit in recta AC: ſequitur ipſum quoque poſt hujus quadrantis devolutionem cadere in punctum O; ita ut ſemidiameter AG circuli minoris transferatur in NO. Adeò ut, NO æquali exiſtente & parallelâ ipſi AH, ipſa quoque HO ſit æqualis futura ipſi AN ſeu DM, & ſingulæ rectæ DM, HO ſeparatim ab utroque circuli quadrante eodem tempore peragrentur. Idem de integris circulis eſt intelligendum.

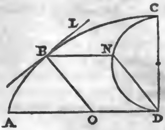
Non ſecus oſtendetur, ſi moveatur circulus minor FGHI ſuper rectam HL, ſecum deferens circulum majorem BCDE, ſibi affixum in centro A, lineas rectas æquales abſolvi. Devoluto enim circuli minoris quadrante HG ſuper rectam HL, ab H verſus L; ita ut rectam lineam HP ſibi æqualem percurrat: ducatur per P recta QPR, ſecans rectam HL ad angulos rectos in P; ſed AN & DK in Q & R. Quo facto, perſpicuum eſt, cùm punctum G eſt in P, punctum quoque A eſſe in Q, rectamque AG ſuper rectam QP. Atque ideo, cum punctum C circuli majoris exiſtat in linea AG producta, patet, illud poſt hujus quadrantis devolutionem inventum iri in puncto R, rectamque DR æqualem fore rectæ AQ ſeu HP, & ſingulas eodem temporis ſpatio ab utroque circuli quadrante perfici. Quod & de tota circuli circumferentia concludere licet. E quibus tandem liquet, quâ ratione circulus circumvolvi poſſit, ut rectam abſolvat lineam, quæ circumferentiæ ejus ſit vel æqualis, vel major, vel minor.

Sed de ſupra dicta linea AFE notandum, eam duobus motibus deſcribi, inter ſe diſtinctis; recto nempe, quo circulus ABCD defertur ab A ad E; & circulari, quo punctum in ejus circumferentia A (quod Trochoidem deſcribit) rotatur circa centrum, dum movetur per lineam rectam ipſi AE æqualem & parallelam.

Qui-

Digitized by Google

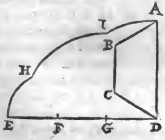
Quibus ſic explicatis, ut ad propoſitum redeamus, atque rectam, quæ Trochoidem in dato puncto tangat, ducamus: ſciendum eſt, lineam rectam, tranſeuntem per punctum dictum, & punctum, in quo rota baſin, dum punctum in Trochoïde datum deſcribitur, contingit, ſecare ſemper tangentem quæſitam ad angulos rectos.



Ut ſi invenienda ſit linea recta, tangens in B curvam ſive Trochoïdem A B C, deſcriptam ſuper baſin A D per punctum aliquod circumferentiæ rotæ DNC, ſuper baſin AD circumvolutæ: oportet tantùm per punctum B rectam lineam ducere B N, parallelam baſi A D; & deinde ab N (ubi rotæ occurrit) ad D, (ubi rota baſin tangit) rectam N D; tumque eidem parallelam BO; ac denique huic perpendicularem BL: Quæ erit tangens quæſita.

Cujus rei brevem atque ſimplicem demonſtrationem affert, ut ſequitur.

Si ſuper rectam lineam circumvolvatur polygonum aliquod rectilineum, erit linea curva, quæ per aliquod ejus punctum deſcribitur, compoſita ex pluribus circulorum portionibus, quarum tangentes ad ſingula earum puncta normaliter ſecant lineas rectas, quæ ab ipſis ad puncta, in quibus polygonum, unamquamque portionem deſcribendo, baſin contingit, ducuntur.



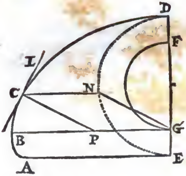
Exempli gratiâ, ſi faciamus ut volvatur Hexagonum A B C D ſuper rectam E F G D, deſcribet punctum ejus A, lineam curvam E H I A, compoſitam ex arcu E H, qui deſcribitur, dum Hexagonum hoc contingit baſin in puncto F (quod ejuſdem arcus eſt centrum); & ex arcu H I (cujus centrum eſt punctum G); ut

Digitized by Google

& ex arcu IA (cujus centrum eſt punctum D): per quæ centra tranſeunt omnes rectæ, quæ dictorum arcuum tangentibus ad angulos rectos occurrunt. Quod cum accidat polygono centies millenorum millium, palàm eſt, idem convenire quoque Circulo.

Verba Authoris. Cæterùm poſſem hanc tangentem alio modo, & meâ ſententiâ elegantiori, magiſque Geometrico demonſtrare; verùm quoniam prolixior foret, & brevitati hic mihi conſulendum videtur, in præſens ei deſcribendo ſuperſedebo. Notandum ſolummodo eſt, cùm baſis hujus Trochoïdis æqualis eſt cicumferentiæ rotæ, quam ſuper eandem baſin ad ejus deſcriptionem circumvolvi imaginamur, curvam hanc, à fornice circulari non abſimilem figuram, referre: hoc eſt, quòd tangens utriuſque ejus extremi puncti ad baſin ſit perpendicularis. Sed cùm minor eſt, quòd tunc utraque extremitas introrſum ſit involuta, ita ut complures revolutiones hanc repræſentent figuram





Ad cujus Trochoïdis tangentes inveniendas, atque ſciendum ubi ſe involvere incipiat: imaginandum eſt, punctum D, à quo deſcribitur, eſſe extra rotam. Deinde, duæ ſupponendæ ſunt baſes; una AE, ſupra quam Trochoïdes ABCD per punctum D eſt deſcripta; & altera BG, ſuper quam rota FG ſecum deferens circulum DE ſibi affixum circa ejus centrum eſt circumvoluta, cujuſque ſemicircumferentia dimidiæ baſi AE eſt æqualis. Ubi ſciendum, tangentes inveniri per circulum DE & punctum G, ubi rota FG baſin BG contingit. Adeò ut ad ducendam lineam rectam, quæ tangat hanc Trochoïdem, verbi gratiâ, in puncto C, opùs tantùm ſit ducere CN parallelam baſi AE, occurrentem circu-

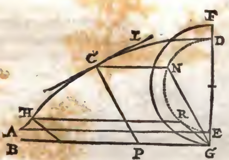
Digitized by Google

circulo DE in puncto N; tum verò junctæ NG parallelam CP: quæ ipſi tangenti quæſitæ erit perpendicularis. Ita ut perſpicuum ſit, punctum B, ubi hæc ſecunda baſis BG Trochoïdi occurrit, fore illud, ubi ipſa ſe introrſum involvere incipiet: quandoquidem linea, quæ illam ibidem tangit, ad baſin AE perpendicularis exiſtit.

Denique ſi baſis Trochoïdis major fuerit circumferentiâ circuli, qui per aſſumptum punctum, quod eam deſignat, circa rotæ centrum deſcribitur: binæ extremitates extrorſum erunt inflexæ; ita ut complures ejuſmodi linearum revolutiones hanc exhibeant figuram.



Cujus Trochoïdis tangentes ut inveniantur, atque ſciatur ubi ſe inflectere incipiat, imaginandum eſt, punctum, quod ipſam deſignat, eſſe intra rotam: adeoque ſecundam baſin eſſe B G, ſupra quam rota F G, cujus circumferentia huic baſi eſt æqualis, circumvolvatur, interea dum punctum D, Trochoïdem deſignans, ſuper primam baſin AE deſcribit circulum DE, circa rotæ centrum. Jam ut inveniatur linea, quæ ipſam in puncto C, utcunque in Trochoïde aſſumpto, tangat: ducatur CN parallela baſi, occurrens circulo



DNE in puncto N. Tum ab N ad G, ubi rota FG baſin ſuam contingit, ductâ rectâ NG, agatur ipſi parallela CP: eritque recta CL, quæ ad eam perpendicularis ducitur, tangens quæſita. Porrò ad inveniendum punctum H, ubi Trochoïdis portio AH

Digitized by Google

definit eſſe concava, & HCD convexa, opùs tantùm eſt à puncto G rectam ducere GR, quæ tangat circulum DRE in puncto R; tum ab R rectam RH, parallelam baſi, & occurrentem Trochoïdi in puncto H. Quod erit quæſitum.

Ubi notandum, nullam dari lineam rectam, quæ Trochoïdem hanc AHCD tangat in puncto H: quandoquidem illud ipſum duas ejus portiones, quarum una eſt concava, & altera convexa, diſtinguit.

Deinde obſervandum, quòd ea, quæ de tangentibus Trochoïdum, per rotam circularem deſcriptarum, hîc allata ſunt, etiam omnibus aliis Trochoïdibus competant, quæ circumvolutione aliarum quarumlibet figurarum deſcribuntur.

Denique, quòd lineæ hæ ſint Mechanicæ, & è numero earum, quæ in hac Geometria repudiantur; adeò ut nemini mirum videri debeat, quòd tangentes earum non inveniantur per regulas ibi expoſitas, cum ad ipſas non referantur.

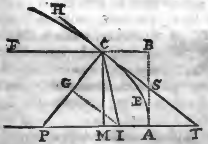
oo *Quâ quidem ratione hi circuli in punctis 2, 2 ſeſe interſecabunt, per quæ ſecunda hæc Ovalis erit ducenda.*] Notavit hic Clariſſimus Hugenius, ſecundam hanc Ovalem (quod animadverſione dignum eſt) uno caſu Circulum perfectum evadere, cùm nempe FA ad AG eandem rationem habet, quam 5 A ad A 6. Adeoque radios lucis, ad punctum aliquod tendentes, ope ſuperficiei Sphæricæ ad datum aliud punctum omnes accuratè cogi poſſe. Quod ſe apertiùs in tractatu de Dioptricis demonſtraturum ſuſcepit, in quo multa egregia ac ingenioſè à ſe inventa, quæ huc ſpectant, brevi, ſi volet Deus, eſt exhibiturus.

p *Et quod ex tali materia conſtet, ut vim horum radiorum, ſecundùm rationem, quæ inter lineas A 5 & A 6 reperitur, diminuat. Quandoquidem ex eo, quod in Dioptrica demonſtravimus, liquet, hoc poſito, futurum, ut etiam reflexionum anguli, non ſecus ac refractionum, inæquales exiſtant, atque eodem modo menſurari poſſint.*] Hæc refer ad caput 2dum Dioptricæ, ubi demonſtratum eſt, reflexionis angulum angulo incidentiæ eſſe æqualem, quoniam vis alicujus radii per reflexionem non diminuitur. Sicut per refractionem vis radii, tranſeundo ex uno corpore pellucido in aliud, augetur aut diminuitur, ac propterea angulos

Digitized by Google

gulos facit inæquales. Adeò ut hinc ſequatur: ſi ſpeculùm haberi poſſit, ex tali conſtans materia, ut vim radiorum, quos reflecteret, augeret aut diminueret (omnino ut oſtendit, vitrum vim radiorum, quos in ſe recipit, augere, eorumque refractionis cauſam eſſe): eſſent reflexionum anguli non ſecus ac refractionum inæquales: & poſſet eorum ratio menſurari per rationem, quæ eſt inter lineas A 5 & A 6, ſupponendo illam eandem eſſe, quæ eſt inter vim alicujus radii antequam in ſpeculum incideret, & inter vim, quam immediatè poſt obtineret, cum eſſet reflexus.

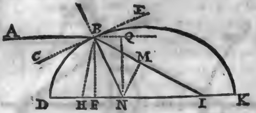
Cæterùm quoniam ad radios per reflexionem ac refractionem diverſimode detorquendos Sectiones Conicæ ſingularem habent uſum, atque ſpecula & vitra ad ipſarum figuram expolita miros effectus præbent: haud inopportunum fore duxi, ſi, tum ad penitiorem intellectum eorum, quæ in Dioptrica de figura vitrorum ab Authore ſunt oſtenſa, tum ad uſum eorum, quæ de inveniendis tangentibus aut ſecantibus expoſita ſunt, deinceps hîc adjungerem, quo pacto in axe puncta inveſtigari poſſint, in quibus radii Solis, poſtquam in ſuperficiem concavam ſpeculi Parabolici inciderunt, aut per Elliptica vel Hyperbolica vitra tranſierunt, reflectuntur aut colliguntur.



Ut ſi fuerit ſpeculum, habens figuram Parabolæ A E C, cujus axis ſit MA, & vertex A: ad inveſtigandum punctum I, ad quod radius Solis F C, qui ipſi M A eſt parallelus, reflectatur, poſtquam in idem ſpeculum incidit in C, ſuppono, ut ante, latus rectum ∞ r, M A ∞ y, & I A ∞ z. Quibus poſitis cum ex ſuperioribus PM ſit $\infty \frac{1}{2} r$, & AT ſit ∞ AM ſeu y: erit PT $\infty \frac{1}{2} r + 2y$, & PI $\infty \frac{1}{2} r + y - z$. Quoniam autem propter æquales angulos incidentiæ & reflexionis F C H & ICT, ut & rectam PC ipſi tangenti H T perpendicularem, anguli quoque FCP & PCI ſunt æquales; atque horum quidem angulus FCP angulo CPI ſit æqualis: erunt pariter anguli PCI & CPI æquales; lineaque IG, ipſi PC perpendicularis, rectam PC bifariam

riam in G ſecabit. Quibus ſic exiſtentibus, cum & hinc PI ipſi IT ſit æqualis, erit $r + {}^2y - {}^2z \infty \frac{1}{2}r + {}^2y$. Unde, dempto utrinque ${}^2y$, & reliquis per 2 diviſis, invenitur $z \infty \frac{1}{4}r$. Quod ipſum, cum de quovis radio ipſi axi parallelo ſimiliter intelligendum ſit, nos docet, radios Solis, axi parallelos, ubi in ſuperficiem concavam ſpeculi Parabolici inciderunt, omnes ad idem axis punctum I reflecti, diſtans à vertice quartâ parte lateris recti.

Unde porrò fit manifeſtum, cum lucente Sole, beneficio hujus ſpeculi, prout ipſi directè eſt obverſum, aliquid in I accendatur, quam ob rationem idem ſpeculum uſtorium dictum fuerit, punctumque I Foci nomine appellari conſueverit.



Deinde ſi fuerit vitrum, habens formam Ellipſis DBK, cujus maxima diameter ſit DK: ad inveſtigandum quorſum radius AB, qui in aëre exiſtens ipſi DK eſt parallelus, tendere debeat, poſtquam intravit ejus ſuperficiem convexam, & in quo vitro refractiones ſic fieri intelliguntur, ut, juxta ea, quæ in Dioptricis tradita ſunt, illæ omnes menſurari poſſint per rationem, quæ eſt inter lineas d & e, facio DH vel IK ∞ a, HI ∞ z, & DF ∞ y, eritq; HF ∞ $y - a$ vel $a - y$, & FI ∞ $a + z - y$ vel $y - a - z$. Quibus poſitis, ſi Ellipſis DBK deſcripta eſſe intelligatur ope fili HBI, haud ſecus ac illud Capite 8vo Dioptrices ab Authore aut etiam à nobis in Organica Conicarum Sectionum deſcriptione expoſitum fuit, erit, factâ BI ∞ x, BH ∞ ${}^2a + z - x$. Unde jam facile eſt invenire quantitatem y, aſſumptis ſcilicet quantitatibus x & z, ut cognitis. Etenim ſi à quadrato BH. ${}^4aa + {}^4az + zz - {}^4ax - {}^2zx + xx$ tollatur quadratum HF. $yy - {}^2ay + aa$, reſtabit ${}^3aa + {}^4az + zz - {}^4ax - {}^2zx + xx + {}^2ay - yy$, pro quadrato BF. Similiter, ſi à quadrato BI. xx auferatur quadratum FI. $aa + {}^2az + zz - {}^2ay - {}^2zy + yy$, relinquetur etiam

$xx -$

$xx - aa - 2az - zz + 2ay + 2zy - yy$, pro quadrato BF. Hinc cum habeatur æquatio inter quadratum BF bis inventum, invenietur, ordinatâ æqualitate, $y \propto \frac{2aa + 3az + zz - 2ax - zx}{z}$.

Eſto jam DN $\propto v$, & NB $\propto s$, eritque FN $\propto v - y$. Equibus rurſus facile eſt invenire quantitatem y, ſuppoſitis quantitatibus v & s. Si enim à quadrato BN. ss abſtulero quadratum FN. $vv - 2vy + yy$, remanebit $ss - vv + 2vy - yy$, pro quadrato BF. Unde factâ æquatione inter hanc ſummam & poſteriorem duarum præcedentium habebitur $y \propto \frac{ss - vv - xx + aa + 2az + zz}{2a + 2z - 2v}$.

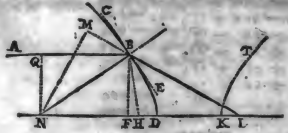
Quibus jam inter ſe æquatis, & æquatione de xx ordinatâ, fiet

$$xx \propto \frac{\begin{array}{ll} -4avx & +ssz \\ -2vz & -vvz \\ +4aa & +4aav \\ +6az & +6avz \\ +2zz & +2vzz \\ & -4a^3 \\ & -9aaz \\ & -6azz \\ & -z^3 \end{array}}{z}.$$

Porrò ut inveniantur quantitates v & s, poſitâ $x \propto s$, multiplicetur $x - s \propto 0$ per $x - s \propto 0$, & fit $xx - 2sx + ss \propto 0$, ſeu $xx \propto 2sx - ss$, æquatio ejuſdem formæ cum præcedente. Unde, comparando ſecundum terminum unius cum ſecundo alterius, emergit v, hoc eſt, DN $\propto \frac{2aa + 3az + zz - zx}{2a + z}$. Quæ à DI ſeu $a + z$ ablata relinquit NI $\propto \frac{zx}{2a + z}$. Denique cum linea NQ vel FB & linea NM eandem inter ſe rationem habeant, quam lineæ, quæ refractionem vitri DBK menſurant; & quidem FB ad NM ſit, ut BI ad IN: ſupereſt ut d ſit ad e, ſicut x ad $\frac{zx}{2a + z}$. Et fit, multiplicando extremos, tum medios, $\frac{dzx}{2a + z} \propto ex$. Unde, reſolutâ æqualitate, invenitur HI ſeu $z \propto \frac{2ae}{d - e}$. Cui ſi addantur DH & IK, hoc eſt, $2a$, habebitur

Digitized by Google

$DK \propto \frac{2ad}{d-e}$. Et patet DK ad HI eſſe, ut $2ad$ ad $2ae$, hoc eſt, ut d ad e. Quod ipſum, cum de quovis radio AB ipſi DK parallelo ſimiliter intelligendum ſit, nos docet, ope vitri Elliptici DBK, in quo DK ad HI eandem habet rationem, quam d ad e, hoc eſt, eandem quam inter ſe ſervant lineæ, quæ hujus vitri refractionem metiuntur, radios, qui in aëre exiſtentes diametro DK ſunt paralleli, omnes ita detorqueri, ut, poſtquam ſuperficiem ejus convexam DBK tranſierunt, colligantur ſimul in puncto I.



Denique ſi fuerit vitrum, habens figuram Hyperbolæ DB, cujus axis ſit DK: ad inveſtigandum, quo pacto radius AB, qui in vitro exiſtens ipſi DK eſt parallelus, ſe inflectere debeat, poſtquam ſuperficiem ejus convexam DB erit egreſſus, ſupponendo ejuſdem vitri refractionem eſſe eam, quæ eſt inter lineas d & e, facio HD vel KI $\propto a$, HI $\propto z$, & DF $\propto y$: eritque FH $\propto y - a$ vel $a - y$, & FI $\propto z + y - a$. Quibus poſitis, ſi Hyperbola DB deſcripta intelligatur beneficio fili, quemadmodum Capite 8vo Dioptrices ab Authore fuit indicatum, vel etiam à nobis libro 4to Exercitationum noſtrarum Mathematicarum, erit, factâ BI $\propto x$, BH $\propto x - z + 2a$. Unde jam facile eſt invenire quantitatem y, ſupponendo quippe quantitates x & z eſſe cognitas. Si enim à quadrato BH. $xx - 2zx + zz + 4ax - 4az + 4aa$ ſubducatur quadratum FH. $yy - 2ay + aa$, reſtabit $xx - 2zx + zz - yy + 2ay + 3aa + 4ax - 4az$, pro quadrato FB. Similiter, ſi à quadrato BI. xx auferatur quadratum FI. $zz + 2zy + yy - 2az - 2ay + aa$, relinquetur quoque $xx - zz - 2zy - yy + 2az + 2ay - aa$, pro quadrato FB. Hinc, cum habeatur æquatio inter

inter quadratum FB dupliciter inventum, invenietur, ordinatâ æqualitate, $y \infty \frac{zx - zz - 2aa + 3az - 2ax}{z}$. Eſto jam DN ∞ v, & NB ∞ $ſ$, eritque NF ∞ $v - y$. E quibus rurſus facile eſt invenire quantitatem y, ſuppoſitis quantitatibus v & s. Etenim ſi à quadrato NB. ss detraxero quadratum NF. $vv - 2vy + yy$, remanebit $ss - vv + 2vy - yy$, pro quadrato FB. Unde factâ æquatione inter hanc ſummam & poſteriorem duarum præcedentium, habebitur $y \infty \frac{-ss + vv + xx - aa + 2az - zz}{-2a + 2z + 2v}$. Quibus jam inter ſe æquatis, & æquatione de xx ordinatâ, fiet

$$xx \infty \frac{\begin{array}{ll} +2zzx & +ssz \\ -6az & -vvz \\ +4aa & -2vzz \\ +2vz & -4aav \\ -4av & +6avz \\ & -z^3 \\ & -9aaz \\ & +6azz \\ & +4a^3 \end{array}}{z}.$$

Porrò ut innoteſcant quantitates v & $ſ$, poſitâ $x \infty ſ$, multiplico $x - ſ \infty 0$ per $x - ſ \infty 0$, & fit $xx - 2ſx + ſſ \infty 0$, ſeu $xx \infty 2ſx - ſſ$, æquatio ſimilis præcedenti. Unde, comparando ſecundum terminum unius cum ſecundo alterius, invenitur v, hoc eſt, DN $\infty \frac{zx - zz + 3az - 2aa}{z - 2a}$. Cui ſi addatur DI. $z - a$, habebitur NI $\infty \frac{zx}{z - 2a}$. Denique cum linea NM ad NQ vel FB eam habeat rationem, quam inter ſe habent lineæ refractionem vitri DB menſurantes; & quidem NM ad NQ vel FB ſit, ut NI ad IB: relinquitur, ut d ſit ad e, ſicut $\frac{zx}{z - 2a}$ ad x. Et fit, multiplicando extremos, tum medios, $dx \infty \frac{ezx}{z - 2a}$. Unde, reſolutâ æqualitate, invenitur HI ſeu $z \infty \frac{2ad}{d - e}$. E qua ablatis HD & KI ſeu $2a$, erit reliqua DK $\infty \frac{2ae}{d - e}$. Et manifeſtum eſt HI ad DK eſſe, ut $2ad$ ad $2ae$, vel ut d ad e. Id quod, dum de quolibet

radio A B ipſi D K parallelo perinde eſt intelligendum, nobis monſtrat, beneficio vitri Hyperbolici D B, in quo H I ad D K eam obtinet rationem, quam *d* ad *e*, quæ eſt ejuſdem vitri menſura refractionis, radios, qui in vitro D B exiſtentes axi D K ſunt paralleli, egrediendo ſuperficiem ejus convexam D B ita flexum iri, ut egreſſi omnes coëant in punctum I.

P P *Cujus figura eſt A 3 Y 3, quæ undique eſt convexa; præterquam versùs A, ubi paululum concava exiſtit, ita ut ipſa pariter atque præcedens cordi haud ſit abſimilis.*] Ubi etiam ſciendum, ex poſitione punctorum H & F, quemadmodum Nobiliſſimus Hugenius notavit, contingere poſſe, ut versùs A convexa exiſtat.

A R-

ARGUMENTUM TERTII LIBRI.

Poſtquam primo libro expoſita ſunt ea, quæ viam aperiunt ad Authoris Methodum, quâ in reſolvendis & conſtruendis Geometriæ Problematis utitur, ibidemq; ſimul oſtenſa eſt ratio conſtruendi Problemata Plana, hoc eſt, quæ reduci poſſunt ad æquationes Quadratas, quæq; rectarum linearum atq; circuli circumferentiarum ope ſolvi poſſunt; accedit deinceps ad Solidorum & Linearium conſtructiones, hoc eſt, quæ ad æquationes Cubicas altiorúmve graduum adſcendunt, & ad quorum conſtructiones, ſectionibus Conicis, aliiſq; curvis lineis magis compoſitis uti neceſſarium eſt. Ubi obſervandum eſt, quòd, cum peccatum ſit non leve apud Geometras, Problema Planum conſtruere per Conica aut Linearia, hoc eſt, ipſum per improprium ſolvere genus, ita quoque ſit cavendum ne in conſtructionem ejus adhibeamus lineam aliquam curvam, quæ magis ſit compoſita, quàm ipſius natura admittit.

Quocirca, poſtquam ſecundo libro oſtenſum eſt, quo pacto curvæ lineæ, mediantibus æquationibus, quæ exhibent relationem, quam ipſarum puncta habent ad puncta lineæ rectæ, diſtingui poſſint in certa genera, atq; exinde cognoſci, quænam illarum magis ſint compoſita; ſupereſt ut explicemus, quomodo ſciri poſſit, utrum Problema aliquod ſit vel Planum, vel Solidum, vel deniq; Lineare. Arguitur autem Problema Planum eſſe, cùm æquatio, ad quam perducitur, poſtquam ad ſimpliciſſimos terminos eſt reducta, atque amplius reduci nequit, Plana exiſtit, hoc eſt, ut incognita quantitas ad quadratum adſcendat, duáſve habeat dimenſiones, illaq; per rectas lineas & circulorum circumferentias inveniri poſſit, quemadmodum primo libro fuit oſtenſum. At verò Solidum eſſe, quando æquatio, quæ ex eo deducitur, poſtquam ad ſimpliciſſimos terminos reducta eſt, talis exiſtit, ut incognita quantitas ad Cubum aut Quadrato-quadratum, hoc eſt, ad 3 aut 4 dimenſiones adſcendat, ipſaq; non niſi Conicam aliquam ſectionem in conſtructionem adhibendo inveniri queat. Ac Lineare deniq;, ubi æquatio illa, poſtquam non ampliùs reducibilis eſt, plùs quàm Solida exiſtit, & incognita quantitas ad 5 aut 6 dimenſiones aſſurgit; vel etiam ad 7 aut 8; vel ad 9 aut 10 dimenſiones, atq; ita porrò in infinitum; ipſaq; non niſi per curvam ſecundi, aut tertii, aut ſuperioris deniq; generis, inveniri poteſt.

Ex quibus perſpicuum eſt, quòd, etiamſi lineæ curvæ omnes, quæ motu aliquo ordinato deſcribi poſſunt, in Geometriam ſint recipiendæ, non ideo tamen indifferenter primâ, quæ fortè occurrat, ad conſtructionem cujuſq; Problematis uti liceat; ſed eligendam eſſe ſemper ſimpliciſſimam, per quam poſſibile ſit illud ipſum reſolvere. Atq; pro ſimpliciſſimis non habendas eſſe illas, quæ facillimè omnium deſcribi poſſunt, ſive quæ Problematis conſtructionem aut demonſtrationem faciliorem reddunt; ſed præſertim illas, quæ ſimpliciſſimi ſunt generis, & ad quæſitam lineam determinandam inſervire queunt. Ita ut, ſi peccatum ſit in Geometria (quemadmodum ſupra diximus) Problema aliquod propoſitum conſtruere per genus Linearum curvarum, magis compoſitum, quàm natura ejus permittit; contra quoq; pro vitio habendum ſit, ſi quis inutiliter deſudet ad illud ipſum, per genus aliquod linearum ſimplicius, quàm natura ejus admittit, conſtruendum.

Quapropter ut utrumq; vitium evitari, ac unumquodq; Problema ex proprio ſuo linearum genere ſolvi poſſit, poſtquam tam Problematis quàm ipſius curvæ cognitionem ab æquationum cognitione dependere eſt oſtenſum; hinc ad explicandam æquationum naturam progreditur, docens, unamquamque tot admittere poſſe diverſas radices ſive differentes valores quantitatis incognitæ, quot ipſa habet dimenſiones; earumq; interdum quaſdam eſſe, quæ falſæ exiſtunt vel nihilo ſunt minores; interdum etiam, quæ planè imaginariæ; ſicut etiam quâ ratione ipſæ æquationes producantur ex ſuis radicibus in ſe invicem ductis, ita ut per illas rurſus ſint diviſibiles. Quas diviſiones ſubinde utiles oſtendit ad explorandum utrum certæ quædam quantitates ſint æquationis radices nec ne, tum etiam ad ipſas indagandas, ac denique ad æquationem ad pauciores dimenſiones reducendam. Deinde, poſtquam oſtendit quot veræ & quot falſæ radices in unaquaque æquatione haberi poſſint, ſicut etiam quo pacto falſæ reddantur veræ, & veræ falſæ, docet, quo pacto quælibet æquatio tranſmutari poſſit in aliam, ita ut radices ejus ſint certâ quâdam quantitate majores vel minores, quàm radices prioris; & quidem quoties id fit, ut quædam ex illis ſint veræ, quædam verò falſæ, quòd tum augendo veras, falſæ tantundem diminuantur, & contra. Quibus explicatis, tradit, quâ ratione, ad abbreviandam terminorum multitudinem, ſecundus terminus in qualibet æquatione ope prædictæ tranſmutationis tolli poſſit; ita ut in Quadratis æquationibus affectiones ſub latere, in Cubicis ſub quadrato, in Quadrato-quadratis ſub cubo, &c. evaneſcant. Poſt hac, quando quædam ex radicibus veræ ſunt, quædam verò falſæ, (id quod ex ſignorum ſerie manifeſtum fit) declarat, facile eſſe ejuſdem tranſmutationis beneficio efficere, ut radices omnes evadant

vera

veræ. Porrò, quemadmodum æquationes Cubicæ atque Quadrato-quadratæ omnes per eandem curvam lineam ſolvi poſſunt, utpote per aliquam trium Coni ſectionum; & rurſus Surdeſolidæ atque Quadrato-cubicæ omnes per aliam curvam, quæ uno gradu magis eſt compoſita quàm ſectiones Conicæ, atque ſic ulteriùs; ſic ut binæ priores juxta eandem regulam conſtrui queant, ſicut etiam binæ poſteriores per aliam regulam: Attamen cum in his altioribus æquationibus ob multitudinem terminorum & variationem ſignorum + & — plurimæ inde (ut diximus) naſcantur formulæ, regulaq; illa valde foret difficilis ac longa: docet quo pacto æquationes illas attollere liceat, hoc eſt, Surdeſolidas reducere ad Quadrato-cubicas, atque ſimul efficere, ut, ſi quæ terminorum loca in illis deſint, ipſa repleta exiſtant, ut tandem, ſi quædam ex radicibus falſæ, quædam autem veræ ſint, ipſæ æquationes tranſmutari poſſint in alias, ubi radices omnes ſint veræ, ipſæq; ſecundùm eandem conſtructionis regulam inveniri poſſint. Præterea, quoniam æquationes frequenter fractionibus & ſurdis numeris involutæ occurrunt, aut ipſæ etiam prolixos numeros continent; quo fit, ut aut minùs expeditè reſolvantur feliciterq; explicentur, aut ut non niſi operoſiorem in reſolvendo induſtriam requirant: docet deinceps, quo pacto ad evitandas fractiones illas atque ſurdos numeros, ſicut etiam ad tranſmutandos vaſtos illos numeros in faciliores, radices earum multiplicari aut dividi poſſint per quantitatem aliquam cognitam ſive numerum. Id quod inſervire inſuper poteſt ad inveniendas radices proximas veris, alioquin irrationales; quemadmodum etiam ad reddendam quantitatem cognitam alicujus termini in æquatione æqualem cuidam alteri datæ. Cæterùm ne quid deſit, quod ad intelligendas radices alicujus æquationis requiratur, oſtendit ipſas interdum ſive veras ſive falſas ſoluminodo imaginarias eſſe. Ita ut, licet ſemper in qualibet æquatione tot taleſq;, quales ſupra diximus, imaginari liceat, nonnunquam tamen nullam reperiamus quantitatem, quæ aliquibus ex ipſis reſpondeat.

Poſtquam igitur ea, quæ ad æquationum recognitionem atque emendationem pertinent, expoſita ſunt, & quidem ex æquationum cognitione (ut ſupra admonuimus) dependeat quoque Problematum cognitio, ac prout æquatio eſt vel Quadrata, vel Cubica aut Quadrato-quadrata, vel Surdeſolida aut Quadrato-cubica, vel plurium denique dimenſionum, Problema, quod ad ipſam reducitur, dicatur vel Planum, vel Solidum, &c. illudq; exinde conſtrui queat vel per rectas lineas & Circulos, vel per Sectiones Conicas, vel per lineam curvam uno vel pluribus gradibus magis compoſitam: Hinc, priuſquam ad æquationum reſolutionem accedit, ac Problema propoſitum ex proprio ſuo Linearum genere ſolvit, tradit, quo pacto poſt tranſ-

Digitized by Google

tranſmutationes requiſitas, quando Problema eſt Planum & æquatio ad Cubum aut Quadrato-quadratum aſcendit, ipſa dividi atque reduci poſſit ad Quadratum, ita ut deinde regulæ ac circini beneficio, ſicut primo libro monſtratum fuit, reſolvi queat; ac denique quid in genere obſervandum ſit circa reliquas ſuperiores æquationes. Ita ut poſt inſtitutas illas diviſiones, quando æquatio ad tres quatuorvé dimenſiones aſſurgit ipſaq; ampliùs dividi nequit, aſſerere liceat, Problema, quod ad æquationem illam perductum fuit, Solidum exiſtere, nec inde minus vitium reputandum eſſe, illud per rectas lineas & circulares expedire velle, quàm adhibere Conicas ſectiones in conſtructionem eorum, quæ per regulam & circinum ſolvi poſſunt.

Quibus explicatis, accingit ſe deinceps ad Solidorum Problematum conſtructionem, poſtquam reducta ſunt ad æquationem trium aut quatuor dimenſionum, & in æquatione ſecundus terminus eſt ſublatus. Eáq; ita præparatâ, docet, unicâ regulâ ope Parabolæ facilè ac expeditè poſſe conſtrui. In quo ſanè eximium atque ſummi ejus ingenii artificium elucet, à nullo (quod ſciam) ante vel excogitatum vel oſtenſum. Cæterum ut hujus regulæ facilitas ac uſus in Solidorum Problematum conſtructionibus eniteat, ipſam deinde, in ſolvendis nobiliſſimis binis illis, ac celebratis, nec non antiquitùs uſque adeò agitatis Problematis; altero ſcilicet de duabus mediis proportionalibus inter duas datas inveniendis; altero autem de dividendo angulo in tres æquales partes, adhibet. Quæ breviùs expeditiùsq;, quàm ab aliquo hactenus oſtenſum eſt, ſolius Circuli & Parabolæ ope, ſcientificè atque Geometricâ ratione reſolvit. Ubi tandem declarat (quod animadverſione dignum): in Problematibus Solidis omnibus, poſtquam ad æquationem trium quatuórve dimenſionum reducta ſunt, non ſecus hanc regulam ad explicandas earum radices requiri, quàm quatenus ipſa adhibenda eſt ad inveniendas duas medias proportionales inter duas datas lineas; aut ad ſecandum datum angulum in tres æquales partes. Quandoquidem natura illarum non ſinit, ut terminis ſimplicioribus, quàm per certa quædam Cuborum latera, quorum contentum cognoſcitur, aut per ſubtenſas quorundam arcuum, quorum triplum datum eſt, exprimantur; neque etiam per conſtructionem aliquam, quæ ſimul generalior & ſimplicior ſit, determinentur.

Finitâ verò Solidorum Problematum conſtructione, aggreditur demum Surdeſolidorum conſtructionem, hoc eſt, eorum quæ ad æquationem 5 aut 6 dimenſionum reducuntur, & ad quarum conſtructionem curva linea adhibenda eſt, quæ uno gradu magis eſt compoſita quàm ſectiones Conicæ.

Quam

Quam ut breviter ac unius regulæ beneficio reſolvere doceat, obſervari vult ea, quæ ſupra monuimus, nimirum ut æquationes quinque dimenſionum attollantur ad ſex dimenſiones, ipſæq; demum, ſi opùs eſt, tranſmutentur in alias, quarum radices omnes ſint veræ. Qualem autem & quantum in hiſce Problematis conſtruendis Geometram ſe prodiderit Auctor, ſanè ſi id ipſum ex ſuperioribus perſpicere cuipiam non contigerit, illud demum vel ex hac ſola artificioſiſſima atque planè ſtupenda eorum conſtructione Geometrica, antea ne cogitata quidem, nedum inventa, latère ipſum non poteſt. E quibus tandem colligere licet, quòd, poſtquam omnia Geometriæ Problemata ad unum quaſi Problema revocata fuerint, quod eſt, ut quæratur tantummodo longitudo quarundam linearum rectarum, quæ alicujus æquationis ſint radices, reductiſque ad eandem conſtructionem, quæ ejuſdem generis exiſtunt, tradita ſimul ſit via eadem reſolvendi. Adeò ut nullum Problema tam difficile vel arduum, modò æquationem 5 aut 6 dimenſionum non excedat, reperiri queat, quòd hujus Geometriæ Methodo ſolvi ſeu conſtrui non poſſit.

COMMENTARII

IN

LIBRUM TERTIUM.

VERùM *ſæpe accidit, quòd quædam harum radicum ſint falſæ, ſeu minores quàm nihil: ut, ſi ſupponatur x deſignare quoque defectum alicujus quantitatis, puta 5.*] hoc eſt, quòd x æquetur -5, vel $x + 5$ ſit æquale 0. Quod non ineptè explicatur per eum, qui plus debet quàm eſt ſolvendo; vel, cùm id, quod reliquatur, deſignamus per —. Quò referenda eſt jucunda atque ingenioſa quæſtio, à laudatiſſimæ memoriæ, Mauritio, Principe Auriaco, atque Confœderati Belgii gubernatore, olim excogitata, quam Ampliſſimus & Prudentiſſimus Vir D. Henricus Stevinus, Simonis filius, A

Digitized by Google

Dominus in Alphen, paternarum virtutum hæres unicus, ex pluribus monumentis, ad vitam communem utiliſſimis, & publicâ luce digniſſimis, quæ inter adverſaria parentis poſſidet, pro ſua liberalitate mihi communicavit.

A & B, ſocietatem ineuntes, lucrati ſunt 12 aureos; quorum A expendit aureos 5; B autem debet aureos 2, hoc eſt, habet — 2 aureos. Quæritur quantum utrique ex ſumma debeatur? Reſpondetur, ſolvendos eſſe à B ipſi A, 8 aureos, quamvis lucrum hîc eſſe ſit manifeſtum.

Aliud exemplum de damno.

Perſonæ duæ A & B jacturam faciunt 12 aureorum, hoc eſt, habent — 12 aureos. Cùm igitur A contribuit 5 aur., & B — 2 aur., manifeſtum fit, ipſi A ex natura quæſtionis deberi — 20 aureos, & ipſi B + 8 aur., hoc eſt, B habebit 8 aureos, etiamſi jacturam factam eſſe conſtet.

Quamvis autem non ſit uſitatum, ut qui aliquid habet in bonis ſocietatem ineat cum eo, qui minus habet quàm nihil; tamen caſus occurrere poſſunt, in quibus hoc contingit. Exempli gratiâ: Duo mercatores Amſtelodami habitantes habent quiſque inſtitorem ſuum Venetiis, & quia inſtitoribus iſtis non ſatis fidunt, ſciuntque inter ipſos eſſe inimicitias, mandant illis per literas, ut ſibi invicem rationem reddant omnis pecuniæ, ad dominos ſuos pertinentis, quam penes ſe habebunt eo tempore, quo literas iſtas accipient; atque ſi unus fortè aliquid debeat, ut hoc ex alterius pecunia ſolvatur, & cum reſiduo ita mercaturam faciant, ut unus nihil emat vel vendat, niſi cum alterius conſenſu. Ipſi autem mercatores qui certò non ſciunt, quid Venetiis eo tempore ſint habituri, quo literæ iſtæ eò pervenient, talem inter ſe ſocietatem ineunt, ut quiſque lucrum aut damnum pro ratione pecuniæ, quam tunc habuerit, ſit accepturus. Quibus poſitis, ſi contingat unum habere 5000 aureos, alium verò debere 2000 aureos, his 2000 ex alterius pecunia perſolutis, tria tantùm aureorum millia pro mercibus emendis remanebunt; ex quibus ſi lucrum fiat duodecim millium aureorum, quod eſt quadruplum pecuniæ: ſequitur ex vi ſocietatis illum qui habuit 5 millia, debere 20 millia lucrari,

&

& alium 8 millia amittere. Contra verò ſi damnum ſit 12 millium, qui habuit 5 millia debet amittere 20 millia, quadruplum nempe ſuæ pecuniæ; alius autem 8 millia lucrari debet, propterea quòd à priori ſumpſerit 2 millia, quæ ſi emendis mercibus impenſa fuiſſent, damnum 8 millium ei attuliſſent.

Porrò radices hæ falſæ non inconvenienter in Geometria explicantur retrogrediendo, hoc eſt, ut, quæ deſignantur per —, retrocedant, ſicut illæ, quæ denotantur per +, progrediuntur. Cujus rei exemplum poſt videbitur.

Inſervit autem earum cognitio ad inveniendas veras radices, quippe, falſis cognitis, æquationes facilè diviſionis ope ad pauciores dimenſiones reducuntur, ex iiſque veræ eruuntur. Cujus rei exemplum in ſequentibus habebitur.

Accedit & hoc, quòd, poſtquam tam falſæ quàm veræ radices alicujus æquationis fuerint inventæ, earum beneficio ad plenam totius quæſtionis cognitionem atque ſolutionem perducamur, & caſus nonnullos detegamus, de quibus nobis antea nihil certi conſtabat. Cujus rei exemplum ſequentia itidem ſuppeditabunt.

Unde liquidò conſtat, quòd Æquationis ſumma, quæ plures B
radices continet, dividi ſemper poſſit per binomium, quod compoſitum eſt ex quantitate incognita, minus valore alicujus ex veris radicibus, quæcunque illa tandem ſit, aut plus valore alicujus ex falſis.] Hoc enim ex Æquationis, quæ plures radices admittit, conſtitutione manifeſtum eſt: cum æquatio quævis producatur ex ſuis radicibus, in ſe invicem ductis. Quemadmodum ab Authore fuit explicatum. Unde fit, ut rurſus per illas dividi poſſit, cum id, quod multiplicatione componitur, rurſus diviſione reſolvatur.

Sic ſi ponatur $x \infty a$, hoc eſt, $x - a \infty 0$, & rurſus $x \infty b$, hoc eſt, $x - b \infty 0$, & denique $x \infty c$, hoc eſt, $x - c \infty 0$, atque multiplicemus $x - a \infty 0$ per $x - b \infty 0$, & rurſus productum per $x - c \infty 0$; exurget Æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 & -a\,xx & +ab\,x & -abc \infty 0. \\ & -b & +bc & \\ & -c & +ac & \end{array}$$

Quæ dividi poteſt per $x - a \infty 0$, per $x - b \infty 0$, & per $x - c \infty 0$; ſed non per x plus vel minus ullâ aliâ quantitate. Si autem eadem æquatio rurſus multiplicetur per $x + d \infty 0$, (ſupponendo x deſig-

 nare

nare quoque defectum alicujus quantitatis, utpote d, hoc eſt, x æquari $-d$) producetur Æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -a\,x^3 & +abxx & -abcx & -abcd \infty 0. \\ & -b & +bc & +abd & \\ & -c & +ac & +bcd & \\ & +d & -ad & +acd & \\ & & -bd & & \\ & & -cd & & \end{array}$$

Quæ dividi poteſt per $x - a \infty 0$, per $x - b \infty 0$, per $x - c \infty 0$, & per $x + d \infty 0$, & non per x plus vel minus ullâ aliâ quantitate.

C *Cujus diviſionis ope dimenſiones ejus in tantum diminuuntur.*] Sic dividendo æquationem præcedentem, quatuor dimenſiones habentem, per $x + d \infty 0$, orietur Æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 & -axx & +abx & -abc \infty 0. \\ & -b & +bc & \\ & -c & +ac & \end{array}$$

In quâ incognita quantitas tres duntaxat dimenſiones habet. Quâ rurſus diviſâ per $x - c \infty 0$, prodibit $xx \begin{array}{l} -a \\ -b \end{array} x + ab \infty 0$, æquatio duarum dimenſionum. Quæ denuo per $x - b \infty 0$ diviſa exhibet $x - a \infty 0$, æquationem ſimplicem.

Unde perſpicere licet, quâ ratione, in qualibet Æquatione, plures radices habente, quantitas cognita ſecundi termini, æqualis ſit ſummæ omnium radicum; & quantitas cognita tertii termini, æqualis ſummæ productorum ex ſingulis binis; & quantitas cognita quarti termini, æqualis ſummæ productorum ex ſingulis ternis, atque ita porrò; at verò quantitas cognita ultimi termini ſive ipſe ultimus terminus, æqualis producto ex omnibus.

Sic cum in æquatione $x^3 - 9xx + 26x - 24 \infty 0$ tres ſint radices 2, 3, & 4, quæ deſignantur per a, b, & c: erit earum ſumma 9, quæ denotatur per $-a-b-c$, æqualis -9, quantitati cognitæ ſecundi termini $-9xx$. Summa autem productorum ex ſingulis binis 26, quæ denotatur per $+ab+bc+ac$, æqualis $+26$, quantitati cognitæ tertii termini $+26x$. Et productum ex ipſis tribus, 24, quod denotatur per $-abc$, æqualis -24, quantitati cognitæ ultimi termini, ſive ipſi ultimo termino.

Eodem modo, ſi fuerit Æquatio talis: $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \infty 0$, cujus radices ſunt 2, 3, 4, & -5, atque deſignantur per $+a$, $+b$, $+c$, & $-d$: diſponatur ipſa, ut termini,

ni, in quibus incognita quantitas x pares dimenſiones habet, unam conſtituant æquationis partem, & reliqui alteram, hoc modo: $x^4 - 19xx - 120 \infty 4x^3 - 106\,x$. Eodem videlicet quo hæc:

$$x^4 \begin{matrix} +ab \\ +bc \\ +ac \\ -ad \\ -bd \\ -cd \end{matrix} xx - abcd \infty \begin{matrix} +a \\ +b \\ +c \\ -d \end{matrix} x^3 \begin{matrix} +abc \\ -abd \\ -bcd \\ -acd \end{matrix} x.$$

Præſtat enim illam hîc ita conſiderare, ut ea, quæ proponuntur, meliùs explicentur: quoniam hoc pacto radices, earumque producta ſimul addita omnino cum quantitatibus cognitis terminorum æquationis, eorumque ſignis conveniunt. Et manifeſtum eſt, ſummam harum radicum efficere $+ 4$, & æqualem eſſe $+ 4$, quantitati cognitæ ſecundi termini $4\,x^3$. Deinde ſummam productorum ex ſingulis binis efficere $- 19$, & æqualem eſſe $- 19$, quantitati cognitæ tertii termini $19\,xx$. Poſtea ſummam productorum ex ſingulis ternis efficere $- 106$, & æqualem eſſe $- 106$, quantitati cognitæ quarti termini $106\,x$. Denique productum ex ipſis omnibus in ſe invicem ductis efficere $- 120$, & æqualem eſſe $- 120$, quantitati cognitæ ultimi termini, ſive ipſi ultimo termino 120. Quæ porrò, quo pacto intelligenda ſint de Æquationibus, in quibus non omnes termini extant, docebit appendix de Cubicarum Æquationum reſolutione, quam hiſce Commentariis ſubjunximus, ubi iſta fuſiùs pertractantur.

Ex quibus etiam cognoſcitur, quot veræ & quot falſæ radices in unaquaque Æquatione haberi poſſint. Nimirum, tot in ea veras haberi poſſe, quot variationes reperiuntur ſignorum + & —; & tot falſas, quot vicibus ibidem deprehenduntur duo ſigna +, vel duo ſigna —, quæ ſe invicem ſequuntur.] D

Notandum, hæc concernere æquationes, quæ producuntur ex ſuis radicibus, in ſe invicem ductis, quemadmodum pag. 69 & 70 eſt oſtenſum, quod & de cæteris regulis, ubi ſignorum + & — fit mentio, eſt obſervandum. Ut ſatis declarant priora verba: *Ex quibus etiam cognoſcitur.* quæ horum verborum cum prioribus cohærentiam demonſtrant: cum aliàs fieri poſſet, ut in qualibet Æquatione non tot radices haberentur, quot incognita quantitas habet

Digitized by Google

dimenſiones; neque tot veræ, quot in ea reperiuntur variationes ſignorum + & —; aut tot falſæ, quot vicibus deprehenduntur duo ſigna + vel duo ſigna —, quæ ſe invicem ſequantur.

Ut in æquatione $x^3 - 6xx + 13x - 10 \infty 0$, quæ non producitur ex multiplicatione trium radicum, ut fit pag. 69 & 70, ſed tantùm ex multiplicatione æquationis impoſſibilis $xx - 4x + 5 \infty 0$ per $x - 2 \infty 0$. Unde fit, quòd, licèt in æquatione propoſita tres concipiantur veræ radices, tamen una tantùm ex illis ſit realis, nimirum 2, & reliquæ duæ non niſi imaginariæ, quarum valor nullo modo comprehendi poteſt.

Quæ autem dicta ſunt de æquationibus, quæ ex radicibus ſuis in ſe invicem ductis procreantur, non tantùm referenda ſunt ad æquationes completas, hoc eſt, in quibus omnes termini extant, ut in exemplo ab Authore allato; ſed etiam de incompletis, ubi unus vel plures termini deſunt.

Ut ſi habeatur $z^3 \infty * - pz + q$, & ſcire velim, poſtquam multiplicatione productam ſuppoſuerim, quot admittat veras radices, & quot falſas; ſcribo z^3 8 $0zz + pz - q \infty 0$. Deinde ſupponendo $0zz$ eſſe primò ſigno + adfectum (perinde enim eſt, ſive illum ſigno + ſive ſigno — adfectum concipias): invenio, propter terminos $+z^3$ & $+0zz$, eodem ſigno affectos, ſtatuendam eſſe unam falſam radicem: ſimiliter, propter terminos $+0zz$ & $+pz$, eodem rurſus ſigno adfectos, ſtatuendam eſſe alteram falſam: ac denique, propter terminos $+px$ & $-q$, diverſis ſignis notatos, ponendam eſſe unam veram radicem. Poſtea, ſupponendo ſecundum terminum ſigno — adfici: erit, propter terminos $+z^3$ & $-0zz$, diverſis ſignis notatos, una vera radix: &, propter terminos $-0zz$ & $+pz$, qui diverſa poſſident ſigna, altera vera: ac denique, propter terminos $+pz$ & $-q$, etiam diverſis ſignis deſignatos, tertia radix vera. Adeò ut ex prima ſuppoſitione eliciam duas falſas & unam veram, at ex ſecunda tres veras. Quas ſic deſigno: Verùm, quoniam, ſupponendo ſecundum terminum affe-
1. 2. ctum eſſe ſigno ſive + ſive —, certò ſcimus, nihil in
f v propoſita æquatione mutari: ideo, ut hæc regula mul-
f v tiplicationem, quâ æquatio allata producta fuerit,
v —— v nos edoceat: radices illas inter ſe confero. Unde, cum deprehendam duas tantùm eſſe, quæ conſentiunt, eaſque veras; reliquas autem, quomodocunque collatio inſtituatur, ne-

Digitized by Google

quaquam conſonare: concludo æquationem propoſitam explicabilem tantùm eſſe de unica radice vera, & reliquas duas non niſi imaginarias exiſtere; neque ipſam æquationem magis ex multiplicatione trium radicum productam eſſe, quàm ſuperiorem $x^3 - 6xx + 13x - 10 \propto 0$.

Eodem modo, ſi habeatur $z^3 \propto * - pz - q$, ſeu z^3 8 $0zz + pz + q \propto 0$: invenio è priori ſuppoſitione tres falſas radices; è poſteriori verò duas veras & unam falſam. Quibus inter ſe col-

1.   2. latis, ut conſenſus earum appareat, invenio, æquatio-
f   v nem propoſitam unam tantùm admittere radicem,
f   v nempe falſam; duaſque reliquas eſſe imaginarias: ac
f ——— f proinde æquationem non poſſe procreari multiplicatione trium radicum.

Similiter, ſi fuerit $z^3 \propto * + pz + q$, ſeu z^3 8 $0zz - pz - q \propto 0$; quoniam è priori ſuppoſitione invenio duas falſas & unam veram

1.   2. radicem; & è poſteriori duas itidem falſas & unam
f ⨯ v veram: cognoſco, æquationem propoſitam, multi-
v ⨯ f plicatione trium radicum, quarum duæ ſunt falſæ &
f ——— f una vera, produci poſſe.

Non ſecus, ſi habeatur $z^3 \propto * + pz - q$ ſeu z^3 8 $0zz - pz + q \propto 0$; video in priori ſuppoſitione reperiri duas veras radices,

1.   2. cum una falſa, atque in poſteriori ſimiliter duas ve-
f ⨯ v ras, & unam falſam: adeò ut concedendum ſit, ipſam
v ⨯ f procreari poſſe ex multiplicatione trium radicum,
v ——— v quarum duæ ſunt veræ, & tertia falſa. Idem de aliis ſentiendum. Ubi notandum, radices veras & falſas alicujus æquationis ſemper eſſe reales, ſeu exiſtentes, hoc eſt, quantitatem aliquam aut defectum quantitatis deſignantes, quarum valor Arithmeticè vel Geometricè exprimi poteſt; imaginarias verò non item. Ut in æquatione $xx - 4x + 5 \propto 0$. Quamvis enim in ea duas nobis imaginari poſſimus radices; tamen nulla iis reſpondet quantitas; nec, quocunque tandem modo vel augeantur, vel diminuantur, aliæ quàm imaginariæ fieri poſſunt. Quod ſanè nemini mirum videbitur, modò ex iis, quæ pag. 165 explicuimus, intellexerit, æquationem propoſitam eſſe impoſſibilem; neque ullam veram nec falſam radicem admittere, adeoque nec quantitatem aliquam, quæ ipſis reſpondeat, inveniri poſſe. Niſi velis, radices ejus eſſe $x \propto 2 + \sqrt{-1}$, & $x \propto 2 - \sqrt{-1}$, quarum certè valor

Digitized by Google

valor nullo modo comprehendi poteſt. Non magis quàm ſi illarum quantitatem Geometricè invenire velimus. Quandoquidem in figura p. 7, deſcribendo ex centro N, intervallo lineæ NL ∞ 2, (utpote æqualis ſemiſſi ipſius 4, quantitatis cognitæ ſecundi termini) circulum LQR, faciendoque rectam LM ∞ $\sqrt{5}$ (utpote æqualem radici quadratæ ultimi termini 5), circulus deſcriptus LQR neutiquam ſecare aut tangere poteſt rectam MR, quæ ipſi LM ducitur perpendicularis, ad duas in ea radices deſignandas.

Idem de altioribus æquationibus eſt intelligendum pag. 85, 86, & 87, cùm Circulus centro E deſcriptus Parabolam FAG ſecare aut tangere nequit; ut & pag. 99, cùm Circulus CNQ curvam ACN neutiquam vel tangit vel ſecat.

E *Nimirum mutando ſigna omnia + & —, quæ in 2do, 4to, 6to, aliisve locis reperiuntur, qui per numeros pares deſignantur; reliquis 1mi, 3tii, 5ti, ſimiliumq́. locorum, qui per impares numeros deſignantur, non mutatis.*] Quæ locum quoque habent in æquationibus incompletis, ubi quidam ex imparibus locis deſunt, qui cyphrâ ſunt ſupplendi. Ut ſi fuerit $x^3 \infty * - 8x - 24$ ſeu x^3 8 $0xx + 8x + 24 \infty 0$, mutando ſigna + & — ſecundi & quarti loci in contraria, fit æquatio x^3 8 $0xx + 8x - 24 \infty 0$, ſeu $x^3 \infty * - 8x + 24$, cujus radix eſt $x \infty 2$, unde radix prioris fit $x \infty -2$.

Eodem modo ſi ſit $x^3 \infty * 1201x + 14400$, ſeu x^3 8 $0xx - 1201x - 14400 \infty 0$, mutatis ſignis 2di & 4ti loci, fiet æquatio x^3 8 $0xx - 1201x + 14400 \infty 0$, ſeu $x^3 \infty * 1201x - 14400$, cujus radices ſunt $x \infty 25$, & $x \infty \sqrt{732\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$, nec non $x \infty -\sqrt{732\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$. Unde radices prioris erunt $x \infty -25$, & $x \infty 12\frac{1}{2} - \sqrt{732\frac{1}{4}}$, nec non $x \infty 12\frac{1}{2} + \sqrt{732\frac{1}{4}}$. Et ſic de aliis.

F *Unde ſi ſcribamus ſummam præcedentem, ſubſtituendo ubique y pro x, invenietur*

$$
\begin{array}{rrrrr}
y^4 - 12y^3 & + 54yy & - 108y & + 81 \\
+ 4y^3 & - 36yy & + 108y & - 108 \\
& - 19yy & + 114y & - 171 \\
& & - 106y & + 318 \\
& & & - 120 \\
\hline
\end{array}
$$

$y^4 - 8y^3 - 1yy + 8y \quad * \quad \infty 0$, vel $y^3 - 8yy - 1y + 8 \infty 0$. *Ubi vera radix, quæ erat 5, jam eſt 8, propter ternarium*

narium ipſi additum.] Notandum hic eſt, quòd, dum, augendo ternario veram radicem æquationis propoſitæ $x^4 + 4x^3 - 19xx - 106x - 120 \propto 0$, in æquationem incidimus, tres tantùm dimenſiones habentem, cujus ideo non niſi tres ſunt radices, numerus 3, quo vera radix æquationis propoſitæ eſt aucta, ſit æqualis alicui ex falſis radicibus, ut liquet ex iis, quæ ab Authore p. 72 paulò poſt explicantur. Ita, quoniam, diminuendo ternario veras radices æquationis $x^4 - 4x^3 - 19xx + 106x - 120 \propto 0$, incidimus in æquationem $y^4 + 8y^3 - 1yy - 8y * \propto 0$, vel $y^3 + 8yy - 1y - 8 \propto 0$, innoteſcit, unam ex veris radicibus eſſe 3. Et ſic de aliis.

Nimirum, diminuendo veras radices, quantitate cognitâ ſecundi termini diviſâ per numerum dimenſionum primi, ſi unus ex hiſce duobus terminis notatus fuerit ſigno + & alter ſigno —.] Vel etiam hoc modo: *Nimirum, diminuendo quantitatem cognitam ſecundi termini diviſam per numerum dimenſionum primi, unaquâque verarum radicum, ſi unus ex hiſce duobus terminis notatus fuerit ſigno + & alter ſigno —.* Ut ad tollendum ſecundum terminum Æquationis $x^4 - 2ax^3 \begin{matrix} +2aa \\ -cc \end{matrix} xx - 2a^3x + a^4 \propto 0$, divido $2a$ per 4, & provenit $\frac{1}{2}a$: unde faciendo $\frac{1}{2}a - x \propto z$, hoc eſt, $\frac{1}{2}a - z \propto x$, ſcribendum eſt

$$\begin{array}{ll}
+\frac{1}{16}a^4 - \frac{1}{2}a^3z + \frac{3}{2}aazz - 2az^3 + z^4 & \text{pro } x^4 \\
\&\ -\frac{1}{4}a^4 + \frac{3}{2}a^3z - 3aazz + 2az^3 & \text{pro } -2ax^3 \\
\&\ +\frac{1}{2}a^4 - 2a^3z + 2aazz & \text{pro } +2aaxx \\
\&\ -\frac{1}{4}aacc + accz - cczz & \text{pro } -ccxx \\
\&\ -a^4 + 2a^3z & \text{pro } -2a^3x \\
\text{tum} + a^4 & ,\ \&\ \text{exſurget} \\
\hline
\begin{matrix} +\frac{5}{16}a^4 + a^3z + \frac{1}{2}aazz \\ -\frac{1}{4}aacc + acc - cc \end{matrix} \quad * \quad + z^4 \propto 0, & \text{æquatio,}
\end{array}$$

ſecundo carens termino, & ab illa Autoris differens tantùm in quarto termino, qui hìc per + denotatur, & illic per —. Unde fit, ut per ea, quæ pag. 70 ſunt oſtenſa, æquationes hæ in eo tantùm inter ſe differant, quòd falſæ illius æquales ſint veris hujus, & contra, atque ita radicum mutua ſit reciprocatio. Quod in aliis quoque evenire reperietur.

Ubi porrò operæ pretium eſt conſiderare, quòd, tollendo ſecundum

Digitized by Google

cundum terminum Æquationis $x^4 + 2ax^3 \begin{smallmatrix} +2aa \\ -cc \end{smallmatrix} xx - 2aax - aacc \infty 0$, (quæ quidem invenitur, cùm pro linea CE in quæſtione pagin. 83 ponitur x) in eandem incidamus Æquationem, quam invenimus tollendo ſecundum terminum præcedentis $x^4 - 2ax^3 \begin{smallmatrix} +2aa \\ -cc \end{smallmatrix} xx - 2a^3x + a^4 \infty 0$, quæ ab illa omnino eſt diverſa, reſultans ex inveſtigatione lineæ DF.

Deinde animadverſione dignum eſt, quòd hâc ſublatione ſecundi termini Æquationes pagin. 6 & 7 in faciliores ſic transmutentur, ut earum radices ſtatim ſe prodant, nec aliâ regulâ ad eas inveniendas opùs eſſe videatur. Etenim, tollendo ſecundum terminum æquationis $zz \infty az + bb$ ſeu $zz - az - bb \infty 0$, ſi dividatur a per 2, fit $\frac{1}{2}a$, ac ponatur

$z - \frac{1}{2}a \infty x$, ſive $z \infty x + \frac{1}{2}a$,

atque pro zz reponatur $xx + ax + \frac{1}{4}aa$,
nec non pro $-az$ $\qquad -ax - \frac{1}{2}aa$,
& addatur $\qquad - bb$:

reſultabit æquatio hæc $xx * - \frac{1}{4}aa - bb \infty 0$, vel $xx \infty \frac{1}{4}aa + bb$, cujus radix eſt $x \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, vel $x \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Unde ſequitur radicem prioris æquationis $zz \infty az + bb$ fore $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, vel $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{2}aa + bb}$. Quæ radices, cum vera tum falſa etiam inveniuntur tollendo ſecundum terminum, hoc pacto: ponatur

$\frac{1}{2}a - z \infty x$, ſeu $z \infty \frac{1}{2}a - x$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}a - x \\ \hline -\frac{1}{2}ax + xx \\ \frac{1}{4}aa - \frac{1}{2}ax \qquad \\ \hline \end{array}$$

& ſcribatur $\frac{1}{4}aa - ax + xx$ pro zz,
atque $-\frac{1}{2}aa + ax$ $\qquad$ pro $-az$,
tum $-bb$.

Et emerget Æquatio $-\frac{1}{4}aa - bb * + xx \infty 0$, vel $xx \infty \frac{1}{4}aa + bb$. eadem quippe, quæ invenitur, ponendo $z \infty \frac{1}{2}a + x$ (quod ſimiliter in reliquis ſequentibus quadratis Æquationibus locum habet) & fit, ut ſupra, $x \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, vel $x \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$; ac proinde $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, vel $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

Eodem

Eodem modo, quia auferendo ſecundum terminum Æquationis $yy \propto -ay+bb$, ſeu $yy+ay-bb \propto 0$, ponitur $y+\frac{1}{2}a \propto z$, ſive $y \propto z-\frac{1}{2}a$,

atque pro yy ſcribitur $zz-az+\frac{1}{4}aa$,
& pro $+ay$ $+az-\frac{1}{2}aa$,
atque deinde $-bb$:

prodibit æquatio $zz * -\frac{1}{4}aa-bb \propto 0$, vel $zz \propto \frac{1}{4}aa+bb$, cujus radix eſt $z \propto \sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$, vel $z \propto -\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$: hinc radix prioris erit $y \propto \sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}-\frac{1}{2}a$, vel $y \propto -\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}-\frac{1}{2}a$. Quæ quidem falſa & vera radix invenitur quoque, tollendo ſecundum terminum Æquationis hâc ratione: videlicet, ſupponendo y deſignare etiam defectum alicujus quantitatis, quæ major ſit quàm $\frac{1}{2}a$, Exempli causâ, $y \propto -\frac{1}{2}a-z$,

& ſubſtituendo $\frac{1}{4}aa+az+zz$ loco yy,
& $-\frac{1}{2}aa-az$ loco $+ay$,
tum $-bb$:

unde fit Æquatio $-\frac{1}{4}aa-bb * +zz \propto 0$, vel $zz \propto \frac{1}{4}aa+bb$, cujus radix eſt $z \propto \sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$, vel $z \propto -\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$; atque adeò $y \propto -\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$, vel $y \propto -\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+bb}$, ut ante. Quem modum, tollendi ſecundum terminum, tanquam diverſum ab eo, qui ab Authore pag. 73 eſt oſtenſus, notare potes, cùm primus & ſecundus terminus eodem ſigno $+$ vel $-$ ſunt adfecti.

Similiter, cum ad tollendum ſecundum terminum Æquationis $zz \propto az-bb$, vel $zz-az+bb \propto 0$, ponendum ſit

$z-\frac{1}{2}a \propto x$, vel $z \propto x+\frac{1}{2}a$,
& ſcribendum $xx+ax+\frac{1}{4}aa$ pro zz,
& $-ax-\frac{1}{2}aa$ pro $-az$,
& addendum $+bb$:

proveniet Æquatio $xx * -\frac{1}{4}aa+bb \propto 0$, vel $xx \propto \frac{1}{4}aa-bb$, cujus radix eſt $x \propto \sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$, vel $x \propto -\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$. Et ſit radix prioris $z \propto \frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$, vel $z \propto \frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa-bb}$. Quæ radix utraque vera eſt, & alio item modo inveniri poteſt, ſi nimirum ponatur $\frac{1}{2}a-z \propto x$ ſive $z \propto \frac{1}{2}a-x$, & ſubſtituatur

Digitized by Google

$\frac{1}{4}aa - ax + xx$ in locum zz,
& $-\frac{1}{2}aa + ax$ in locum $-az$,
& addatur $+ bb$:

exſurget æquatio $-\frac{1}{4}aa + bb * + xx \infty 0$, vel $xx \infty \frac{1}{4}aa - bb$, cujus radix eſt $x \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel $x \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Et fit prioris radix $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, ut ſupra.

Denique, quoniam tollendo ſecundum terminum Æquationis $zz \infty -az - bb$, vel $zz + az + bb \infty 0$, ponendum eſt $z + \frac{1}{2}a \infty x$ ſive $z \infty x - \frac{1}{2}a$, & ſubrogandum
$xx - ax + \frac{1}{4}aa$ in locum zz,
& $+ax - \frac{1}{2}aa$ in locum $+az$,
atque addendum $+ bb$:

producetur æquatio $xx * - \frac{1}{4}aa + bb \infty 0$, vel $xx \infty \frac{1}{4}aa - bb$, cujus radix eſt $x \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel $x \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Unde radix prioris fit $z \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} - \frac{1}{2}a$, vel $z \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} - \frac{1}{2}a$. Quæ utraque hoc caſu eſt falſa, & hâc etiam viâ inveniri poteſt, nimirum ſupponendo z deſignare quoque defectum alicujus quantitatis, quæ major ſit quàm $\frac{1}{2}a$, utpote ponendo $z \infty -\frac{1}{2}a - y$, & ſubſtituendo
$+\frac{1}{4}aa + ay + yy$ loco zz,
& $-\frac{1}{2}aa - ay$ loco $+az$,
tum addendo $+ bb$,

unde provenit æquatio $-\frac{1}{4}aa + bb * + yy \infty 0$, vel $yy \infty \frac{1}{4}aa - bb$, cujus radix eſt $y \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel $y \infty -\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$; atque adeò $z \infty -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, vel $z \infty -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, ut ante.

Eâdem ratione tolletur ſecundus terminus reliquarum Æquationum quadratarum pag. 6 & 7, quæ ſimiliter hâc operatione eò reducentur, ut ad ipſarum radices inveniendas hæc regula ſufficere videatur.

Intelligo Æquationes, in quibus z^3 æquatur duobus, aut

Verùm enimverò animadvertendum eſt, quòd, ſicut Æquatio quælibet Quadrata compoſita ſublatione ſecundi termini ad aliam reducitur, in qua duo tantùm ſunt termini, ſic nulla Cubica eſſe poſſit, pluribus terminis conſtans, (ex quibus 13 caſus conſici poſ-

Digitized by Google

ci poſſunt) quæ hâc ratione non reducatur ſemper ad aliquam trium ſequentium formularum: *tribus terminis, per +, aut per + & —, ſimul junctis.*

$$z^3 \infty * - pz + q$$
$$z^3 \infty * + pz + q$$
$$z^3 \infty * + pz - q.$$

Idem de Quadrato-quadratis Æquationibus, quæ ex pluribus terminis ſunt compoſitæ, quarumque 42 diverſi modi extare poſſunt, eſt intelligendum. Cum enim per regulam pag. 79 expoſitam ad cubicas reduci queant, quarum radices duas habent dimenſiones & termini omnes ſunt completi, ſic nulla itidem earum eſſe poteſt, quæ hâc ſublatione non reducatur ad aliquam trium prædictarum formularum.

Sic poſtquam Æquatio Quadrato-quadrata 1 *QQ.* + 8 C. — 26 *Q.* — 68 *N.* — 84 ∞ 0 per dictam regulam reducta eſt ad Cubicam $x^6 - 100x^4 + 2900xx - 10000 \infty 0$, in qua omnes termini ſunt completi, tollitur ſecundus terminus, hoc modo: Diviſis 100 per 3, fit $33\frac{1}{3}$. Unde ponendo $xx - 33\frac{1}{3} \infty yy$, ſive $xx \infty yy + 33\frac{1}{3}$, ſcribendum eſt

	$y^6 + 100y^4 + 3333\frac{1}{3}yy + 37037\frac{1}{27}$	pro x^6,
&	$- 100y^4 - 6666\frac{2}{3}yy - 111111\frac{1}{9}$	pro $- 100x^4$,
&	$+ 2900\ yy + 96666\frac{2}{3}$	pro $2900xx$,
tum	$- 10000$:	

fietque æquatio $y^6 * - 433\frac{1}{3}yy + 12592\frac{16}{27} \infty 0$, vel $y^6 \infty * + 433\frac{1}{3}yy - 12592\frac{16}{27}$, tertiæ formulæ. Ubi notandum, dimenſionum numerum primi termini x^6 tantùm pro 3 haberi, cum non ſit x^5, x^3, & x in tota ſumma. Id quod ſimiliter in ſublatione ſecundi termini æquationum Quadratarum, quarum radices duas dimenſiones habent, eſt notandum. Quòd ſi verò ponatur $33\frac{1}{3} - xx \infty yy$, hoc eſt, $xx \infty 33\frac{1}{3} - yy$, prodibit Æquatio $y^6 \infty * + 433\frac{1}{3}yy + 12592\frac{16}{27}$, ſecundæ formulæ, à præcedenti tantùm differens termino quarto, qui ibi ſigno + adficitur, hîc verò ſigno —. Unde fit, quòd hujus æquationis falſæ radices æquales ſint veris illius, & contra.

Ad augendum valorem verarum radicum, & ad faciendum, ut radices omnes veræ evadant, ſciendum eſt, nos uti poſſe exemplo ab Authore propoſito pag. 74: nimirum, $x^6 + nx^5 - 6nnx^4 + 36n^3x^3 - 216n^4xx + 1296n^5x - 7776n^6 \infty 0$, tanquam regulâ ſeu canone, ad quantitatem, quâ veræ radices augendæ H

 ſunt,

ſunt, inveniendam, ſicut annotavit Vir Nobiliſſimus D. Gothofridus ab Haeſtrecht, Mathematum cultor eximius, hujuſque ſcientiæ peritiſſimus. Si enim, exempli cauſâ, propoſitâ ſit Æquatio $x^6 + ax^5 + bx^4 - cx^3 - dxx + ex + f \propto 0$, oportet, neglectis omnibus terminis, in quibus ſigna $+$ & $-$ diverſa ſunt ab iis, quæ in canone reperiuntur, nempe b, c, & f, conſiderare tantùm omnes reliquos, ut a, d, & e. Utpote $+ ax^5$, quia in canone habetur $+ nx^5$; & $- dxx$, quia in canone $- 216n^4xx$; nec non $+ ex$, quia in canone $+ 1296n^5x$. Qui quidem ſeorſim conſiderandi ſunt, & quærenda quantitas n, quæ non ſit minor quàm a, quia in canone habetur n, ubi in data Æquatione eſt a: & cujus quadrato-quadratum non ſit minus quàm $\frac{1}{216}d$, quia in canone habetur $216n^4$, ubi in data Æquatione eſt d: nec non cujus ſurſolidum non ſit minus quàm $\frac{1}{1296}e$, quia in canone habetur $1296n^5$, ubi in data Æquatione eſt e. Quantitate n ſic inventâ, manifeſtè ex ipſa operatione demonſtratur, ſi ponatur $y - 6n \propto x$, inventum iri Æquationem, in quâ nulla radix falſa eſſe poteſt, ut in exemplo Authoris. Quod Autori tam facilè viſum fuit, ut id explicare neglexerit.

I Ad multiplicationem radicum alicujus æquationis addatur ſequens exemplum. Proponatur æquatio $y^6 \propto * + 433\frac{1}{3}yy + 12592\frac{16}{27}$, cujus loco alia invenienda ſit, cujus termini per numeros integros exprimantur. Suppoſito igitur $zz \propto \frac{3}{10}yy$, ſcribatur æquatio, hoc modo:

Et multiplicetur per numeros proportionales $\quad y^6 * 0y^4 - 433\frac{1}{3}yy - 12592\frac{16}{27} \propto 0.$

$\quad 1. \quad \frac{3}{10}. \quad \frac{9}{100}. \quad \frac{27}{1000}.$

fietque Æquatio $\quad z^6 * 0z^4 - 39zz - 340 \propto 0$, vel $z^6 \propto * + 39zz + 340$, cujus radix zz ad præcedentis radicem yy eſt, ut 3 ad 10.

Quæ radicum multiplicatio inſervire etiam poteſt inveniendis radicibus proximè veris, cùm ipſæ ſunt irrationales. Ut, ad inveniendam veram radicem æquationis $y^3 \propto 200y + 400$ (quæ irrationalis eſt) quàm proximè, ita ut differentia milleſimâ parte unitatis minor ſit: ſuppoſito $z \propto 1000y$,

ſcribo $\quad y^3 * 0yy - 200y - 400 \propto 0$,

& multiplico per $\quad 1. \quad 1000. \quad 1000000. \quad 1000000000.$

& exſurget æquatio $z^3 * 0zz - 200000000z - 400000000000 \propto 0$, vel $z^3 * - 200000000z \propto 400000000000$, cujus radix z præcedentis radicis y eſt millecupla. Quocirca eliciendo radicem

ex hac

ex hac æquatione, methodo à Vieta tradita in tractatu de Numeroſa Poteſtatum reſolutione, invenietur z major quàm 15052, & minor quàm 15053. Quibus diviſis per 1000 (quia præcedentis radicem multiplicavimus per 1000), fiet y major quàm $15\frac{52}{1000}$, & minor quàm $15\frac{53}{1000}$. adeò ut differentia inter hanc utramque inventam & veram milleſimâ parte unitatis minor ſit. Quod erat inveniendum. Porrò quoniam æquatio propoſita $y^3 \propto 200\,y + 400$ duas adhuc admittit falſas radices, quæ ſimiliter ſunt irrationales, quia ipſa per $y +$ vel $-$ nullo numero ultimum terminum dividente dividi poteſt, poſſunt eæ eâdem ratione inveniri, mutato tantùm ſigno $+$ in $-$. Quarum equidem major excedet $13\frac{10}{1000}$, & minor deficiet à $2\frac{42}{1000}$, componentes ſimul veram inventam $15\frac{52}{1000}$. Cæterùm, ſicut æquationes ope multiplicationis à fractionibus liberantur, atque ad faciliores reducuntur, ita quoque interdum licet ipſas beneficio diviſionis, quando tam prolixos numeros continent, ut earum reſolutio non niſi operoſiorem induſtriam requirat, in faciliores tranſmutare. Ut ſi fuerit æquatio $x^3 \propto * + 203125\,x + 23437500$, & ejus loco alia deſideretur, quæ minoribus numeris exprimatur, dividenda eſt ipſa per numeros proportionales 1. 125. 15625. 1953125,

hoc pacto: $x^3 \,8\, 0xx - 203125\,x - 23437500 \propto 0,$

1. 125. 15625. 1953125.

& prodibit æquatio $y^3 \,8\, 0yy - 13y - 12 \propto 0$, vel $y^3 \propto * 13y + 12$, cujus radices ſunt $+4$, -3, & -1, quibus per 125 multiplicatis (quoniam prioris radices per 125 diviſimus) exſurgent radices prioris $+500$, -375, & -125.

Ubi porrò notandum, quòd poſtquam æquatio quælibet à fractionibus aut ſurdis numeris eſt liberata, atque in faciliorem tranſmutata, fieri non poſſit, ut ulla ex hujus radicibus, ſive falſis, ſive veris, ſit numerus aliquis fractus. Quemadmodum facilè ex 7mo Elementorum libro demonſtrari poteſt. Adeò ut, ſi illa deinde ſicut pag. 77 eſt oſtenſum dividi nequeat, concedendum ſit, nullam ex radicibus ſive falſis ſive veris numero explicari poſſe, ſed omnes eſſe irrationales.

Quibus ita conſtitutis, ut pateat quo pacto hæ radices ſurdis numeris ſint exprimendæ, viſum fuit ea, quæ ab ingenioſiſſimo Huddenio noſtro circa hæc excogitata ſunt, in medium adducere. Hinc ut inveſtigetur, quo pacto, exempli causâ, radices æquationis

Digitized by Google

tionis $zz - az - bb \propto 0$, quæ per $z +$ vel $- b \propto 0$ dividi nequit; per ſurdas quantitates exprimi poſſint: ſuppono primùm z eſſe æqualem ſimplici alicui quantitati ſurdæ, utpute, $\sqrt{x}$, & fit $z - \sqrt{x} \propto 0$. Quam, ut ad æquationem quadratam ejuſdem formæ perducam, in qua ſecundus terminus eſt rationalis, multiplicare debeo per $z + y + \sqrt{x} \propto 0$. Sed quoniam ſic non producitur æquatio, in qua etiam tertius terminus rationalis eſt, concludo radices æquationis propoſitæ hoc modo non poſſe denotari ſive exprimi. Idem fit ſupponendo $z \propto -\sqrt{x}$.

Quocirca ſtatuendo nunc $z \propto y + \sqrt{x}$ ſeu $z - y - \sqrt{x} \propto 0$, oportet ipſam, ut ad æquationem quadratam aſcendat, in qua rurſus ſecundus terminus ſit rationalis, multiplicare per $z - y + \sqrt{x} \propto 0$, & fit $zz - 2yz + yy - x \propto 0$, æquatio ejuſdem formæ cum allata, & in qua item tertius terminus rationalis eſt. Hinc comparando ſecundum terminum unius cum ſecundo alterius invenio $-2y \propto -a$, hoc eſt, $y \propto \frac{1}{2}a$. Tertius autem terminus cum tertio comparatus dat $yy - x \propto -bb$. In qua ſi in locum yy ſubrogetur $\frac{1}{4}aa$, habebo $\frac{1}{4}aa + bb \propto x$. Ac proinde cum pro quæſitis radicibus ſuppoſuerimus $z \propto y + \sqrt{x}$, & $z \propto y - \sqrt{x}$, erunt ipſæ: $z \propto \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, & $z \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

Eodem modo ſi inveſtigare velimus, quo pacto radices æquationis indiviſibilis $yy + ay - bb \propto 0$ per quantitates ſurdas exprimi queant, ſtatuatur (neglectâ ſuppoſitione ipſius $y \propto 8\sqrt{x}$) $y \propto -z + \sqrt{x}$ ſeu $y + z - \sqrt{x} \propto 0$, eaque, ut ad æquationem quadratam aſſurgat, in qua rurſus ſecundus terminus ſit rationalis, multiplicetur per $y + z + \sqrt{x} \propto 0$, & fit $yy + 2zy + zz - x \propto 0$, æquatio ejuſdem formæ cum allata, & in qua etiam tertius terminus eſt rationalis. Unde comparando ſecundum terminum hujus cum ſecundo illius invenitur $z \propto \frac{1}{2}a$. Tertius autem terminus cum tertio comparatus dat $x \propto \frac{1}{4}aa + bb$. Atque adeò, cum pro quæſitis radicibus ſuppoſuerimus $y \propto -z + \sqrt{x}$, & $y \propto -z - \sqrt{x}$, erunt ipſæ: $y \propto -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$, & $y \propto -\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

Similiter, inveſtigando num radices æquationis $zz - az + bb \propto 0$, quam per $z +$ vel $- b \propto 0$ dividere non licet, per ſurdas quan-

quantitates exprimi queant, invenitur z exprimi poſſe per $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, & per $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$. Eodem modo procedatur in altioribus æquationibus.

E quibus perſpicuum fit, hac ratione inveniri quoque ſimpliciſſimos ſurdos numeros, quibus radices haſce exprimere licet, atque ideo hinc etiam conſtare, quæ circa hæc à Dno des Cartes pag. 95 referuntur, nimirum: quòd natura harum radicum non permittat, ut ſimplicioribus terminis exprimantur.

Ubi tandem etiam eſt advertendum, quòd, quantò partes è quibus hæ radices componuntur pauciores numero exiſtunt, tantò etiam quæſitum faciliùs obtineri poſſit, ac proinde in altioribus æquationibus conducere ſecundum terminum tollere, ita ut deinde, ſi res bene inſpiciatur, perpauci caſus ſuperfuturi ſint.

Supponendum eſt $y \infty x\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$ deinde verò ſcribendum K
$y^3 * - 3aay + \frac{3a3c^3}{b3}\sqrt{3} \infty 0.$] Etenim poſitâ $y \infty x\sqrt{\frac{3aa}{bb}}$ ſive $y \infty \frac{ax}{b}\sqrt{3}$; erit $x \infty \frac{by}{a\sqrt{3}}$, & $xx \infty \frac{bbyy}{3aa}$, & $x^3 \infty \frac{b^3y^3}{3a^3\sqrt{3}}$. Quæ ſi in æquatione ſubſtituantur, habebitur $\frac{b^3y^3}{3a^3\sqrt{3}} * - \frac{b^3y}{a\sqrt{3}} + c^3 \infty 0$; hoc eſt, communi multiplicatore $3a^3\sqrt{3}$, fiet $b^3y^3 * - 3aab^3y + 3a^3c^3\sqrt{3} \infty 0$: ac proinde communi diviſore b^3, erit $y^3 * - 3aay + \frac{3a^3c^3}{b^3}\sqrt{3} \infty 0$. Quod erat demonſtrandum.

Etenim aut quantitas cognita hujus binomii erit radix quæſita; aut Æquatio, per ipſam diviſa, ad duas dimenſiones erit reducta; ita ut deinde radix ejus, per ea, quæ primo libro ſunt oſtenſa, inveniri queat.] Sic æquatio ſuperior pag. 76: $x^3 - 6xx + 13x - 10 \infty 0$ diviſa per binomium $x - 2 \infty 0$ dat æquationem impoſſibilem $xx - 4x + 5 \infty 0$, & fit radix quæſita 2. Sic æquatio $x^3 \infty 1201x + 14400$ ſeu $x^3 * 0xx - 1201x - 14400 \infty 0$ diviſa per $x + 25 \infty 0$ dat æquationem $xx - 25x - 576 \infty 0$ ſeu $xx \infty 25x + 576$, quæ juxta præcepta pag. 6 & 7 reſoluta oſtendit radicem quæſitam eſſe $12\frac{1}{2} + \sqrt{732\frac{1}{4}}$
L

Huc etiam refer reductionem Æquationum Quadratarum, cùm Problema eſt Simplex.

Vide hic poſt in Appendice de Cubicarum æquationum reſolutione.

Reductio Æquationum Quadratarum, cùm Problema eſt Simplex.

Ut ſi, verbi gratiâ, habeatur æquatio $xx \infty ax + ab + bb$ ſeu $xx - ax - ab - bb \infty 0$, poterit ea, inventis ipſius $ab + bb$ ultimi termini diviſoribus $1, b, a + b$, & $ab + bb$, dividi per binomium $x + b \infty 0$, oriturque $x - a - b \infty 0$. Id quod oſtendit, radicem quæſitam eſſe $\infty a + b$, & Problema, quod ad hanc æquationem reducitur, eſſe Simplex, hoc eſt, conſtrui poſſe ducendo tantùm rectas lineas.

Eodem modo, ſi fuerit $xx \infty \frac{-aax + aa}{a+1}$ ſeu $xx + \frac{aax}{a+1} - \frac{aa}{a+1} \infty 0$, quoniam, ad tollendas fractiones, multiplicatâ primùm

$$xx + \frac{aax}{a+1} - \frac{aa}{a+1} \infty 0$$

per quantitates proportionales $1.\quad a+1.\quad aa+2a+1.$

fit æquatio $yy + aay - a^3 - aa \infty 0$,

atque hâc, ut ante, diviſâ per binomium $y + aa + a \infty 0$, oritur $y - a \infty 0$: liquet, Problema, quod huc pertinet, non præter ſimplex exiſtere, & y eſſe ∞a, adeoque $x \infty \frac{a}{a+1}$.

Haud ſecus Problema ſimplex erit, ſi obtineatur æquatio $xx \infty \frac{aax - aac}{a - c}$ ſeu $xx - \frac{aax}{a-c} + \frac{aac}{a-c} \infty 0$. Multiplicatâ enim eâ per proportionales $1, a - c$, & $aa - 2ac + cc$, fit $yy - aay + a^3c - aacc \infty 0$. Quæ dividi poteſt per binomium $y - ac \infty 0$, oriturque $y - aa + ac \infty 0$. Unde y invenitur ∞ac, aut etiam $y \infty aa - ac$: ac proinde $x \infty \frac{ac}{a-c}$, aut etiam $x \infty a$. Quorum duorum valorum ipſius x non niſi unus tantùm quæſito Problematis reſpondet, licèt uterque æquationi propoſitæ ſatisfaciat. Quod ipſum ex Problemate non adeò difficile ſemper eſt dignoſcere.

Cæterùm Problema aliquod non præter ſimplex exiſtere, vel hinc quoque inferre licet, cùm, operando juxta regulas pag. 6 & 7, quantitas, quæ per $\sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$ aut per $\sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ exprimitur, omnino per extractionem radicis inveniri poteſt; ita ut ipſa ſit rationalis, quemadmodum in allatis exemplis contingit. Ubi porrò obſervare licet, quòd, in primo & ſecundo caſu earundem æquationum, poſtquam ultimus terminus per bb fuerit deſignatus, aut is inventione mediæ proportionalis (ſicut pag. 2 docetur) ad hanc formam fuerit reductus, nil ad ulteriorem ipſarum

rum

rum conſtructionem faciendum relinquatur, quod non per ſolarum rectarum linearum ductum abſolvatur. Vide Exercitationum noſtrarum Mathematicarum librum 2, in quo de Simplicium Problematum conſtructione ex profeſſo agitur.

Ubi demum obſervatu dignum, in genere æquationes omnes numericas trium dictarum formularum omnino per ſolas rectas lineas conſtrui poſſe, in quibus a & bb non niſi numeros deſignant ſive integros ſive fractos; aut etiam eas, in quibus hæ quantitates non per diverſas literas denotatæ reperiuntur, etiamſi ipſis integri aut fracti numeri præfigantur.

Ubi notandum, me ipſius y^6 dimenſiones tantùm pro tribus dimenſionibus habere, cum non reperiatur y^5, nec y^3; nec y in tota ſumma.] Poteſt enim pro æquatione M

$y^6 \begin{smallmatrix}+aa\\-2cc\end{smallmatrix} y^4 \begin{smallmatrix}-a^4\\+c^4\end{smallmatrix} yy \begin{smallmatrix}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{smallmatrix} \infty\ 0$ ſubſtitui æquatio hæc:

$z^3 \begin{smallmatrix}+aa\\-2cc\end{smallmatrix} zz \begin{smallmatrix}-a^4\\+c^4\end{smallmatrix} z \begin{smallmatrix}-a^6\\-2a^4cc\\-aac^4\end{smallmatrix} \infty\ 0$, nimirum, ſupponendo $z \infty yy$, atque ſubrogando zz in locum y^4, & z^3 in locum y^6; ita ut, poſtquam innotuerit valor radicis z, opùs tantùm ſit, ex hoc invento valore extrahere radicem quadratam, ad habendum valorem radicis y.

Nec aliter operandum, ſi habeatur $x^4 \infty -axx + bb$. Poſſumus enim ipſius x^4 dimenſiones ſolummodo pro duabus dimenſionibus habere, & ſcribere $yy \infty -ay + bb$, ſupponendo $y \infty xx$, & $yy \infty x^4$, eritque radix ejus $y \infty -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$: adeoque radix $x \infty \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$. *Vide pag. 6.*

Quin & ſi fuerit $z^6 \infty * 39 zz + 340$, ſupponendo $x \infty zz$ poteſt pro ea reponi $x^3 \infty * 39 x + 340$, atque adeò ipſius z^6 dimenſiones tantùm pro tribus dimenſionibus haberi.

Eodem modo, ſi fuerit $x^8 \infty * + 10x^4 + 16xx - 9$, atque z ſupponatur ∞xx: poterit ejus loco ſcribi $z^4 \infty * + 10zz + 16z - 9$, ita ut ipſius x^8 dimenſiones tantùm pro 4or dimenſionibus habeantur. Et ſic de aliis.

At verò ſi nullum inveniatur binomium, quod ita totam Æquationis propoſitæ ſummam dividere poſſit, certum eſt, Problema, quod ab ea dependet, eſſe ſolidum.] Sic quoniam æquatio N

Digitized by Google

tio $x^3 \propto 300x + 1200$, ſeu $x^3 * 0xx - 300x - 1200 \propto 0$, dividi nequit per x plus vel minus aliquo numero, ultimum terminum 1200 abſque fractione dividente, quin aliquid poſt diviſionem ſuperſit, certum eſt, Problema, quod ad illam reducitur, eſſe Solidum. Quo autem pacto inveniantur numeri omnes, datum numerum abſque fractione dividentes, manifeſtum fiet, ubi ex Stifelio expoſuero rationem, inveniendi omnes cujuſque numeri partes aliquotas, quod unum idemque eſt.

Etenim, ſi numerus par fuerit, dividendus eſt per 2, & diviſor reſervandus; tum rurſus, ſi quotiens eſt par, dividatur ſimiliter per 2, & diviſor reſervetur; illudque tam diu continuetur, donec perveniatur ad numerum imparem. Quòd ſi verò numerus eſt impar, vel diviſione jam factâ ad numerum imparem ſit perventum, dividi debet per 3, ſi fieri poteſt, idque tam diu continuandum, donec proveniat quotiens, qui per 3 ampliùs dividi non poſſit. Tum eadem diviſio tentanda per 5, 7, 11, 13, 17, 19, aliúmve numerum primum, ſive nullam partem aliquotam præter unitatem habentem. Suffecerit autem id tentaſſe, donec ad dati numeri radicem quadratam, ſive veram, ſive veræ proximam, perventum fuerit, cum ulteriores diviſiones ſupervacaneæ ſint habendæ. Jam verò quomodo ex reſervatis numeris partes aliquotæ, ſeu diviſores omnes dati cujuſque numeri, inveniantur, ſequentia exempla manifeſtabunt. Etenim ad inveniendos diviſores omnes numeri 462, divido 462 per 2, & fiunt 231. Hinc 2 reſervo, & 231 divido per 3, fiuntque 77, & 3 reſervo. Poſtea diviſis 77 per 7, fiunt 11, & 7 reſervo. Denique divido 11 per 11, & fit 1, & 11 reſervo. Unde numeri reſervati erunt 2, 3, 7, & 11. E quibus diviſores omnes ſeu partes aliquotæ ſic inveniuntur.

1

2 . 3

6

7. 14. 21. 42.

11. 22. 33. 66. 77. 154. 231. 462.

Primò ducito 2 in 3, & producentur 6. Deinde 7 in 1, 2, 3, & 6, & fient 7, 14, 21, 42. Denique 11 in 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, & 42, fientque 11, 22, 33, 66, 77, 154, 231, 462. Et erunt diviſores omnes 1. 2. 3. 6. 7. 14. 21. 42. 11. 22. 33. 66. 77. 154. 231.

&

Digitized by Google

& 462. Ubi notandum, ex ductu ultimi numeri reſervati 11 in ultimum productum inventum 42 produci datum numerum 462; adeò ut, ad inveniendum dati alicujus numeri partes omnes aliquotas, opùs non ſit hoſce duos numeros in ſe invicem ducere, ſi tantùm de illis quæſtio fuerit, & non de diviſoribus. Eodem modo, numerus 2310 diviſores habebit ſequentes.

1	1 1	3			
2 3 1 0	1 1 5 5	3 8 5	7 7	1 1	1
2	3	5	7	1 1	

1

2 . 3

6

5. 10. 15. 30

7. 14. 21. 42. 35. 70. 105. 210

11. 22. 33. 66. 55. 110. 165. 330. 77. 154. 231. 462. 385. 770. 1155. 2310.

Similiter diviſores numeri 1200 erunt

		1	1	1			
1 2 0 0	6 0 0	3 0 0	1 5 0	7 5	2 5	5	1
2	2	2	2	3	5	5	

1

2 . 2

2 4

2 . 8

2 . 16

3. 6. 12. 24. 48.

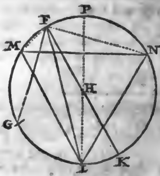
5. 10. 20. 40. 80. 15. 30. 60. 120. 240.

5. 25. 50. 100. 200. 400. 75. 150. 300. 600. 1200.

Verùm enimverò cum allata ratio inveniendi Binomium, per quod Æquationis propoſitæ ſumma dividenda eſt, ad inveſtigandum, utrum Problema, quod ad æquationem illam eſt perductum, ſit Solidum, an verò Planum, & ſi Planum ſit, ipſa ad ejuſdem æquationis radices inveniendas valde videatur prolixa; præſertim cùm ultimus terminus plures admittit diviſores: ſciendum eſt, quoſdam ex iis ſeligi poſſe, è quibus ſi componatur binomium, per quod æquationis diviſio non ſuccedat, certi eſſe poſſimus Problema ab ea dependens Solidum exiſtere.

Digitized by Google

Sic cum in ſuperiori æquatione $x^3 \infty * 300x + 1200$, vel $x^3 \; 8 \; 0xx - 300x - 1200 \infty 0$, triginta ſint numeri, ultimum terminum 1200 abſque fractione dividentes, atque hinc diviſio vel ſexagies eſſet tentanda, antequam certò conſtaret, Problema eſſe Solidum; ſciendum eſt non opùs eſſe niſi tres vel quatuor ex iis conſiderare, ut 4, 15, & 20, atque reliquos inſuper habere. Quemadmodum ex ſequentibus fiet manifeſtum.



Etenim ſi numerus 300 vocetur p, & numerus 1200 vocetur q, & juxta id, quod docetur pag. 93, circulus deſcribatur FGN, cujus radius FH ſit 10, utpote $\infty \sqrt{\frac{1}{3}p}$, & in eo recta inſcribatur FG ∞ 12, quippe $\infty \frac{3q}{p}$, ac deinde ſinguli arcus FMG, FNG, & GLK in tres æquales partes dividantur per rectas FM, FN, & FL: deſignabunt duæ rectæ FM & FN quantitatem utriuſque falſæ radicis, & FL quantitatem veræ. Adeò ut, ad eligendos diviſores, qui ad æquationem dividendam utiles cenſeri poſſunt, opùs tantùm ſit conſiderare eos, qui inventis lineis FM, FN, & FL quàm proximè accedunt, nullâ reliquorum habitâ ratione: adeoque diviſionem tentandam tantùm eſſe per $x + 4 \infty 0$, vel per $x + 15 \infty 0$, vel per $x - 20 \infty 0$. Ac proinde cum tentatâ diviſione aliquid ſuperſit: ſequitur, Problema, quod ad æquationem propoſitam perducitur, eſſe Solidum, nec ullam radicem ſive veram ſive falſam, quæ numero exprimi queat, admittere; ſed omnes eſſe irrationales, earumque valorem eſſe exprimendum per quantitatem linearum dictarum FM, FN, & FL.

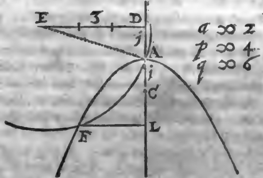
Eodem modo ſi habeatur $x^3 \infty * + 300x - 1200$, vel $x^3 \; 8 \; 0xx - 300x + 1200 \infty 0$: deſcripto rurſus circulo FGN, cujus radius FH ſit 10 ſeu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, in quo inſcriptâ rectâ FG ∞ 12 ſeu $\frac{3q}{p}$, ſi ſecentur ſinguli arcus FMG, FNG, & GLK in tres æquales partes, deſignabunt FM, FN utramque veram radicem, & FL falſam. Adeò ut, cum diviſio æquationis $x^3 \; 8 \; 0xx - 300x$ $+ 1200$

$+ 1200 \propto 0$ tentata per $x - 4 \propto 0$, per $x - 15 \propto 0$, & per $x + 20 \propto 0$ non ſuccedat, concedendum ſit illam admittere nullam radicem, nec veram nec falſam, quæ numero exprimi queat; ſed omnes eſſe irrationales: adeoque earum valorem non aliter quàm per quantitatem linearum FM, FN, & FL eſſe exprimendum, & Problema, unde allata æquatio deducta fuit, Solidum eſſe.

Sed licet hæc aliter adhuc & quidem generaliùs efficere.

Ut ſi habeatur Æquatio primæ formulæ $x^3 \propto * - 8x + 24$, cujus inveſtigandæ ſint radices. Quoniam igitur ultimus terminus 24 octo admittit diviſores, qui ſunt 1. 2. 3. 4. 6. 8. 12. 24: hinc octies fortè diviſio tentanda eſſet antequam radicem propoſitæ Æquationis ſic invenire poſſemus. Verùm ſufficit ſemel vel bis id experiri, cum certi quidam ex inventis hiſce diviſoribus ſeligi poſſint, per quos ſi diviſio non ſuccedat, certi reddamur radicem eſſe irrationalem.

Cogitetur Æquatio allata hujus eſſe formæ $x^3 \propto * - \cancel{x}, 4x + \cancel{4}, 6$, eadem nempe quæ $x^3 \propto * - \acute{a}px + \acute{a}\acute{a}q$; in qua a pro unitate aſſumpta valet 2, p 4, & q 6. Quâ Æquatione juxta regulam pag. 85, 86, 87, & 88 reſolutâ, invenitur radicem quæſitam



tam deſignari per lineam FL. Poſtea exploretur quiſnam ex inventis diviſoribus huic lineæ proximè accedat, ut ſeligantur per quos diviſio ſit tentanda, neglectis reliquis. Poſtquam autem compertum fuerit nullum ex ipſis propiùs huic lineæ congruere quàm

quàm diviſorem 2, & quidem Æquationem propoſitam $x^3\ 8\ 0 xx + 8x - 24 \infty 0$ dividi poſſe per $x - 2 \infty 0$, & prodire Æquationem impoſſibilem $xx + 2x + 12 \infty 0$, quæ per x + vel — aliquo numero, ultimum terminum dividente, ulteriùs dividi nequit: ſequitur radicem quæſitam fore 2, neque ullam aliam extare, cum reliquæ duæ in hac formula ſemper ſint imaginariæ.

Nec aliter fit, ſi fuerit $x^3 \infty * - 8x - 24$, quæ eſt Æquatio unam habens radicem falſam, nempe 2, & duas imaginarias: cum producatur ex multiplicatione Æquationis impoſſibilis $xx - 2x + 12 \infty 0$ per $x + 2 \infty 0$. Ubi obſervandum, quòd, licet D. des Cartes ejuſmodi Æquationis formulam inter Cubicas non repoſuerit, ſed tantùm eas, in quibus bini poſteriores termini per + aut per + & — juncti ſunt, ipſa tamen nihilominus eodem modo, quo præcedens, reſolvi, atque radix ejus exprimi poſſit. quod & de æquatione quadrata $zz \infty - az - bb$ ſupra monuimus. Hinc ſi fuerit $x^3 \infty - 3x - 10$, ſeu $x^3\ 8\ 0xx + 3x + 10 \infty 0$; quæ per x + aliquo numero ultimum terminum dividente dividi nequit: ſequitur radicem ejus eſſe irrationalem, eamque juxta primam Cardani regulam, pagin. 93 deſcriptam, ſic exprimi $x \infty - \sqrt{C.\sqrt{26}+5} + \sqrt{C.\sqrt{26}-5}$. nempe mutatis tantùm ſignis + & — utriuſque partis. Idem intellige de Æquationibus $x^3 \infty -8$, aut $x^3 \infty -10$, quarum radices ſunt $x \infty -2$, & $x \infty -\sqrt{C.10}$.

Eodem modo operandum erit in Æquatione primi caſus ſecundæ formulæ, puta $x^3 \infty + 8x + 24$, ubi $\frac{1}{4}qq$ eſt majus quàm $\frac{1}{27}p^3$. Quoniam enim dividi nequit per $x - 4 \infty 0$, qui diviſor ad quantitatem radicis proximè accedit, non opus eſt ut ulteriùs progrediamur, ſiquidem binæ reliquæ radices hujus caſus ſemper ſunt imaginariæ. Quare radix quæſita erit irrationalis, quæ juxta ſecundam Cardani regulam, pag. 93 exhibitam, ſic exprimetur: $x \infty \sqrt{C.12+\sqrt{125\frac{1}{27}}} + \sqrt{C.12-\sqrt{125\frac{1}{27}}}$. Adeò ut dicatur compoſita ex duabus lineis, quarum una eſt prima duarum mediarum proportionalium inter unitatem & lineam $12 + \sqrt{125\frac{1}{27}}$, & altera prima duarum mediarum proportionalium inter unitatem & lineam $12 - \sqrt{125\frac{1}{27}}$. E quibus perſpicua fiunt illa, quæ habentur pag. 92 & 95. Notandum verò, me potuiſſe quidem accipere a pro 1, ita ut p futura fuiſſet 8, & q 24: quo-

Digitized by Google

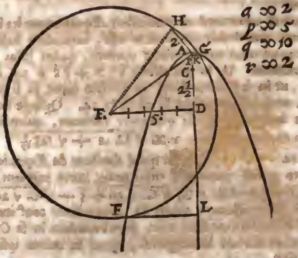
quoniam hic liberum eſt aſſumere pro unitate, qualem libuerit, quantitatem; verùm quia praxis aliquo modo accommodatior viſa eſt, ſi pro a ponatur 2, non 1, malui illam hypotheſin huic poſthabere.

Ubi porrò advertendum, radicibus Æquationum ita implicatis exiſtentibus, ſimplicius cenſendum eſſe, earundem habitudinem ex ſola Æquationum conſtitutione innuere, quàm ipſas prædicto modo exprimere. Ut in hac ultima $x^3 \propto + 8x + 24$, dicendo x talem eſſe, ut in ſe Cubicè ducta tantundem faciat ac ſi per 8 multiplicetur, ac deinde ei quod fit addatur 24. Quippe ſic ejus habitudinem longè ſimpliciùs concipere valemus, quàm ſi eandem hoc modo exprimeremus: $x \propto \sqrt{C.\,12 + \sqrt{125\frac{1}{27}}} + \sqrt{C.\,12 - \sqrt{125\frac{1}{27}}}$. Id quod ſimiliter de Æquatione $x^3 \propto - 3x + 10$ poteſt intelligi, cujus radix juxta primam Cardani regulam ſic exprimitur $x \propto \sqrt{C.\,\sqrt{26} + 5} - \sqrt{C.\,\sqrt{26} - 5}$: cum illius habitudinem, quam ex Æquationis conſtitutione induit, multò faciliùs concipiamus, prout eandem in ſe Cubicè ductam idem producere intelligimus, quod 10 minus ipſius triplo. Et ſic de aliis.

Porrò ſi habeatur $x^4 \propto * + 10xx + 40x + 16$; ſuppoſitâ $a \propto 2$, erit $aa \propto 4$, & $a^3 \propto 8$, fietque æquatio $x^4 \propto * + a,5xx + aa,10x + a^3,2$, ejuſdem formæ cum $x^4 \propto * \, apxx + aaqx + a^3r$, in qua p idem valet quod 5, q idem quod 10, & r idem quod 2. Deinde inventis numeris ultimum terminum 16 dividentibus, utpote 1, 2, 4, 8, & 16, æquationem reſolvo juxta regulam ab Authore pag. 85, 86, 87, & 88 oſtenſam, eritque vera radix FL, & falſa GK. Denique, examinando ordine diviſores inventos, explorando quinam ex ipſis ab inventis radicibus FL & GK quàm minimùm diſcedant; invenio diviſionem ſolummodo tentandam eſſe per $x - 4 \propto 0$, aut per $x + 1 \propto 0$. Ac proinde cum neutra harum diviſionum ſuccedat, concludo, Æquationem propoſitam, unam admittere veram radicem, & unam falſam, quarum utraque eſt irrationalis; ac reliquas duas eſſe imaginarias.

Vide figuram paginâ versâ.

Haud ſecus ſi fuerit æquatio $x^4 \propto * - 60xx + 7400x + 36000$, cujus ultimus terminus dividi poteſt per 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 30, 32, 36, 40, 45, 48, 50, 60, 72,



75, 80, 90, 96, 100, 120, 125, 144, 150, 160, 180, 200, 225, 240, 250, 288, 300, 360, 375, 400, 450, 480, 500, 600, 720, 750, 800, 900, 1000, 1 25, 1200, 1440, 1500, 1800, 2000, 2250, 2400, 3000, 3600, 4000, 4500, 6000, 7200, 9000, 12000, 18000, & 36000, fingo a eſſe 10, ac proinde æquationem propoſitam eſſe hanc $x^4 \infty * - \cancel{x0},6xx + \cancel{x00},74x + \cancel{x000},36$, hoc eſt, ipſam eſſe hujus formæ $x^4 \infty * - apxx + aaqx + a^3r$; ita ut, ſecto latere recto a in 10 æquales partes, p earundem faciat 6, q 74, & r 36. Quâ deinde juxta regulam pag. 85, 86, 87 & 88 conſtructâ, invenio ipſam ſicut antecedentem non niſi unam veram radicem admittere, utpute FL, & unam falſam, utpote KG, quarum longitudo ad partes lateris recti ceu ſcalæ relata oſtendit diviſionem æquationis propoſitæ ſolummodo tentandam eſſe per $x - 20 \infty 0$ aut per $x + 5 \infty 0$. Hinc cum ipſa dividi poſſit per $x - 20 \infty 0$ & oriatur æquatio $x^3 + 20xx + 460x + 1800 \infty 0$, non autem per $x + 5 \infty 0$, quin aliquid poſt diviſionem relinquatur: concludo veram ejus radicem eſſe 20, & falſam eſſe irrationalem, cujus valor ſeu quantitas, dum per longitudinem

nem ſolius inventæ rectæ KG accuratè exhibetur, propter hujus cum reliquis aſymmetriam, numero tantùm quadantenus ex ipſius ad haſce relatione innoteſcit. Eodem modo inveſtigari queunt radices æquationum, plures paucioréſve dimenſiones habentium.

Cæterùm cum radicum inventio res magni ſit momenti, atque eorum, circa quæ Algebra verſatur, præcipua: alium modum ſeligendi diviſores, qui ad æquationem dividendam utiles judicari poſſunt, ſubjungam, quem communicavit Jacobus à Waeſſenaer, Ultrajectinus, Geometra peritiſſimus, atque in hac Carteſiana Methodo verſatiſſimus.

Inveniantur radices æquationis $x^3 - 1xx - 30x + 72 \infty 0$, cujus ultimus terminus dividi poteſt per 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72. Unde æquatio propoſita dividenda eſt per x 8 1, vel per x 8 2, &c. Verùm cum complures hic ſint diviſores, & tantùm tres hic eſſe poſſint, per quos diviſio fieri queat: conſtat, diviſionem pluries eſſe tentandam, antequam fortè incideremus in aliquem, qui quæſito ſatisfacere poſſet. Quapropter ut ſeligantur illi, quorum præ cæteris eſt ratio habenda: augendæ ſunt radices veræ certâ quâdam quantitate, hoc eſt, tranſmutanda eſt æquatio in aliam, cujus veræ radices ſint dato numero majores. Commodiſſimum autem fuerit ad id aſſumere 1 vel 10: quia cùm multiplicatio alicujus numeri inſtituitur per 1, vel 10, numerus ille ſic non mutatur, ſed ipſi tantùm in fine cyphra adjungitur. Unde ponendo $y \infty x + 1$, ſive $x \infty y - 1$, exſurget æquatio $y^3 - 4yy - 25y + 100 \infty 0$, cujus veræ radices unitate majores ſunt veris prioris & falſæ contra unitate minores falſis. Quia verò in hac æquatione, numeri ultimum terminum 100 dividentes, ſunt 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100: ideo dividenda foret per y 8 1, vel per y 8 2, vel per y 8 4, &c. quod cum non minorem quàm in ſuperiori requirat laborem, oportet ſimiliter ex iis quoſdam ſeligere. Atque adeò cùm cognoſcatur, ad inveniendas veras radices, diviſores hujus unitate debere eſſe majores diviſoribus prioris æquationis, facilè conſtat, ſi ex inventis 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100, aliqui idonei ſunt ad poſteriorem æquationem dividendam, aliquos etiam inter eoſdem unitate diminutos, nempe inter 0, 1′, 3′, 4′, 9′, 19, 24′, 49, 99, ad priorem æquationem dividendam utiles futuros. Qui ut inveniantur, conferendi ſunt iidem diviſores

Digitized by Google

1, 3, 4, 9, 19, 24. 49, 99 cum ſupra inventis 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36, 72, ſumendique qui ſibi invicem reſpondent, cæteris neglectis. Ac proinde cum hîc quinque ſint qui concordant, nempe 1, 3, 4, 9, & 24, oportet, ad inveniendas veras radices, diviſionem tentare per $x - 1$, per $x - 3$, per $x - 4$, per $x - 9$, & per $x - 24$; aut, ad obtinendas falſas, quæ quidem hâc auctione in tantum ſunt diminutæ, per $x + 2$, per $x + 3$, & per $x + 6$. Quòd ſi verò id nimis longum videatur, quandoquidem æquatio quælibet tot tantùm radices ad ſummum habere poteſt, quot incognita quantitas habet dimenſiones, ita ut hîc non ultra tres inveniantur: poterimus veras radices prioris æquationis unitate diminuere, ſupponendo videlicet $z \propto x - 1$, ſive $x \propto z + 1$, & prodibit æquatio $z^3 + 2zz - 29z + 42 \propto 0$. Cujus ultimus terminus dividi poteſt per 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42, qui unitate aucti efficiunt diviſores 2, 3, 4, 7, 8, 15, 22, 43. Jam verò cum ex prioribus quinque 1, 3, 4, 9, 24 bini tantùm ſint, utpote 3 & 4, qui cum binis horum conſentiunt, eò deventum eſt, ut ad inveniendas veras radices opùs tantùm ſit diviſionem tentare per $x - 3$, vel per $x - 4$; aut, ad obtinendas falſas, quæ hâc diminutione verarum unitate ſunt auctæ, per $x + 2$, & per $x + 6$. Hinc, cum $x^3 - 1xx - 30x + 72 \propto 0$ dividi poſſit per $x - 3 \propto 0$, atque oriatur $xx + 2x - 24 \propto 0$, cujus radices ſunt $+4$, & -6; vel etiam $x^3 - 1xx - 30x + 72 \propto 0$ dividi poſſit per $x - 4 \propto 0$, & proveniat $xx + 3x - 18 \propto 0$, cujus radices ſunt $+3$ & -6; vel denique $x^3 - 1xx - 30x + 72 \propto 0$ dividi poſſit per $x + 6 \propto 0$, & reſultet $xx - 7x + 12 \propto 0$, cujus radices ſunt $+4$, & $+3$; ſequitur radices propoſitæ æquationis eſſe $+3$, $+4$, & -6. Ubi notandum, in hujuſmodi praxi ſeligendi diviſores, non opùs eſſe totius operationis, quæ ad inveniendas poſteriores haſce æquationes requiritur, rationem habere; ſed tantùm quatenus ad ultimum terminum inveniendum inſervire poſſit. Ad quem obtinendum, quando prioris radices unitate augentur vel diminuuntur, numeri in æquatione dati ſolummodo addendi ſunt vel ſubtrahendi, prout ſigna + & — indicant. At verò cùm per denarium aliúmve numerum augentur vel diminuuntur, tum priùs cyphræ ipſis in fine apponendæ ſunt, vel ipſi per datos numeros ſunt multiplicandi, antequam addantur vel à ſe invicem ſubtrahantur, quod uſus edocebit.

Ubi

Ubi tandem notandum, ad ſeligendos diviſores diviſioneſque ſuperfluas evitandas, ſpectari etiam poſſe ea, quæ Vir Clariſſimus D. de Beaune de limitibus Æquationis, intra quos ejus radices cadunt, tradidit. Qualia iſta in 2do tractatu continentur, qui unà cum primo de natura & conſtitutione Æquationum huic editioni nunc acceſſit.

Unde cognoſcitur, valorem ipſius z *eſſe* $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}$ O
$+\sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, *vel* $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}$
$-\sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.] utpote qui elicitur ex priori æquatione $zz - z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa - \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \propto 0$. Quæ quidem primi vel tertii caſus eſſe poteſt æquationum Quadratarum pag. 6 & 7. Primi videlicet, ſi $\frac{5}{4}aa$ eſt minus quàm cc, quo caſu $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$ deſignabit verum valorem radicis z, & $\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc}$ $-\sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, falſum valorem, juxta ea quæ pag. 162 annotavimus. At tertii, ſi $\frac{5}{4}aa$ majus fuerit quàm cc, quo caſu utraque radix eſt vera. Ubi porrò notandum, æquationem poſteriorem $zz + z\sqrt{aa+cc} + \frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \propto 0$, poſtquam $\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc$ non fuerit minus quàm $\frac{3}{4}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$, ſive, quod idem eſt, cc non minus quàm $8aa$, duas admittere falſas radices, quemadmodum p. 165 monuimus, quæ ſunt $-\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} + \sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$, & $-\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} - \sqrt{-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$. Ita ut quatuor ſint radices binarum præcedentium æquationum ſive æquationis

$$z^4 * \begin{matrix}+\frac{1}{2}aa\\ -cc\end{matrix}\, zz \begin{matrix}-a^3\\ -acc\end{matrix}\, z \begin{matrix}+\frac{9}{16}a^4\\ -\frac{1}{4}aacc\end{matrix} \propto 0,$$

nempe $z \propto \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} + \sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,
$z \propto \frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,
$z \propto -\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} + \sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,
$z \propto -\frac{1}{2}\sqrt{aa+cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.

Et quandoquidem ſupra feceramus $z + \frac{1}{2}a \propto x$, *innoteſcit,* P

 quan-

quantitatem x, ad quam cognoſcendam omnes haſce operationes inſtituimus, eſſe

$+\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc}-\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}.]$

vel $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc}+\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,

vel $\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc}+\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,

vel denique $\frac{1}{2}a-\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc}-\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa-\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$.

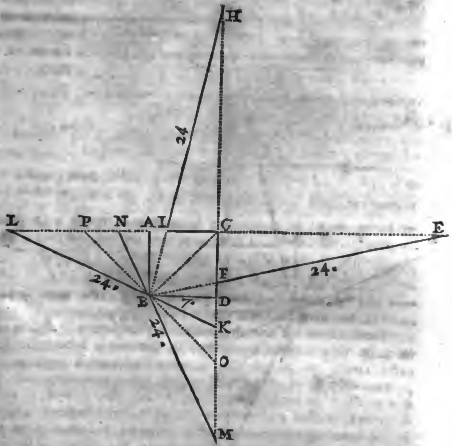
Ut liquet ex iis, quæ proximè annotata ſunt.

Q *Ubi per præcedentes regulas cognoſcitur, radicem ejus, quæ eſt longitudo lineæ DF, eſſe* $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc}-\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}.]$ Ubi patet, quòd ex quatuor radicibus ſupra expoſitis, æquationis $x^4-2ax^3\begin{smallmatrix}+2aa\\-cc\end{smallmatrix}xx-2a^3x+a^4$ ꝏ 0, quarum binæ priores ſemper veræ ſunt, ſeu plus quàm 0, D. des Cartes eam tantùm ſibi delegerit, quæ ad quantitatem lineæ DF, pro qua invenienda x poſuerat, deſignandam inſervire poſſit, & reliquam veram $\frac{1}{2}a+\sqrt{\frac{1}{4}aa+\frac{1}{4}cc}+\sqrt{\frac{1}{4}cc-\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$ neglexerit, eò quòd lineam ipsâ DC majorem exhibeat.

Vide figuram p. 83.

Poteſt autem hîc eleganter oſtendi uſus, quem radices tam falſæ quàm veræ alicujus æquationis in Geometria habent, ac quo pacto earum ope ad plenam alicujus Problematis cognitionem perducamur; ſic ut nullus caſus exiſtat, quem non detegamus, atque ejuſdem determinationem non inveniamus. Sciendum enim eſt, quòd, quemadmodum veræ radices in Arithmetica (ut ſupra indicavimus) quantitatem aliquam deſignant majorem quàm nihil, & falſæ defectum alicujus quantitatis, ſeu quantò nihilo ſunt minores, ſic in Geometria veræ radices eas communiter lineas deſignent, ſenſu illo, quales inveniendæ proponuntur, at verò falſæ, ſenſu contrario. Adeò ut ſi veræ accipiantur in data recta indefinita, à dato puncto versùs aliquod in ea punctum deſignatum, progrediendo, falſæ in ipſa ab eodem puncto ſumi debeant versùs contrarium punctum, regrediendo.

Ut,

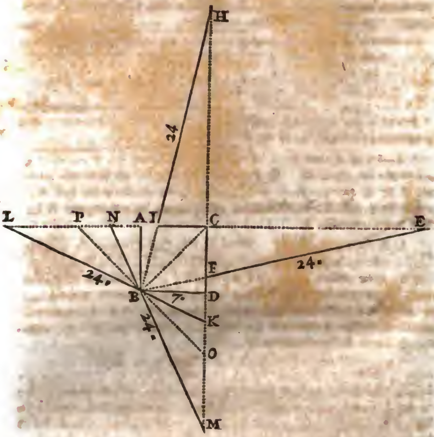


Ut, quoniam in expoſito Problemate, ad inveniendam quantitatem lineæ D F ∞ x, ſive ad cognoſcendum quanta ſumi debeat longitudo à puncto D versùs C, ut fiant quæ quæruntur, inventa eſt æquatio

$x^4 - 2ax^3 \begin{smallmatrix}+2aa\\-cc\end{smallmatrix} xx - 2a^3x + a^4 \infty 0$, quæ duas admittit veras radices, utpote

$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$,

[illegible] &



& $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} + \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$: hinc à puncto D versùs C ſumendæ ſunt duæ lineæ, quarum una eſt æqualis

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} - \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}},$$

deſignans lineam DF, & altera æqualis

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}cc} + \sqrt{\frac{1}{4}cc - \frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}},$$

deſignans lineam DH: deinde à puncto B ad inventa puncta F & H

F & H ducendæ rectæ BF, BH, quarum hæc ſecet latus AC in I, & illa idem latus productum in E: Eritque quælibet interceptarum FE, IH æqualis datæ c. Porrò, quoniam dicta æquatio duas quoque admittit falſas radices, quæ ſunt

$$\tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc} - \sqrt{\tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{2}aa - \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}},$$

& $\tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc} + \sqrt{\tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{2}aa - \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}}$: ideo à puncto D, verſùs alteram partem, ſumendæ ſunt duæ lineæ, quarum una eſt æqualis

$$\tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc} - \sqrt{\tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{2}aa - \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}},$$

deſignans lineam DK, & altera æqualis

$$\tfrac{1}{2}a - \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc} + \sqrt{\tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{2}aa - \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}},$$

deſignans lineam DM. Quibus ſic inventis, ſi ab inventis punctis K & M per punctum B ducantur lineæ occurrentes ipſi AC productæ versùs A: erit ſimiliter unaquæque interceptarum KL, MN ipſi c æqualis.

Unde apparet, quòd, etiamſi de ſola DF invenienda quæſtio fuerit, nec quicquam de interceptis IH, KL, & MN cogitaverimus, ipſæ tamen ultro poſt æquationis reſolutionem ſeſe offerant. Ita ut conſtet, per harum radicum cognitionem nos deduci in notitiam uniuscujuſque caſus, quem Problema propoſitum poteſt admittere; nec non, quo pacto quilibet ex ipſis eſt conſtruendus ac determinandus.

Ut, quoniam, ad explicandas radices æquationis $zz + z\sqrt{aa+cc} + \tfrac{3}{4}aa + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc} \infty 0$, requiritur, ut $\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}cc$ non ſit minus quàm $\tfrac{3}{4}aa + \tfrac{1}{2}a\sqrt{aa+cc}$, ſive cc non minus quàm $8aa$ (ſicut dictum eſt pag. 309): Sic quoque ad ducendas interceptas KL, MN opùs eſt, ut cc non ſit minus quàm $8aa$. Quemadmodum facilè demonſtrari poteſt, ducendo tantùm rectam OP ipſi BC perpendicularem; ſiquidem recta OP rectarum omnium, quæ per punctum B duci poſſunt, minima exiſtit. Cujus quadratum cum duplum ſit quadrati ex PC, & hoc duplum quadrati ex BC, & hoc rurſus quadrati ex BD duplum: erit quadratum ipſius OP quadrati ex BD octuplum. Hæc igitur ad ducendas interceptas KL, MN Problemati præfigenda eſt determinatio.

Porrò, quod ad reliquas interceptas attinet, ut FE & IH, ex

ſemper ſic duci poſſunt, ut datis rectis ſint æquales, nec eſt Problema eo caſu determinationi obnoxium.

In numeris, eſto BD $\infty\ a\ \infty\ 7$, EF $\infty\ c\ \infty\ 24$, fietque æquatio quæſita $x^4 - 14x^3 - 478xx - 686x + 2401\ \infty\ 0$. Quæ cum dividi nequeat per $x +$ vel $-$ aliquo numero, ultimum terminum dividente, tollo ſecundum ejus terminum, & fit æquatio $z^4 * - 551\tfrac{1}{2}zz - 4375z - 6305\tfrac{11}{16}\ \infty\ 0$. Quæ ad tres dimenſiones reducta dabit æquationem $y^6 - 1103y^4 + 329375yy - 19140625\ \infty\ 0$. Hæc autem cum dividi poſſit per $yy - 625\ \infty\ 0$, arguitur y eſſe 25, quâ mediante dividetur æquatio $z^4 * - 551\tfrac{1}{2}zz - 4375z - 6305\tfrac{11}{16}\ \infty\ 0$ in duas æquationes, $zz - 25z - 50\tfrac{3}{4}\ \infty\ 0$, & $zz + 25z + 124\tfrac{1}{4}\ \infty\ 0$: fientque radices prioris $z\ \infty\ 12\tfrac{1}{2} + \sqrt{207}$, & $z\ \infty\ 12\tfrac{1}{2} - \sqrt{207}$; at poſterioris $z\ \infty\ -12\tfrac{1}{2} + \sqrt{32}$, & $z\ \infty\ -12\tfrac{1}{2} - \sqrt{32}$. Verùm quoniam, ad tollendum ſecundum terminum primæ æquationis, ſuppoſita fuit $x\ \infty\ z + \tfrac{1}{2}a$: hinc radices ejus erunt $x\ \infty\ 16 + \sqrt{207}$, & $x\ \infty\ 16 - \sqrt{207}$, ut & $x\ \infty\ -9 + \sqrt{32}$, nec non $x\ \infty\ -9 - \sqrt{32}$. Et liquet DF fore $16 - \sqrt{207}$, DH $16 + \sqrt{207}$, DK $9 - \sqrt{32}$, ac denique DM $9 + \sqrt{32}$.

Eodem modo, ſi BD fuerit 3, & FE 4, invenietur æquatio $x^4 - 6x^3 + 2xx - 54x + 81\ \infty\ 0$, quæ ſimiliter per $x +$ vel $-$ aliquo numero ultimum terminum 81 dividente dividi nequit; unde ſublato ſecundo ejus termino, fiet æquatio $z^4 * - 11\tfrac{1}{2}zz - 75z - 10\tfrac{11}{16}\ \infty\ 0$. quæ ad tres dimenſiones reducta, dabit æquationem $y^6 - 23y^4 + 175yy - 5625\ \infty\ 0$. Hæc, cum per $yy - 25\ \infty\ 0$ dividi poſſit, ſequitur y fore 5. Unde diviſâ æquatione præcedente in duas æquationes $zz - 5z - \tfrac{3}{4}\ \infty\ 0$, & $zz + 5z + 14\tfrac{1}{4}\ \infty\ 0$, inveniemus $z\ \infty\ 2\tfrac{1}{2} + \sqrt{7}$, vel $z\ \infty\ 2\tfrac{1}{2} - \sqrt{7}$. Quæ binæ tantùm radices ex utraque æquatione erui poſſunt, cum poſterior æquatio $zz + 5z + 14\tfrac{1}{4}\ \infty\ 0$ ſit impoſſibilis, per ea, quæ p. 165 expoſuimus, adeoque nullas admittat radices nec veras nec falſas, ſed tantùm imaginarias. Quibus radicibus ſi addatur $1\tfrac{1}{2}$ (quoniam ad tollendum ſecundum terminum primæ æquationis poſuimus $x\ \infty\ z + 1\tfrac{1}{2}$), habebitur $x\ \infty\ 4 + \sqrt{7}$, vel $x\ \infty\ 4 - \sqrt{7}$. Id quod monſtrat lineam DF ſumendam eſſe æqualem $4 - \sqrt{7}$, & lineam DH $\infty\ 4 + \sqrt{7}$. Ex quibus conſtat, quòd, poſtquam æquatio inventa $x^4 - 6x^3 + 2xx - 54x + 81\ \infty\ 0$ nullam agnoſcat radicem falſam,

(quan-

(quandoquidem radices æquationis $zz + 5z + 14\frac{1}{4} \infty 0$ tantummodo ſunt imaginariæ, & æquatio impoſſibilis) ideo ſimiliter nulla linea, cujus longitudo ſit 4, per punctum B duci, atque à rectis CA, CD intercipi poſſit.

Cæterùm, ne quid ad penitiorem intellectum harum regularum, quibus hîc in reducendis ac dividendis æquationibus uſi ſumus, deficiat, viſum fuit ſequentia adjicere.

Hinc ſi, exempli causâ, æquatio reducenda ſit $x^4 * - pxx - qx + r \infty 0$, inveſtigare oportet ex quibus binis æquationibus produci queat æquatio, quæ reducendæ ſimilis exiſtit. Quocirca cum, ſupponendo $xx + yx + z \infty 0$ ac $xx - yx + v \infty 0$, ex mutua harum duarum multiplicatione producatur

$$x^4 * \begin{matrix} +zxx \\ -yy \\ +v \end{matrix} \begin{matrix} -zyx \\ +vy \\ \end{matrix} + vz \infty 0,$$

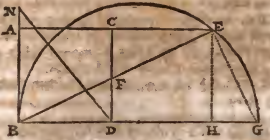
æquatio ejuſdem formæ cum propoſita, elicio inde tres æquationes diverſas: nimirum, $z - yy + v \infty - p$, $-zy + vy \infty - q$, & $vz \infty r$. E quibus deinde, ſi, ad inveniendam quantitatem y, in locum z & v ſubrogentur earum valores $\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}$ & $\frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}$, emerget æquatio $y^6 - 2py^4 \begin{matrix} +pp \\ -4r \end{matrix} yy - qq \infty 0$. Inventâ autem quantitate y, loco duarum præcedentium æquationum $xx + yx + z \infty 0$ ac $xx - yx + v \infty 0$ ſcribo haſce duas $xx + yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y} \infty 0$ ac $xx - yx + \frac{1}{2}yy - \frac{1}{2}p - \frac{p}{2y} \infty 0$. Et patet quæſitum. Idem pariter de cæteris æquationibus, quorum ſigna ab allatæ ſignis ſunt diverſa, eſt intelligendum, è quibus omnibus poſtea inter ſe collatis dictarum regularum veritas penitùs eluceſcit. Ubi etiam liquet, ſi valor ipſius yy per diviſionem ſuperioris æquationis Cubicæ inveniri poſſit, Problema, quod ad æquationem propoſitam $x^4 * - pxx - qx + r \infty 0$ perducitur, fore omnino Planum; ſin minus, illud ipſum tunc eſſe Solidum.

Denique ex his quoque emanat, quo pacto regula generalis reducendi omnes æquationes altiores, pag. 84 ab Authore adducta, intelligi nec non ad praxin revocari debeat.

Cum aliàs, ſi pro ea ſupponeretur DG, multò difficiliùs ad Æquationem, ſed quæ ſimpliciſſima foret, perveniremus. R *Quod*

 qui-

quidem hic refero, ut vobis indicem, quòd, cùm Problema propoſitum non eſt Solidum, ſi quærendo illud unâ viâ ad Æquationem deveniatur valde compoſitam, tum communiter aliâ viâ ad ſimpliciorem Æquationem perveniri poſſit.] Modus autem, quo ad Æquationem dictam pervenerim, talis eſt.



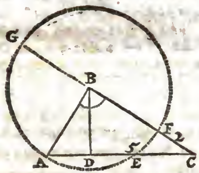
Jungatur EG, ductâque EH parallelâ ipſi CD vel AB, ponatur BD vel DC $\infty\ a$, FE $\infty\ c$, BF $\infty\ y$, & DG $\infty\ x$. Hinc cum EH æqualis ſit ipſi CD vel DB, & triangulum EHG ſimile triangulo BDF: erit & EG æqualis BF, hoc eſt, $\infty\ y$. Eodem modo ſimilia ſunt triangula BGE & BEH: unde erit, ut BG, ſeu $a + x$, ad GE, ſeu y; ita BE, ſeu $y + c$, ad EH, ſeu a. Ac proinde ductis tum mediis tum extremis in ſe invicem, fiet æquatio inter $yy + cy$ & $aa + ax$, vel inter yy & $-cy \begin{smallmatrix}+aa\\+ax\end{smallmatrix}$. Non ſecus, triangula BFD & BEH ſunt ſimilia: quare, ſi fiat ut BF, ſeu y, ad BD, ſeu a; ita BE ſeu $y + c$ ad BH; erit BH $\infty\ \frac{ay + ac}{y}$. Subductâ autem BH ex BG ſeu $a + x$, relinquetur HG $\infty\ \frac{xy - ac}{y}$. Porrò cum BH, HE, & HG tres ſint proportionales: hinc ſi multiplicetur BH per HG, hoc eſt, $\frac{ay + ac}{y}$ per $\frac{xy - ac}{y}$, erit productum $\frac{axyy + acxy - aacy - aacc}{yy}$ æquale ei, quod fit ex HE in ſe, hoc eſt, aa; & per conſequens $xyy - ayy \infty \begin{smallmatrix}+ac\\-cx\end{smallmatrix} y + acc$, unde $yy \infty -cy + \frac{acc}{x - a}$. Cæterùm

cum

cum illa, quæ eidem ſunt æqualia, inter ſe quoque ſint æqualia, erit $-cy\,\frac{+aa}{+ax} \infty -cy + \frac{acc}{x-a}$. Ac proinde ablatis utrinque æqualibus, reliquumque multiplicando per $x-a$, habebitur $axx - a^3 \infty acc$, ideoque $xx \infty aa + cc$. Quod erat oſtendendum.

Sed lubet hic aliud exemplum non inelegans afferre, quod mihi à Doctiſſimo, ac in omni ſtudiorum genere verſatiſſimo D. Marco Meibomio, eſt ſuppeditatum, cujus operâ Ariſtoxenus, Alypius, aliique Veteres Muſici priſtino nitori ſunt reſtituti.

Datis trianguli rectanguli ABC, minore latere AB, & differentiâ ſegmentorum baſis EC, invenire differentiam laterum FC.



Ponatur $AB \infty a$,
$EC \infty b$,
$FC \infty x$:
eritque $GC \infty 2a + x$.

EC	FC	GC		AC
b —	x —	$2a + x$	/	$\frac{2ax + xx}{b}$

$$\begin{array}{r} 2ax + xx \\ 2ax + xx \\ \hline +2ax^3 + x^4 \\ 4aaxx + 2ax^3 \\ \hline 4aaxx + 4ax^3 + x^4 \end{array}$$

$$\frac{4aaxx + 4ax^3 + x^4}{bb} \infty 2aa + 2ax + xx$$

$$4aaxx + 4ax^3 + x^4 \infty 2aabb + 2abbx + bbxx$$

$$x^4 + 4ax^3 \begin{matrix} +4aa \\ -bb \end{matrix} xx - 2abbx - 2aabb \infty 0.$$

Quoniam verò hæc æquatio dividi nequit per x 8 a, vel per x 8 b, vel per x 8 $2a$, vel per x 8 $2b$, hinc tollendus eſt ſecundus terminus, ut reducatur ad aliam tres tantùm dimenſiones habentem: quod fiet ponendo $z - a \infty x$

$$\begin{array}{rrrrrcl} z^4 & -4az^3 & +6aazz & -4a^3z & +a^4 & \infty & x^4 \\ & +4az^3 & -12aazz & +12a^3z & -4a^4 & \infty & +4ax^3 \\ & & +4aazz & -8a^3z & +4a^4 & \infty & +4aaxx \\ & & -bbzz & +2abbz & -aabb & \infty & -bbxx \\ & & & -2abbz & +2aabb & \infty & -2abbx \\ & & & & -2aabb & \infty & -2aabb. \\ \hline z^4 & * & \begin{matrix} -2aa \\ -bb \end{matrix} zz & * & \begin{matrix} +a^4 \\ -aabb \end{matrix} & \infty & 0. \end{array}$$

Quia autem hic poſt ſublationem ſecundi termini contingit æquationem eſſe Quadratam, cum in ea deſit z^3 & z: non opùs eſt ulteriùs progredi, cum radix ejus per ea, quæ primo libro ſunt oſtenſa, inveniri poſſit. Erit enim

$$zz \infty aa + \tfrac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \tfrac{1}{4}bb},$$

$$\& \; z \infty \sqrt{aa + \tfrac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \tfrac{1}{4}bb}}, \text{ ac proinde}$$

$$x \infty -a + \sqrt{aa + \tfrac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \tfrac{1}{4}bb}}.$$

Ubi notandum, ſi pro majori latere BC ponatur x, æquationem quæſitam fore quadratam: utpote,

$$x^4 * \begin{matrix} -2aa \\ -bb \end{matrix} xx * \begin{matrix} +a^4 \\ -aabb \end{matrix} \infty 0, \text{ ſive } x^4 \infty \begin{matrix} +2aa \\ +bb \end{matrix} xx \begin{matrix} -a^4 \\ +aabb \end{matrix},$$

cujus radix eſt $xx \infty aa + \frac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}$, hoc eſt, $x \infty \sqrt{aa + \frac{1}{2}bb + b\sqrt{2aa + \frac{1}{4}bb}}$. Cujus ſanè cum præcedente convenientia ex ipſo ſchemate eſt perſpicua. Quòd ſi verò pro AE, duplo minori ſegmento, ponatur x, fiet Æquatio $xx \infty -bx + 2aa$, cujus radix eſt $x \infty -\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + 2aa}$.

Quæ

Digitized by Google

Quæ loco alterius exempli haberi queunt, quorum nos admonet Author pag. 84.

Non diſſimilis erit quæſtio, ſi datis AB $\propto a$, & DC $\propto b$, quæratur FC $\propto x$. Fiet enim æquatio

$x^4 + 4ax^3 \begin{smallmatrix} +6aa \\ -bb \end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix} +4a^3 \\ -2abb \end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix} +a^4 \\ -2aabb \end{smallmatrix} \propto 0$. In qua ſi tollatur ſecundus terminus, ponendo ſcilicet $z - a \propto x$, prodibit æquatio $z^4 * - bbzz * - aabb \propto 0$, ſive $z^4 \propto bbzz + aabb$, cujus radix eſt $zz \propto \frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}$, hoc eſt,

$z \propto \sqrt{\frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}}$, adeoque $x \propto -a + \sqrt{\frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}}$. Sed ſi quæratur BC $\propto x$, erit æquatio $xx \propto \frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}$, cujus radix eſt $x \propto \sqrt{\frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}}$. Cujus cum præcedente conſenſus ex figura perſpicitur. Denique ſi quæratur AD, habebitur æquatio $xx \propto -bx + aa$, cujus radix eſt $x \propto -\frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}$. Quod ſimiliter ſuperioris moniti non inelegans eſt exemplum.

His adde ſequentem quæſtionem, quam olim ab Arithmetico ſubtiliſſimo, D. Nicolao Huberti à Perſyn, Harlemenſi, fautore meo honorando, ſolvendam accepi.

Invenire quatuor numeros, unitate ſe invicem excedentes, qui inter ſe multiplicati faciant 100.

Ponatur primus x, ſecundus $x + 1$, tertius $x + 2$, & quartus $x + 3$. Fietque æquatio $x^4 + 6x^3 + 11xx + 6x \propto 100$, vel $x^4 + 6x^3 + 11xx + 6x - 100 \propto 0$. cujus ultimus terminus dividi poteſt per 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, & 100. Diviſio verò tentata per $x \propto 1$, vel per $x \propto 2$, vel per $x \propto 4$ &c. non ſuccedit. Hinc ſublato ſecundo termino, prodibit æquatio $z^4 * - 2\frac{1}{2}zz * - 99\frac{7}{16} \propto 0$, vel $z^4 \propto 2\frac{1}{2}zz + 99\frac{7}{16}$, cujus radix eſt $zz \propto \sqrt{101} + 1\frac{1}{4}$, hoc eſt, $z \propto \sqrt{\sqrt{101} + 1\frac{1}{4}}$. Ac proinde, cum ibi tollendo ſecundum terminum poſuerimus $x \propto z - 1\frac{1}{2}$, fiet $x \propto \sqrt{\sqrt{101} + 1\frac{1}{4}} - 1\frac{1}{2}$. Eritque quæſitorum numerorum, primus $\sqrt{\sqrt{101} + 1\frac{1}{4}} - 1\frac{1}{2}$, ſecundus $\sqrt{\sqrt{101} + 1\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$, tertius $\sqrt{\sqrt{101} + 1\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}$, & quartus $\sqrt{\sqrt{101} + 1\frac{1}{4}} + 1\frac{1}{2}$. Quod facilè probari poteſt.

Ubi notandum, ſi cum hujus quæſtionis Authore pro primo numero ponamus $x - 1\frac{1}{2}$, pro ſecundo $x - \frac{1}{2}$, pro tertio $x + \frac{1}{2}$ pro

pro quarto $x + 1\frac{1}{2}$, quæſtionem faciliùs ſolvì poſſe. Invenitur enim æquatio $x^4 \infty 2\frac{1}{2}xx + 99\frac{7}{16}$, omnino ut præcedens, denominata à radice z; unde quæſiti numeri fiunt ut ſupra. Verùm difficile ſatis foret in haſce hypotheſes incidere, non ſecus quàm in ſuperiorem Pappi conſtructionem, ſicut Author innuit pag. 83.

Reſtat jam exemplum aliquod exhibendum, ubi æquationem ad Quadratam reducere non licet, & Problema Solidum exiſtit. Quale eſt illud, quod ante annos aliquot ſibi ad inveſtigandum propoſuit Nobiliſſimus atque Ampliſſimus Vir D. Joannes de Wit, Conſiliarius & Penſionarius ſive primarius Hollandiæ Weſt-Friſiæque miniſter, Mathematum peritiſſimus, à quo inſignem tractatum, brevi, ſi volet Deus, expectare poteris, in quo Planorum atque Solidorum Locorum per artem Analyticam inventionem aliter quàm Carteſius expoſuit.

Datis in ſuperiori triangulo rectangulo A B C, ſegmento baſis D C ∞ a, & differentiâ laterum C F ∞ b; invenire A B, latus minus.

Eſto AB ∞ x, fietque æquatio $x^4 + 4bx^3 \begin{smallmatrix}+6bb\\-2aa\end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix}+4b^3\\-2aab\end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix}+b^4\\-aabb\end{smallmatrix} \infty 0$. Quæ cum dividi nequeat per $x \pm b$, tollo ſecundum ejus terminum, ſtatuendo $z - b \infty x$, unde emergit æquatio $z^4 * - 2aazz + 2aabz - aabb \infty 0$, quippe quæ invenitur, quærendo latus majus BC. Hanc porrò reduco ad aliam, tres tantùm dimenſiones habentem, juxta regulam pag. 79, fietque æquatio $y^6 - 4aay^4 \begin{smallmatrix}+a^4\\+4aabb\end{smallmatrix} yy - 4a^4bb \infty 0$. Quæ cum dividi nequeat per binomium aliquod, conſtans ex quantitate incognitâ $yy \pm$ quantitate cognitâ, ultimum terminum $4a^4bb$ dividente, indicio eſt, Problema propoſitum eſſe Solidum, adeoque non niſi per Conicas ſectiones ſolvi poſſe. Neque minus vitium eſt, ſolutionem ejus poſt hæc tentare per lineas rectas & circulos, quàm adhibere Conicas ſectiones ad conſtructionem eorum, quæ per lineas rectas & Circulos conſtrui poſſunt, ut monet D. des Cartes pag. 79.

In numeris, eſto DC ∞ 5, CF ∞ 2, AB ∞ 1 N, eritque æquatio $1\,QQ + 8\,C - 26\,Q - 68\,N - 84 \infty 0$. Quæ cum dividi non poſſit per 1 N, plus vel minus aliquo numero ultimum terminum 84 dividente, aufero ſecundum terminum 8 C, & fit, $1\,QQ * - 50\,Q + 100\,N - 100 \infty 0$. Hæc autem ad tres dimen-

menſiones reducta producit $x^6 - 100x^4 + 2900xx - 10000 \propto 0$. quæ cum ſimiliter dividi non poſſit per xx + vel − aliquo numero, ultimum terminum dividente: ſequitur Problema in datis numeris eſſe Solidum, lineamque A B per planorum Geometriam ſive per regulas primo libro expoſitas non poſſe inveniri.

Non diſſimilis erit quæſtio, ſi, datis A D $\propto a$, F C $\propto b$, quæratur B C $\propto x$. Invenitur enim æquatio

$x^4 - 4bx^3 \begin{smallmatrix} +6bb \\ -2aa \end{smallmatrix} xx \begin{smallmatrix} -4b^3 \\ +2aab \end{smallmatrix} x \begin{smallmatrix} +b^4 \\ -aabb \end{smallmatrix} \propto 0$. Unde ponendo $x \propto z+b$, emerget æquatio $z^4 * - 2aazz - 2aabz - aabb \propto 0$. eadem nempe, quæ provenit, quærendo A B $\propto z$.

Porrò, ſi exemplorum copiam deſideres, potes rurſus ex iiſdem datis quærere E C $\propto x$, & habebis

$x^4 + 4ax^3 \begin{smallmatrix} +4aa \\ -2bb \end{smallmatrix} xx - 8abbx \begin{smallmatrix} -8aabb \\ +b^4 \end{smallmatrix} \propto 0$. Cujus ſecundum terminum ſi tollas, ponendo $z - a \propto x$, obtinebis $z^4 * \begin{smallmatrix} -2aa \\ -2bb \end{smallmatrix} zz - 4abbz \begin{smallmatrix} +a^4 \\ -2aabb \\ +b^4 \end{smallmatrix} \propto 0$, eandem, quam ſi quæras D C $\propto z$.

Ubi ſi denique quæras B D, invenies hanc æquationem:

$x^8 \begin{smallmatrix} -2a^4 \\ -2aabb \end{smallmatrix} x^4 - 4a^4bbxx \begin{smallmatrix} +a^4b^4 \\ +a^8 \\ -2a^6bb \end{smallmatrix} \propto 0$. Sed hæc forſan nimia videbuntur.

E quibus colligere licet: quòd, Problemate aliquo Solido exiſtente, ſi per viam aliquam perveniatur ad Æquationem valde compoſitam, communiter etiam per aliam viam ad ſimpliciorem deveniri poſſit, veruntamen pauciores quàm tres dimenſiones non habentem.

Jam verò poſtquam compertum eſt, Problema propoſitum S *eſſe Solidum; ſive Æquatio, per quam illud quæritur, ad Quadrato-quadratum aſcendat; ſive ipſa non altiùs quàm ad Cubum aſſurgat: poteſt ſemper radix ejus inveniri per aliquam trium Conicarum ſectionum, quæcunque illa tandem ſit, &c.*] Ex his notandum eſt, quoties in propoſita quæſtione data eſt aliqua Conica ſectio, & Æquatio ad 3 vel 4 tantùm dimenſiones aſcendit, tunc eam ſemper ope illius datæ Conicæ ſectionis per ſolam regulam & circinum ſolvi poſſe. Adeò ut pro Plano Problemate haberi quodammodo poſſit, etiamſi reverà ſit Solidum, ut etiam ab Authore hîc appellatur.

Digitized by Google

Hujus rei elegans exemplum ſuggerere poteſt Problema Apollonii de Parabola, lib. 5 Conicorum, de quo meminit Pappus Alexandrinus in ſcholio Prop^nis 30 libri 4^ti Collectionum Mathematicarum. In cujus ſolutionem eos, qui id per Conica vel Linearia, hoc eſt, per improprium genus ſolvere quæſiverunt, dum illud pro Plano Problemate habet, meritò reprehendit. Quoniam autem Vir doctiſſimus ac de Mathematicis ſtudiis perinde meritus Alexander Anderſonus in exercitatione ſua 5ta dictum Problema non levibus indiciis ſequentis argumenti fuiſſe innuit, ſeque ibidem ſcribit Analyticâ ſuâ duce tandem repeñiſſe abſque ſolida inclinatione (ut Pappus loquitur) non poſſe definiri: viſum fuit id ipſum hîc loci, in hoc rationum æquilibrio autoribus iſtis ſic diſſentientibus, cuivis inquirendum proponere.

PROBLEMA.

Parabolâ datâ, è puncto, intra vel extra eam dato, rectam lineam ducere, quæ Parabolæ ad rectos angulos occurrat.

Etenim ſi in hujus Problematis ſolutione inveſtiganda, rectam, quæ ad axem è puncto in Parabola, ad quod quæſita recta duci debet, perpendicularis demittitur, pro incognita quantitate accipiamus: incidemus in æquationem Cubicam, quæ nullo modo erit reducibilis, & tamen ſecundùm regulam generalem p. 89 ope ejuſdem datæ Parabolæ quàm facillimè conſtrui poterit, utendo tantùm rectis lineis & circulo. Cujus porrò demonſtrationem univerſalem, quam ſibi vulgari modo Geometrarum, continuæ contemplationi figuræ obnoxiam, acutiſſimus pariter atque eruditiſſimus noſter Chr. Hugenius concinnavit, cum ipſa jam pridem nobis aliiſque ab eo communicata fuerit, nec illa etiam hujus loci exiſtat, eandem hîc prætereundam duximus.

Atque ita Æquatio reducenda ad hanc formam: $z^3 \infty * apz . aaq$, *ſi incognita quantitas tres tantum dimenſiones habeat; aut ad hanc:* $z^4 \infty * apzz . aaqz . a^3r$. *ſi quatuor obtineat dimenſiones; ſeu, ſumendo a pro unitate, ad hanc:* $z^3 \infty * pz . q$; *aut ad hanc:* $z^4 \infty * pzz . qz . r$.] Ubi apparet, hujus

Geo-

Geometriæ Methodum requirere, ut literæ, quæ in priori æquatione pro unitate eſt accepta, quadratum reperiatur in ultimo termino; in poſteriori verò æquatione, ut literæ, quæ pro unitate in termino zz eſt accepta, quadratum reperiatur in termino z, ac ejus cubus in termino ultimo. Etenim ſi habeatur æquatio $z^3 \propto * bbz. c^3$, ac illius loco alia deſideretur, cujus penultimus terminus habeat a, ac ultimus aa: Fiat ut a ad b, ſic b ad quartam, quæ vocetur p: eritque $ap \propto bb$; Rurſus, fiat ut aa ad cc, ſic c ad quartam, quæ ſit q; ſive etiam (quod eòdem redit) ut a ad c, ſic c ad tertiam, quæ vocetur d; ac deinde ut a ad d, ſic c ad q: eritque $aaq \propto c^3$. Unde pro $z^3 \propto *. bbz. c^3$ ſcribi poterit $z^3 \propto * apz. aaq$, ſive, ſumendo a pro unitate: $z^3 \propto *. pz. q$.

Nec aliter fit ſi habeatur $z^4 \propto * bbzz. c^3z. d^4$. Subſtituto enim ap in locum bb, & aaq in locum c^3 (ut ante), faciendum eſt, ut a ad d, ſic d ad quartam, quæ vocetur e, eritque $ae \propto dd$, ideoque $aaee \propto d^4$. Ubi rurſus, ſi fiat, ut a ad e, ita e ad tertiam, quæ vocetur r, erit $ar \propto ee$, ac proinde $a^3r \propto d^4$. Ita ut pro æquatione propoſitâ $z^4 \propto *. bbzz. c^3z. d^4$ reponi poſſit $z^4 \propto * apzz. aaqz. a^3r$, ſive, ſumendo a pro unitate: $z^4 \propto *. pzz. qz. r$. Quod erat oſtendendum. Eadem eſt ratio æquationis pag. 97.

E quibus liquidò conſtat, quanti ſit momenti in Geometria concipere unitatem, cum, præter ejus utilitatem, primo libro oſtenſam, non ſolùm ejus beneficio æquationes 3 & 4, ut & 5 & 6 dimenſionum ita præparentur, ut hæ juxta unam & illæ juxta aliam regulam reſolvi queant; ſed ipſæ etiam hoc pacto deſignatæ ad numeros referri, atque ad ipſarum radices explicandas inſervire poſſint, adeoque, quænam inter Arithmeticam & Geometriam relatio ac convenientia exiſtat, edoceant.

Deinde ſupponendo Parabolam FAG jam deſcriptam eſſe, & axem ejus eſſe ACDKL, latusq; rectum a ſeu 1.] Ubi liquet, quòd, poſtquam in æquatione reſolvenda quantitatem a ſeu unitatem, ut proximè eſt explicatum, ſubrogavimus, eamque juxta regulam pro latere recto Parabolæ FAG aſſumpſimus, quo pacto Problemata omnia Solida unius ejuſdemque Parabolæ ope ſolvi poſſint. Cum enim reduci ſemper queant ad æquationem trium aut quatuor dimenſionum, ſuperiorum formularum, & una V VI

 eadem-

eademque quantitas a in earundem æquationum terminis ſubrogari ſemper poſſit, evidens eſt, ipſam unius ejuſdemque Parabolæ ope conſtrui poſſe. Idem intelligendum quoque eſt de æquationibus numericis trium quatuórve dimenſionum, quarum nulla ex radicibus eſt rationalis, quarumque valor ſimiliter per ſectionem Conicam eſt determinandus. Ut ſupra fuit oſtenſum.

Vide figuram pag. 86 vel 89.

Cæterùm ut hæc regula cuivis perſpecta reddatur, concipiatur Parabola eſſe deſcripta F A G, cujus latus rectum ſit ∞ a ſeu 1, & in axe ejus ADKL aſſumptâ AD ∞ b, fingatur ex D eidem perpendicularis eſſe erecta DE ∞ c, centroque E intervallo EH ∞ d deſcriptus circulus FGH, qui Parabolam ab utraque parte axis ſecet in G & F: oporteatque inveſtigare æquationem, cujus radix ſit perpendicularis GK aut FL ∞ z.

Ad quam inveniendam, dividatur zz, quadratum ex GK, per latus rectum ſeu a, & fit AK $\infty \frac{zz}{a}$. E qua ſubductâ AD ∞ b, relinquetur DK ſeu EM $\infty \frac{zz}{a} - b$. Deinde, quoniam additis ED, hoc eſt, MK, & KG, tota MG eſt ∞ $c + z$; & quadrata ex EM & MG ſimul addita faciunt $\frac{z^4}{aa} - \frac{2bzz}{a} + bb + cc + 2cz + zz$, quadratum ex EG: erit $\frac{z^4}{aa} - \frac{2bzz}{a} + bb + cc + 2cz + zz \infty dd$, hoc eſt, ordinatâ æqualitate, habebitur æquatio

$$z^4 \infty * \begin{array}{l} + 2abzz \\ - aazz \end{array} - 2aacz \begin{array}{l} + aadd \\ - aabb \\ - aacc \end{array}$$

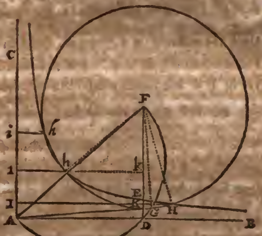
Eadem quippe, quæ invenitur, ponendo FL ∞ $-z$. Hinc ſi, exempli causâ, æquatio propoſita conſtruenda fuerit $z^4 \infty * + apzz - aaqz + a^3 r$: erit, factâ ſeparatim comparatione inter ſingulos terminos unius & ſingulos alterius, $b \infty \frac{a+p}{2}$, $c \infty \frac{1}{2}q$, & $d \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{2}ap + \frac{1}{4}pp + \frac{1}{4}qq + ar}$. Quod illud ipſum eſt, quod Authoris regula faciendum præcipit. Eodem modo reliquorum caſuum conſtructio inveniri poteſt. Idem intellige de conſtructione æquationis paginæ 97, aliarumque hic ſequentium.

VV *Adeò ut hæc regula omnium, quas aliquis exoptare queat, generaliſſima ſit & perfectiſſima*] Quoniam autem, quo pacto Solida

Solida Problemata etiam Hyperbolæ & Circuli beneficio, poſtquam ad æquationem trium quatuórve dimenſionum ſunt reducta, conſtrui poſſint, intelligere non modò jucundum quin imò utile exiſtit: viſum fuit hoc loco afferre regulam, ab ingenioſiſſimo atque integerrimo noſtro Huddenio inventam, quâ ejuſdem æquationis radices, prout ipſa ad hanc formam $z^4 - pz^3 + qzz - rz + ſ \infty 0$, aut ad hanc $z^3 - pzz + qz - r \infty 0$ eſt revocata, ita ut omnes termini per ſigna + & — ſe invicem ſequantur, inveniri valeant.

CONSTRUCTIO ÆQUATIONIS
$z^4 - pz^3 + qzz - rz + ſ \infty 0.$

Ductis AB, AC, rectum angulum A efficientibus, ſumptáque in AB lineâ AD $\infty \frac{1}{2}p$, agatur ex D ipſi AC



parallela DF. Deinde in hac invento puncto E, ita ut id, quod ſub AD, DE continetur, ſit $\infty \sqrt{ſ}$, deſcribatur per E circa Aſymptotos AB, AC Hyperbola HEh.

Porrò aſſumptâ DF $\infty \frac{r}{2\sqrt{ſ}}$, jungatur AF; & ſuper AF deſcripto ſemicirculo ADF, collocetur in eo AG $\infty \sqrt{q}$, centroque F circulus deſcribatur, tranſiens per inventum punctum G. Qui quidem Circulus Hyperbolam ſecabit vel tanget in tot punctis, quot æquatio diverſas radices admittet, à quibus ſi ad lineam AC demittantur perpendiculares HI, hi, & *bi*: erunt ipſæ radices quæſitæ.

Ubi notandum, ſi AG major inveniretur, quàm ut ſemicirculo ſuper AF deſcripto inſcribi poſſet; aut etiam Circulus GH*b* adeò parvus eſſet, ut Hyperbolam HE*b* in nullo prorſus puncto ſecaret vel tangeret, nullam itidem tunc fore radicem in æquatione, quæ non eſſet imaginaria.

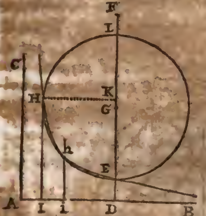
Demonſtratio.

Etenim lineâ IH exiſtente ∞z, cum id, quod ſub AD, DE vel ſub AI, IH continetur, ſit $\infty \sqrt{ſ}$: erit AI ſeu DK $\infty \frac{\sqrt{ſ}}{z}$. Unde cum DF & DK à ſe invicem ſubductæ relinquant KF, & DF ſit $\infty \frac{r}{2\sqrt{ſ}}$: erit KF $\infty \frac{r}{2\sqrt{ſ}} - \frac{\sqrt{ſ}}{z}$ ſeu $\frac{\sqrt{ſ}}{z} - \frac{r}{2\sqrt{ſ}}$, adeoque $\square$KF ſemper $\infty \frac{ſ}{zz} - \frac{r}{z} + \frac{rr}{4ſ}$. Eſt autem KH $\infty z - \frac{1}{2}p$ ſeu $\frac{1}{2}p - z$, ac proinde $\square$KH ſemper $\infty zz - pz + \frac{1}{4}pp$. Hinc ſumma utriuſque ſimul, hoc eſt, $\square$FH erit $\infty \frac{ſ}{zz} - \frac{r}{z} + \frac{rr}{4ſ} + zz - pz + \frac{1}{4}pp$. Hoc verò cum æquetur $\square$to AF $-$ $\square$to AG, hoc eſt, $\infty \frac{1}{4}pp + \frac{rr}{4ſ} - q$: fiet, ordinatâ æqualitate, $z^4 - pz^3 + qzz - rz + ſ \infty 0$. Quæ eſt æquatio propoſita. Unde liquet IH eſſe ∞z.

CONSTRUCTIO ÆQUATIONIS

$$z^3 - pzz + qz - r \infty 0.$$

Ductis, ut ante, AB, AC, & in AB aſſumptâ AD $\infty \sqrt{q}$, agatur ex D ipſi AC parallela DF. Deinde in hac acceptis DE $\infty \frac{r}{q}$, & EF $\infty\, p$, deſcribatur per E circa Aſymptotos AB, AC Hyperbola EhH. Porrò ſectâ DF bifariam in G, centro G & intervallo GE deſcribatur circulus EHL, qui quidem Hyperbolam in tot punctis præter E ſecabit vel tanget, quot æquatio diverſas radices admittet, è quibus ſi ad lineam AB demittantur perpendiculares HI, hi, erunt ipſæ radices quæſitæ.



Demonſtratio.

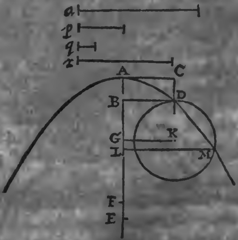
Quoniam, HI exiſtente $\infty\, z$, AI per ſupra dicta, eſt $\infty \frac{r}{qz}\sqrt{q}$, & eadem ab AD ſubducta relinquit ID vel HK $\infty \sqrt{q} - \frac{r}{qz}\sqrt{q}$: erit $\square$ ex HK $\infty\, q - \frac{2r}{z} + \frac{rr}{qzz}$. Deinde, quoniam DE $\infty \frac{r}{q}$ ablatâ ex DK ſeu IH $\infty\, z$, relinquitur EK $\infty\, z - \frac{r}{q}$; at verò DK $\infty\, z$ ſubtractâ ex DL ſeu EF $\infty\, p$, relinquitur KL $\infty\, p - z$: erit $\sqsubset\!\sqsupset$ EKL $\infty\, pz - \frac{pr}{q} - zz + \frac{rz}{q}$. Hinc cum $\square$ ex HK æquetur $\sqsubset\!\sqsupset$ EKL, erit $q - \frac{2r}{z} + \frac{rr}{qzz} \infty\, pz - \frac{pr}{q} - zz + \frac{rz}{q}$. Et fit, ordinatâ æqualitate,

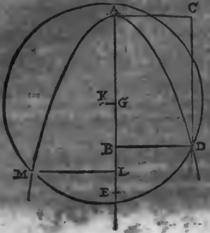
$$z^4 \begin{matrix} -\frac{r}{q} \\ -p \end{matrix}\, z^3 \begin{matrix} +q \\ +\frac{pr}{q} \end{matrix}\, zz - 2rz + \frac{rr}{q} \infty\, 0.$$

Quæ

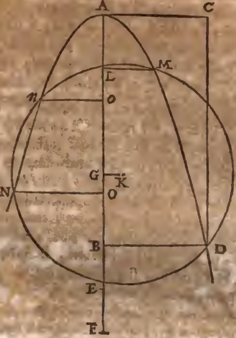
Quæ æquatio dividi poteſt per $z - \frac{r}{q} \infty 0$, & fit $z^3 - pzz + qz - r \infty 0$, æquatio propoſita. Unde liquet HI eſſe ∞z.

His ſubjunge ſequentem regulam, à me inventam, quâ ope Circuli & Parabolæ Æquationes Cubicæ, in quibus 2dus terminus non eſt ſublatus, conſtrui poſſunt, prout ipſæ ad hanc formam $z^3 \infty pzz.\, aqz.\, aar$, aut ad hanc $z^3 \infty pzz *.\, aar$; ſive etiam (ſumendo a pro unitate) ad hanc $z^3 \infty pzz.\, qz.\, r$, aut ad hanc $z^3 \infty pzz *.\, r$, ſunt reductæ. Ea autem talis eſt.





De-



Deſcriptâ Parabolâ NAM, cujus axis ſit ABE, & latus rectum ∞ a ſeu 1, erigo ex vertice A, ad dextram Parabolæ, ſuper axe, perpendicularem AC ∞ p; & ex C ductâ CD ipſi AB parallelâ, donec Parabolæ occurrat in D, duco ex D ipſi AC parallelam DB, occurrentem axi in B. Dehinc in linea AB, continuata verſus B, ſumendo BE ∞ 1, oportet facere EF ∞ q, eamque ulteriùs in illa verſus hanc eandem partem ſumere, ſi habeatur $+q$ in æquatione; ſed verſus alteram partem, ſi habeatur $-q$. Porrò ſectâ AF bifariam, aut AE, ſi q ſit nulla, in G, ſi habeatur $-p$, & q & r diverſis ſignis ſint adfectæ; aut etiam ſi habeatur $+p$, & q & r iiſdem ſignis denotatæ fuerint, erigenda eſt ex G per-

pendicularis GK $\infty \frac{r \pm pq}{2}$, aut $\infty \frac{1}{2} r$, ſi q nulla ſit, eaque ad dextram collocanda, ſi p & r diverſa ſigna habeant, aut ad ſiniſtram, ſi eadem. Vel contra, ſi habeatur $-p$, & q & r iiſdem ſignis adficiantur; aut etiam ſi habeatur $+p$, & q & r diverſis ſignis deſignentur, oportet facere GK $\infty \frac{r = pq}{2}$, aut $\infty \frac{1}{2} r$, ſi q nulla ſit, eamque, ut ante, ad dextram ſiniſtrámve collocare, ſi r ſit major quàm pq; vel contra, ſi r minor ſit quàm pq. Quo peracto, ſi ex K circulus deſcribatur, tranſiens per punctum D, ſecabit is vel tanget Parabolam in tot punctis præter D, quot æquatio diverſas radices admittet; è quibus ſi ad axem demittantur perpendiculares, obtinebuntur omnes æquationis radices, tam falſæ, quàm veræ. Quarum quidem veræ, ut ML, ad dextram cadent, & falſæ ut NO, ad ſiniſtram, ſi habeatur $-p$ in æquatione. Sed contra, ſi habeatur ibi $+p$, veræ cadent ad ſiniſtram, & falſæ ad dextram.

Signum $=$ ſignificat differentiam, quæ eſt inter r & pq.

Cujus quidem demonſtrationem, cum eodem modo fieri poſſit, quo illa Authoris paginæ 89, brevitatis ſtudio hic omittimus.

Ubi demum advertendum, regulam hanc habere etiam locum in Æquationibus Cubicis, quarum 2dus terminus eſt ſublatus, ſi tantùm in iis p intelligamus eſſe ∞ o, & veras radices ex eadem parte Parabolæ eſſe ſumendas, quà erecta eſt perpendicularis GK, & falſas ex altera, cùm habetur $+r$ in æquatione; aut contra, ſi in ea habetur $-r$.

Cæterùm cum & alias regulas huc afferre poſſem, quibus hæ eædem æquationes ſicut & ſuperiores Quadrato-quadratæ conſtrui queunt: tamen, ne in iis hic recenſendis nimis longus ſim (quandoquidem infinitas invenire licet), ſuffecerit jam allatas, tanquam faciliores expoſuiſſe, cæteraſque etiam aliis quærendas reliquiſſe.

X *Falſa autem FL æqualis eſt duabus hiſce QN & NV ſimul ſumptis, quemadmodum ex calculo facile eſt videre.*]
Veritatem proprietatis Parabolæ, quam hîc obiter adnotat Au-
[illegible] ctor,
[illegible]

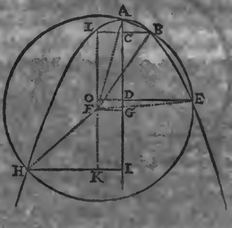
Digitized by Google

ctor, & ad quam inveſtigandam me ante annos aliquot Pariſiis inſtigavit Doctiſſimus, ac Mathematum peritiâ, non minùs quàm omnigenâ virtute, ornatiſſimus Vir D. Claudius Mylon, J. C. ſicut à me tum inventa fuit, ſequenti Theoremate exponam.

THEOREMA.

Si Circulus Parabolam in pluribus punctis ſecuerit, à quibus ad axem ex utraque parte perpendiculares demittantur: erit ea, quæ ab una parte axis reperitur, æqualis illis, quæ ſunt ab altera parte. Quòd ſi verò ab utraque parte in duobus punctis illam ſecet: erunt ſimiliter duæ ab una parte æquales duabus ab altera parte.

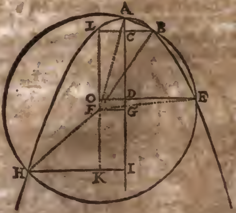
Sit Parabola HABE, cujus axis AI, vertex A, Circulus autem ipſam ſecans HBE. Qui quidem primò tranſeat per verticem, ſecetque Parabolam ab una parte in puncto H, & ab altera in punctis B & E. Demiſſis autem ex punctis H, B, & E in axem



perpendicularibus HI, BC, & ED: oſtendendum eſt, HI æqualem eſſe ipſis BC & ED ſimul ſumptis.

Eſto latus rectum Parabolæ ∞ *a*, CB ∞ *c*, DE ∞ *d*, HI ∞ *z*, AG ∞ *x*, & FG ∞ *y*. Hinc cum, per 11 propoſitionem 1 libri

Conicorum Apollonii, latus rectum ſeu a ſit ad CB ſeu c, ut CB ſeu c ad AC: erit AC $\infty \frac{cc}{a}$. Eadem ratione cum ſit ut latus rectum ad DE, ita DE ad AD: erit AD $\infty \frac{dd}{a}$. Similiter, quoniam latus rectum eſt ad HI, ut HI ad IA: erit AI $\infty \frac{zz}{a}$. Unde, ſi auferatur AC $\infty \frac{cc}{a}$ ex AG ∞x, relinquetur CG ſeu LF $\infty x - \frac{cc}{a}$. Cujus quadratum $xx - \frac{2ccx}{a} + \frac{c^4}{aa}$ ſi addatur quadrato rectæ LB $yy + 2cy + cc$, erit ſumma $xx - \frac{2ccx}{a} + \frac{c^4}{aa} + yy + 2cy + cc$, quadratum rectæ FB, per 47 prop. 1mi lib. Elementorum. Sic etiam, ſi addantur quadrata ipſarum AG & GF, nimirum, xx & yy, erit ſumma $xx + yy$ quadratum rectæ FA. Quoniam autem in Circulo rectæ lineæ, à centro ad circumferentiam ductæ, ſunt æquales; erunt quoque rectæ FB, FA æqua-



les, unde & earum quadrata $xx - \frac{2ccx}{a} + \frac{c^4}{aa} + yy + 2cy + cc$ & $xx + yy$. Quæ quidem æqualitas, ſi ritè ordinetur, dabit $x \infty \frac{c^3 + 2aay + aac}{2ac}$.

Eodem modo auferendo AD $\infty \frac{dd}{a}$ ex AG ∞x, relinquetur

GD

GD ſeu FO $\infty\ x - \frac{dd}{a}$. Cujus quadrato $xx - \frac{2ddx}{a} + \frac{d^4}{aa}$ ſi addatur quadratum ex EO $dd + 2dy + yy$, erit ſumma $xx - \frac{2ddx}{a} + \frac{d^4}{aa} + dd + 2dy + yy$ quadratum ex FE. Quod ſimiliter adæquetur quadrato ex FA $xx + yy$, atque æquatio ritè ordinetur, ut inveniatur rurſus $x \infty \frac{d^3 + 2aay + aad}{2ad}$.

Quia verò, quæ uni æquantur, illa quoque æqualia ſunt inter ſe, erit $\frac{c^3 + 2aay + aac}{2ac} \infty \frac{d^3 + 2aay + aad}{2ad}$. In qua æquatione ſi multiplicemus per crucem, atque poſt æqualium ex æqualibus ſubductionem, ita transferamus quantitates, ut utraque æqualitatis pars dividi poſſit per $d - c$, orietur $cdd + ccd \infty 2aay$.

Similiter, ſi ex AI $\infty \frac{zz}{a}$ auferatur AG $\infty\ x$, relinquetur GI ſeu FK $\infty \frac{zz}{a} - x$. cujus quadrato $\frac{z^4}{aa} - \frac{2zzx}{a} + xx$ ſi addatur quadratum ex HK $zz - 2yz + yy$, erit aggregatum $\frac{z^4}{aa} - \frac{2zzx}{a} + xx + zz - 2yz + yy$ quadratum ex HF. Quod item ob rationem ſupradictam quadrato ex FA ſeu $xx + yy$ erit æquale. Quibus adæquatis, ſi æquatio ritè ordinetur, conſtabit tertiò $x \infty \frac{z^3 - 2aay + aaz}{2az}$.

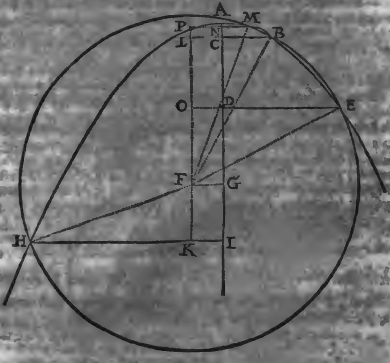
Quoniam autem primò inventa fuit $x \infty \frac{c^3 + 2aay + aac}{2ac}$, erunt itidem $\frac{z^3 - 2aay + aaz}{2az}$ & $\frac{c^3 + 2aay + aac}{2ac}$ inter ſe æqualia. Quocirca, ſi multiplicatio fiat per crucem, atque, poſt æqualium ex æqualibus ablationem, quantitates transferantur, ut utraque æqualitatis pars dividi poſſit per $z + c$: orietur $czz - ccz \infty 2aay$.

Cum verò & ſupra inventum fuerit $2aay \infty cdd + ccd$, erunt itidem $czz - ccz$ & $cdd + ccd$ inter ſe æquales. Quam æquationem ſi porrò per c dividamus, atque quantitates unius partis transferamus in aliam ſub contrario ſigno, fiet $zz - cz \begin{smallmatrix} - dd \\ - cd \end{smallmatrix} \infty\ 0$.

Poſtquam igitur evolvimus atque enodavimus propoſitionis data, donec tandem pervenerimus ad æquationem $zz - cz \begin{smallmatrix} - dd \\ - cd \end{smallmatrix} \infty\ 0$, reſtat ut illa quæſito reſpondeat, atque ejus beneficio propoſiti

Digitized by Google

veritas eluceat, modò ex datis elici poſſit. Ideoque tentatâ diviſione ejuſdem æquationis per $z - c - d \infty 0$, ut conſtet, num verum ſit, quod intenditur, nempe, z æquari $c + d$: reperitur diviſionem fieri poſſe, & oriri $z + d \infty 0$. Et manifeſtum fit, z æquari $c + d$, ſive HI æqualem eſſe ipſis BC, ED ſimul ſumptis. Quod erat demonſtrandum.



Unde patet, ſi Circulus, tranſiens per verticem Parabolæ, eam in B vel E tangat, hoc eſt, rectas CB, DE ſibi invicem æquales faciat, tunc quidem HI ipſius CB ſeu DE duplam fore. Si enim in hac ultima æquatione pro d ſcribatur c, fiet æquatio $zz - cz - 2cc \infty 0$. Quæ dividi poterit per $z - 2c \infty 0$, & orietur $z + c \infty 0$. Id quod arguit z valere $2c$, hoc eſt, HI ipſius CB ſeu DE duplam eſſe.

Sed non tranſeat circulus HBE per verticem A, verùm ſecet Para-

Parabolam ab una parte in puncto H, & ab altera in tribus punctis E, B, & M: Dico ſimiliter HI æqualem eſſe ipſis ED, BC, & MN ſimul ſumptis.

Poſitis enim iiſdem quæ priùs, eſto præterea MN ∞ b. Unde, ſimili ratione, quâ ante, AN erit $\frac{bb}{a}$. Sublatâ autem AN ex AG ∞ x, relinquitur NG ſeu PF ∞ $x - \frac{bb}{a}$. Cujus quadratum $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa}$ ſi addatur quadrato rectæ MP ∞ $bb + 2by + yy$, erit ſumma $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb + 2by + yy$ quadratum rectæ FM.

Quoniam autem in Circulo, ob æqualitatem radiorum, rectæ lineæ FB & FM ſunt æquales, erunt quoque earundem quadrata $xx - \frac{2ccx}{a} + \frac{c^4}{aa} + yy + 2cy + cc$, & $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb + 2by + yy$ æqualia. Unde, ſi demantur utrinque æquales quantitates & reliquæ multiplicentur per aa, atque quantitates in x ductæ ad unam æquationis partem transferantur, reliquæ verò ad alteram, fiet $c^4 - b^4 + 2aacy - 2aaby + aacc - aabb \infty 2accx - 2abbx$. Dividatur jam utraque pars per $c - b$, & orietur $c^3 + bcc + bbc + b^3 + 2aay + aac + aab \infty 2acx + 2abx$. Rurſus dividatur utrinque per $2ac + 2ab$, & orietur $x \infty \frac{c^3 + bcc + bbc + b^3 + 2aay + aac + aab}{2ac + 2ab}$.

Eodem modo, cum rectæ FE & FM ſint æquales, erunt etiam earum quadrata, nempe, $xx - \frac{2ddx}{a} + \frac{d^4}{aa} + dd + 2dy + yy$ & $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb + 2by + yy$ æqualia. Quare demptis utrobique æqualibus, reliquiſque ductis in aa, tranſeant porrò quantitates in x ductæ ad unam partem, & reliquæ ad alteram, fietque $d^4 - b^4 + 2aady - 2aaby + aadd - aabb \infty 2addx - 2abbx$. Dividatur utraque pars per $d - b$, orieturque $d^3 + bdd + bbd + b^3 + 2aay + aad + aab \infty 2adx + 2abx$. Rurſus dividatur utrinque per $2ad + 2ab$, & habebitur $x \infty \frac{d^3 + bdd + bbd + b^3 + 2aay + aad + aab}{2ad + 2ab}$.

Jam verò, quoniam, quæ uni æqualia ſunt, illa quoque inter ſe ſunt

ſunt æqualia, erit $\frac{d^3 + bdd + bbd + b^3 + 2aay + aad + aab}{2ad + 2ab}$

$$\infty \frac{c^3 + bcc + bbc + b^3 + 2aay + aac + aab}{2ac + 2ab}.$$

Brevitatis verò causâ pro $b^3 + 2aay + aab$ ſcribatur $+ e^3$, ductâque utrâque æqualitatis parte in $2a$, ſeu (quod idem eſt) diviſio utriuſque denominatore per $2a$, inſtituatur porrò multiplicatio per crucem, ut fractiones evaneſcant, fietque $cd^3 + bd^3 + bcdd + bbdd + bbcd + b^3d + aacd + aabd + ce^3 + be^3 \infty c^3d + c^3b + bccd + bbcc + bbcd + b^3c + aacd + aabc + de^3 + be^3$. Et deletis utrinque æqualibus, reſtituatur valor quantitatis aſſumptæ e^3, habebiturque $cd + bd^3 + bcdd + bbdd + b^3d + aabd + b^3c + 2aacy + aabc \infty c^3d + c^3b + bccd + bbcc + b^3c + aabc + b^3d + 2aady + aabd$. Rurſus demptis utrobique æqualibus, transferantur quantitates in y ductæ ad unam partem, reliquæ verò ad alteram, & diviſio tandem inſtituatur per $d - c$, orieturque $cdd + ccd + bdd + 2bcd + bbd + bbc + bcc \infty 2aay$.

Similiter, cum rectæ HF & FM ſint æquales, erunt pariter earum quadrata $\frac{z^4}{aa} - \frac{2zzx}{a} + xx + zz - 2zy + yy$, & $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb + 2by + yy$ æqualia. Unde ſublatis utrinque æqualibus, reliquisque per aa multiplicatis, ſi transferantur porrò quantitates, ita ut, quæ in x ductæ ſunt, unam faciant æquationis partem, reliquæ verò alteram, fiet $z^4 - b^4 - 2aazy - 2aaby + aazz - aabb \infty 2azzx - 2abbx$. Dividatur jam utraque pars per $z + b$, orieturque $z^3 - bzz + bbz - b^3 - 2aay + aaz - aab \infty 2azx - 2abx$. Et rurſus utrinque per $2az - 2ab$, fietque

$$x \infty \frac{z^3 - bzz + bbz - b^3 - 2aay + aaz - aab}{2az - 2ab}.$$

Quoniam verò ſuperiùs inventa fuit quantitas x æqualis $\frac{c^3 + bcc + bbc + b^3 + 2aay + aac + aab}{2ac + 2ab}$, hinc $\frac{z^3 - bzz + bbz - b^3 - 2aay + aaz - aab}{2az - 2ab}$ & $\frac{c^3 + bcc + bbc + b^3 + 2aay + aac + aab}{2ac + 2ab}$ erunt quoque inter ſe æqualia.

Bre-

Brevitatis autem cauſâ rurſus pro $+b^3+2aay+aab$ ſcribatur $+e^3$, & $-e^3$ pro $-b^3-2aay-aab$. Deinde, multiplicatâ utrâque æqualitatis parte per $2a$, ſeu (quod idem eſt), diviſo utriuſque denominatore per $2a$, fiat multiplicatio per crucem, ut fractiones evaneſcant, fietque $cz^3+bz^3-bczz-bbzz+bbcz+b^3z+aacz+aabz-ce^3-be^3 \infty c^3z-bc^3+bccz-bbcc+bbcz-b^3c+aacz-aabc+ze^3-be^3$. Poſtea auferantur utrinque æquales quantitates, & reſtituatur valor quantitatis aſſumptæ e^3, & fit $cz^3+bz^3-bczz-bbzz+b^3z+aabz-b^3c-2aacy-aabc \infty c^3z-bc^3+bccz-bbcc-b^3c-aabc+b^3z+2aayz+aabz$. Denique deletis rurſus utrobique æqualibus, & revocatis quantitatibus in y ductis ad unam partem æquationis, reliquis verò ad alteram, inſtituatur diviſio per $z+c$, & orietur $2aay \infty czz-ccz+bzz-2bcz+bcc-bbz+bbc$.

Verùm cum & ſupra inventum fuerit $cdd+ccd+bdd+2bcd+bbd+bbc+bcc \infty 2aay$, & quæ eidem ſunt æqualia, ea quoque inter ſe ſint æqualia, erit $czz-ccz+bzz-2bcz+bcc-bbz+bbc \infty cdd+ccd+bdd+2bcd+bbd+bbc+bcc$. Deleantur jam utrinque æqualia, & quantitates in zz ductæ unam partem æquationis conſtituant, reliquæ verò alteram, fietque

$$\begin{array}{l} c \\ +b \end{array} zz \infty \begin{array}{l} +cc \\ +2bc \\ +bb \end{array} z \begin{array}{l} +cdd \\ +ccd \\ +bdd \\ +2bcd \\ +bbd \end{array}$$

Deinde dividatur utrobique per $c+b$, ut oriatur

$$zz \infty \begin{array}{l} +b \\ +c \end{array} z \begin{array}{l} +dd \\ +bd \\ +cd \end{array},$$

ſive tranſlatis omnibus ad unam partem:

$$zz \begin{array}{l} -b \\ -c \end{array} z \begin{array}{l} -dd \\ -bd \\ -cd \end{array} \infty 0.$$

Poſtquam igitur percurrimus data propoſitionis, eaque ſic enodavimus, ut difficultas omnis ſit tranſlata ad æquationem

$$zz \begin{array}{l} -b \\ -c \end{array} z \begin{array}{l} -dd \\ -bd \\ -cd \end{array} \infty 0,$$

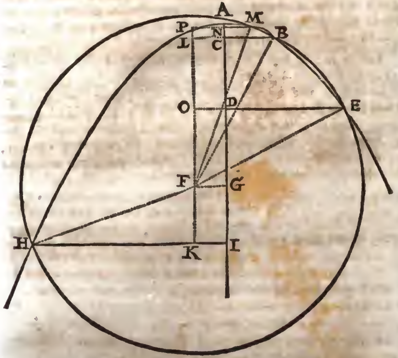
ſupereſt ut oſtendamus eam quæſito propoſitionis ſatisfacere, quantum quidem ex ſuppoſitis datis de-

 duci

Digitized by Google

duci poteſt. Hunc in finem tentanda erit diviſio æquationis per $z - b - c - d \infty 0$, ut conſtet num verum ſit, quod intenditur. Quare cum tentatâ diviſione reperiatur diviſionem fieri poſſe, atque oriri $z + d \infty 0$, ſequitur quoque quæſitum propoſitionis eſſe verum, hoc eſt, z æquari $b + c + d$, ſive HI æqualem eſſe ipſis MN, BC, & ED ſimul ſumptis. Quod erat demonſtrandum.

Unde liquet, ſi circulus non tranſiens per verticem Parabolæ eam tangat in M vel B, hoc eſt, rectas NM, CB ſibi invicem æquales faciat, tunc HI æqualem fore ipſi DE, unà cum dupla ipſius NM vel CB. Si enim in hac ultima æquatione pro c ſcribatur b,



fiet æquatio $zz - 2bz \begin{array}{l} - dd \\ - 2bd \end{array} \infty 0$, quæ dividi poterit per $z - d - 2b \infty 0$, & orietur $z + d \infty 0$. Id quod arguit z valere $d + 2b$,

Digitized by Google

$d + 2b$, hoc eſt, HI æqualem eſſe compoſitæ ex DE & dupla NM ſeu CB.

Præterea hinc conſtat, (quod ſanè animadverſione dignum) ſi recta tangens Parabolam in aliquo puncto extra verticem ipſa ibidem quoque tangatur à Circulo non per verticem tranſeunte, quique Parabolam in eodem puncto ſecet, hoc eſt, ut rectæ NM, CB, & DE omnes tres ſint inter ſe æquales: quòd tunc quidem HI ipſius NM, CB, vel DE tripla ſit futura. Quippe conſiderando NM vel CB bis ſumendam eſſe, propter hujus rectæ contactum in M vel B, ac deinde adhuc ſemel, propter Circuli & Parabolæ in eodem puncto interſectionem. Vel etiam in æquatione inventa

$$\begin{array}{llll} zz & -bz & -dd & \propto 0 \\ & -c & -bd & \\ & & -cd & \end{array}$$

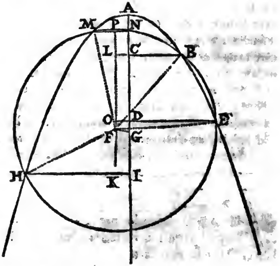
pro c & d ſcribendo b, ac deinde $zz - {}^2bz - {}^3bb \propto 0$ dividendo per $z - {}^3b \propto 0$. oritur namque $z + b \propto 0$. Id quod arguit z valere ${}^3b$, hoc eſt, HI triplæ ipſius NM, CB, vel DE eſſe æqualem.

Denique ſecet Circulus HBE Parabolam extra verticem A, ab utraque parte axis in duobus punctis; hinc quidem in H & M; iſtinc verò in B & E. Dico itidem HI, MN ſimul ſumptas ipſis BC, ED ſimul ſumptis eſſe æquales.

Poſitis enim iiſdem quæ priùs, invenietur ſimiliter, ſicut ante oſtendimus, quadratum ex FM eſſe $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb - 2by + yy$. Et quoniam per definitionem Circuli rectæ lineæ FB & FM ſunt æquales, erunt quoque earum quadrata æqualia: $xx - \frac{2ccx}{a} + \frac{c^4}{aa} + yy + 2cy + cc$ & $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb - 2by + yy$. Unde deletis utrinque æqualibus, & reliquis per aa multiplicatis, ſi transferantur porò quantitates in x ductæ, ut unam partem æquationis efficiant, reliquæ verò alteram, fiet $c^4 - b^4 + 2aacy + 2aaby + aacc - aabb \propto 2accx - 2abbx$. Diviſâ autem utrâque parte per $c + b$, orietur $c^3 - bcc + bbc - b^3 + 2aay + aac - aab \propto 2acx - 2abx$. Ubi rurſus ſi utrinque dividatur per $2ac - 2ab$, orietur
$$x \propto \frac{c^3 - bcc + bbc - b^3 + 2aay + aac - aab}{2ac - 2ab}.$$

Eodem modo, cum rectæ FE & FM ſint æquales, erunt etiam earum quadrata $xx - \frac{2ddx}{a} + \frac{d^4}{aa} + dd + 2dy + yy$ &

Digitized by Google



$xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb - 2by + yy$ æqualia. Quare ſi demantur utrobique æquales, & reliquæ ducantur in aa, nec non quantitates in x ductæ diſponantur ad unam, reliquæ verò ad alteram æquationis partem conſtituendam, fiet $d^4 - b^4 + 2aady + 2aaby + aadd - aabb \infty 2addx - 2abbx$. Dividatur jam utraque pars per $d + b$, & proveniet $d^3 - bdd + bbd - b^3 + 2aay + aad - aab \infty 2adx - 2abx$, & rurſus utrinque per $2ad - 2ab$, orieturque $x \infty \frac{d^3 - bdd + bbd - b^3 + 2aay + aadd - aab}{2ad - 2ab}$.

Quia verò quæ uni æquantur, illa quoque æqualia ſunt inter ſe, erit $\frac{d^3 - bdd + bbd - b^3 + 2aay + aad - aab}{2ad - 2ab}$

$\infty \frac{c^3 - bcc + bbc - b^3 + 2aay + aac - aab}{2ac - 2ab}$. Brevitatis autem

Signum 8 ſignificat + vel —. Signum 8 ſignificat + vel — ſenſu contrario

cauſâ pro $- b^3 + 2aay - aab$ ſcribatur, propter earundem quantitatum amphiboliam, $8\, e^3$, & multiplicatâ utrâque æqualitatis parte per $2a$; ſeu, quod idem eſt, diviſo utriuſque denominatore per $2a$, inſtituatur porrò multiplicatio per crucem, ut fractiones evaneſcant, fietque $cd^3 - bd^3 - bcdd + bbdd + bbcd - b^3d + aacd - aabd \; 8\; ce^3 \; 8\; be^3 \infty c^3d - c^3b - bccd + bbcc + bbcd - b^3c + aacd - aabc \; 8\; de^3 \; 8\; be^3$. Et, deletis

Digitized by Google

tis utrinque æqualibus, reſtitutoque valore quantitatis aſſumptæ $Ꝛ\, e^3$, fiet $cd^3 - bd^3 - bcdd + bbdd - b^3d - aabd - b^3c + 2aacy - aabc \infty c^3d - c^3b - bccd + bbcc - b^3c - aabc - b^3d + 2aady - aabd$. Ubi ſi demum demantur utrobique æquales quantitates, & quæ in y ductæ ſunt transferantur, ut unam faciant æquationis partem, reliquæ autem alteram, ac tandem diviſio inſtituatur per $d - c$, orietur $cdd + ccd - bdd - 2bcd + bbd + bbc - bcc \infty 2aay$.

prioris ſigni, h. e., cùm per ſignum Ꝛ intelligitur +, tum per ſignum 8 intelligitur −; aut cùm per ſignum Ꝛ intelligitur −, tum per ſignum 8 intelligitur +.

Similiter, cum rectæ HF & FM æquales ſint, erunt quoque earum quadrata $\frac{z^4}{aa} - \frac{2zzx}{a} + xx + zz - 2zy + yy$ & $xx - \frac{2bbx}{a} + \frac{b^4}{aa} + bb - 2by + yy$ æqualia. Unde ablatis utrinque æqualibus, reliquiſque multiplicatis per aa, adhibeatur porrò translatio, ut quantitates in x ductæ unam teneant æquationis partem, reliquæ verò alteram, fietque $z^4 - b^4 + 2aaby - 2aazy + aazz - aabb \infty 2azzx - 2abbx$. Dividatur jam utraque pars per $z - b$, & orietur $z^3 + bzz + bbz + b^3 - 2aay + aaz + aab \infty 2azx + 2abx$. Rurſus dividatur utrinque per $2az + 2ab$, & habebitur $x \infty \frac{z^3 + bzz + bbz + b^3 - 2aay + aaz + aab}{2az + 2ab}$.

Quia verò & ſupra quantitas x inventa fuit $\infty \frac{c^3 - bcc + bbc - b^3 + 2aay + aac - aab}{2ac - 2ab}$, erunt $\frac{z^3 + bzz + bbz + b^3 - 2aay + aaz + aab}{2az + 2ab}$ & $\frac{c^3 - bcc + bbc - b^3 + 2aay + aac - aab}{2ac - 2ab}$ inter ſe æqualia. Brevitatis cauſâ, ſcribatur rurſus $Ꝛ\, e^3$ pro $- b^3 + 2aay - aab$, & $8\, e^3$ pro $+ b^3 - 2aay + aab$, & multiplicatâ utrâque æqualitatis parte per $2a$, ſeu, quod idem eſt, diviſo utriuſque denominatore per $2a$, inſtituatur multiplicatio per crucem, ut fractiones evaneſcant, fietque $cz^3 - bz^3 + bczz - bbzz + bbcz - b^3z + aacz - aabz\ 8\ ce^3\ Ꝛ\ be^3 \infty c^3z + bc^3 - bccz - bbcc + aacz + b^3c + bbcz + aabc\ Ꝛ\ ze^3\ Ꝛ\ be^3$. Ablatis porrò utrinque æqualibus, reſtitutiſque valoribus quantitatum aſſumptarum $Ꝛ\, e^3$ & $8\, e^3$, fiet $cz^3 - bz^3 + bczz - bbzz - b^3z - aabz + b^3c - 2aacy + aabc \infty c^3z + bc^3 - bccz - bbcc + b^3c + aabc - b^3z + 2aazy - aabz$. Ubi ſi rurſus utrobique demantur æquales, & quantitates in y ductæ ad unam

 partem.

partem revocentur, reliquæ verò ad alteram, ac demum utraque pars æqualitatis dividatur per $z + c$, orietur $czz - ccz - bzz + 2bcz - bcc - bbz + bbc \propto 2aay$.

Cum verò & ſupra inventum fuerit $cdd + ccd - bdd - 2bcd + bbd + bbc - bcc \propto 2aay$, &, quæ eidem æquantur, inter ſe quoque ſint æqualia, erit $czz - ccz - bzz + 2bcz - bcc - bbz + bbc \propto cdd + ccd - bdd - 2bcd + bbd + bbc - bcc$. Deleantur utrinque æqualia, & quantitates in zz ductæ unam partem æquationis conſtituant, reliquæ verò alteram, habebiturque

$$\begin{array}{llll} +czz & \propto & +ccz & +cdd. \\ -b & & -2bc & +ccd \\ & & +bb & -bdd \\ & & & -2bcd \\ & & & +bbd \end{array}$$

Ubi tandem ſi utrobique dividatur per $c - b$, orietur

$$\begin{array}{llll} zz & \propto & cz & +dd. \\ & & -b & +cd \\ & & & -bd \end{array}$$

Hoc eſt, ſi collocentur quantitates omnes ad unam partem, erit

$$\begin{array}{llll} zz & -cz & -dd & \propto 0. \\ & +b & -cd & \\ & & +bd & \end{array}$$

Quare poſtquam percurrimus omnia propoſitionis data, eaque ſic enodavimus, ut difficultas omnis reducta ſit ad æquationem

$$\begin{array}{llll} zz & -cz & -dd & \propto 0 \\ & +b & -cd & \\ & & +bd & \end{array}$$

: ſupereſt ut ipſa contineat quæſitum propoſitionis, modò ſit verum atque ex datis deduci poſſit. Ad quod explorandum, videri debet, num æquatio inventa dividi poſſit per $z - c - d + b \propto 0$. Quare cum reperiatur diviſionem fieri poſſe, atque oriri $z + d \propto 0$, ſequitur quæſitum propoſitionis eſſe verum, hoc eſt, $z + b$ æquari $c + d$, ſive HI & MN ſimul ſumptas æquales eſſe ipſis BC & ED ſimul ſumptis. Quod erat demonſtrandum.

Unde liquet, ſi Circulus non tranſiens per verticem Parabolæ eam tangat in B vel E, hoc eſt, rectas CB, DE ſibi invicem æquales faciat, tunc HI, MN ſimul ſumptas ipſius CB vel DE duplas fore.

Si enim in hac ultima æquatione pro d ſcribatur c, erit æquatio

tio talis: $\begin{matrix} zz & -cz & -2cc \\ & +b & +bc \end{matrix} \infty\ 0$, quæ dividi poteſt per $\begin{matrix} z & -2c \\ & +b \end{matrix} \infty\ 0$, & oritur $z + c \infty\ 0$. Id quod arguit, z valere $2c - b$, ſive $z + b$ eſſe $\infty\ 2c$, hoc eſt, HI & MN ſimul ſumptas æquales eſſe ipſi CB ſeu DE bis ſumptæ.

Quare conſtat Theorematis veritas.

Si autem habeatur $z^3 \infty * - pz + q$, *regula, cujus inventionem Cardanus &c.*] Quò ea, quæ de exprimendis radicibus Æquationum Cubicarum Author hîc breviter perſtrinxit, cuivis manifeſtiora fiant: viſum fuit poſt ſequentis loci illuſtrationem afferre huc Appendicem, quam de Cubicarum Æquationum reſolutione anno 1646 ſimul cum Organica Conicarum Sectionum deſcriptione in lucem emiſimus, & nunc emendato hîc illic ſenſu cum additione quorundam ſubjungimus. Y

Hanc autem curvam in 6 diverſis punctis ſecare poteſt, ita ut hîc ſex diverſæ radices in Æquatione haberi queant. Atque cùm illam in paucioribus ſecat, hoc indicio eſt, quaſdam ex hiſce radicibus inter ſe æquales eſſe, aut ipſarum aliquas eſſe tantùm imaginarias.] Quoniam hîc nonnulli ſcrupulum ſibi ipſis injiciunt, concipiendi, quî fieri poſſit, ut circulus aliquis hanc curvam in 6 diverſis punctis ſecet: haud abs re fore credidi, ſi hoc loco exemplum, quod ſibi jam pridem ingenioſiſſimus Huddenius, ad difficultatem hujus rei è medio tollendam, ſubjecit, adducerem. Z

Quocirca ſumendo ad hoc æquationem $y^6 - 21y^5 + 169y^4 - 675y^3 + 1414yy - 1464y + 576 \infty\ 0$, cujus radices, ut, 1, 2, 3, 3, 4, & 8, ſunt omnes veræ ac rationales, & ex his duæ, ut 3 & 3, ad calculi prolixitatem evitandam, inter ſe æquales: oportet, ad curvæ hujus deſcriptionem, aſſumere AB $\infty\ \frac{1}{2}p \infty\ 10\frac{1}{2}$, BK $\infty \sqrt{\frac{s}{\sqrt{v}} + q - \frac{1}{4}pp}$ ſeu $n \infty \sqrt{\frac{479}{4}}$, & ED vel TV $\infty\ \frac{2\sqrt{v}}{pn} \infty \sqrt{\frac{9216}{211239}}$. Deinde, ut inveniatur circulus PCN, oportet, acceptâ BL æquali ED $\infty \sqrt{\frac{9216}{211239}}$, aſſumere LH $\infty\ \frac{s}{2n\sqrt{v}} \infty \sqrt{\frac{3721}{479}}$; & ex puncto H erectâ perpendiculari HI $\infty\ \frac{r}{2nn} + \frac{\sqrt{v}}{nn} + \frac{pt}{4nn\sqrt{v}}$ (id quod brevitatis causâ vocetur $\frac{m}{nn}$) $\infty\ \frac{2727}{479}$, in circulo cujus

$p \infty\ 21$
$q \infty\ 169$
$r \infty\ 675$
$s \infty\ 1414$
$t \infty\ 1464$
$v \infty\ 576$

Vide figuras pag. 98 & 100.

diame-

diameter IL inſcribere LP $\infty \sqrt{\frac{l+p\sqrt{v}}{nn}} \infty \sqrt{\frac{7672}{479}}$: eritque IP radius quæſiti circuli $\infty \sqrt{\frac{mm}{n^4}+\frac{ss}{4nnv}-\frac{s}{nn}-\frac{p\sqrt{v}}{nn}} \infty \sqrt{\frac{5544000}{229441}}$.

Jam ut conſtet, circulum hunc ex I intervallo invento IP deſcriptum ſecare vel tangere curvam ACN in tot diverſis punctis, quot æquatio inæquales habet radices, hoc eſt, hîc in 5 diverſis punctis, cum propter duas æquales 3 & 3 circulus hanc curvam ibidem non ſecet ſed tangat: conſiderandum eſt, lineam IM eſſe $\infty \frac{m}{nn}-y$ vel $y-\frac{m}{nn}$, adeoque quadratum ex IM ſemper eſſe $\frac{mm}{n^4}-\frac{2my}{nn}+yy$, & lineam GH vel CM ſemper $\infty \frac{-y^3+\frac{1}{2}pyy+\frac{sy}{2\sqrt{v}}-\sqrt{v}}{ny}$. Ac proinde, ſi, tribuendo radici y unumquemque ex ſupra dictis valoribus, ex lineis hiſce, per 47 primi Elem. Eucl., quæramus lineam IC, eamque ſingulis vicibus æqualem reperiamus radio ante invento IP $\infty \sqrt{\frac{5544000}{229441}}$: certum eſt, quòd circulus PCN eandem curvam ACN, quemadmodum indicatum fuit, ſit ſecturus vel tacturus.

Hinc,

ſi ponatur $y \infty 1$, erit $\begin{cases} \square \text{IM. } \frac{5053504}{229441} \\ \square \text{CM. } \frac{490496}{229441} \end{cases}$ adeoque $\square$ IC. $\frac{5544000}{229441}$

$y \infty 2$, erit $\begin{cases} \square \text{IM. } \frac{3129361}{229441} \\ \square \text{CM. } \frac{2414639}{229441} \end{cases}$ adeoque $\square$ IC. $\frac{5544000}{229441}$

$y \infty 3$, erit $\begin{cases} \square \text{IM. } \frac{1664100}{229441} \\ \square \text{CM. } \frac{3879900}{229441} \end{cases}$ adeoque $\square$ IC. $\frac{5544000}{229441}$

$y \infty 4$, erit $\begin{cases} \square \text{IM. } \frac{657721}{229441} \\ \square \text{CM. } \frac{4886279}{229441} \end{cases}$ adeoque $\square$ IC. $\frac{5544000}{229441}$

$y \infty 8$, erit $\begin{cases} \square \text{IM. } \frac{1221025}{229441} \\ \square \text{CM. } \frac{4322975}{229441} \end{cases}$ adeoque $\square$ IC. $\frac{5544000}{229441}$.

Ex quibus igitur apparet, quòd, aſſumptâ qualibet ex radicibus, linea IC ſemper ipſi IP inveniatur æqualis, hoc eſt, quòd circulus, qui ex I intervallo IP deſcribitur, curvam ACN in 5 diverſis punctis ſecet vel tangat, in tot videlicet, quot æquatio propoſita diverſos admittit radicis valores. Quod erat oſtendendum.

Eodem modo liquet, ſi æquatio propoſita 6 radices inæquales habuerit, quòd tunc quoque circulus PCN curvam ACN in 6 diverſis punctis ſecet.

AP-

APPENDIX, DE CUBICARUM ÆQUATIONUM RESOLUTIONE.

Æquationes Cubicæ omnes, & Quadrato-quadratæ, * quæ quidem & ad Cubicas reducuntur, quarum radix duarum eſt dimenſionum, ſemper ad aliquam trium ſequentium formularum reduci poſſunt.

Vide quæ habentur pag. 92. à lin. 12. uſque ad finem ejuſdem paginæ.

$$z^3 \propto * - pz + q.$$
$$z^3 \propto * + pz + q.$$
$$z^3 \propto * + pz - q.$$

In priori autem formulâ, ubi z^3 æquatur $-pz+q$, regula Cardani, cujus inventionem Scipioni Ferreo tribuit, nos docet radicem eſſe $\sqrt{C.\, + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt{C.\, - \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$.

Quemadmodum etiam ſi habeatur $z^3 \propto + pz + q$, in qua quadratum ſemiſſis ultimi termini ſit majus cubo trientis quantitatis cognitæ penultimi termini, ſimilis regula oſtendit radicem fore $\sqrt{C.\, + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\, + \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$.

Unde liquet in omnibus Problematibus, quorum difficultates ad æquationem hujus vel illius formulæ reducuntur, ejus æquationis radices, aliàs numero non explicabiles, ſemper hoc modo juxta Cardani regulas per latera cuborum quorundam, quorum contentum cognoſcitur, exprimi poſſe.

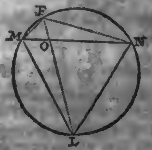
Deinde verò ſi habeatur $z^3 \propto + pz + q$, ubi $\frac{1}{4}qq$ ſit minus quàm $\frac{1}{27}p^3$, ibi prædicta regula non habet locum, nec ejuſdem beneficio radix ullo modo intelligibili explicari poteſt, ſicut inferiùs oſtendemus. Quæ quidem res olim multæ fuit caliginis, & ut ſcribit Albertus Girardus in libello cui titulus: *Invention nouvelle en l'Algebre*, qui anno 1629 prodiit: *hoc eſt, in quo Authores hactenus fuerunt valde intricati, & ut verum fatear in re quàm maximè difficili.*

Hinc, quæ hùc ſpectant ſubobſcura, aut neglectâ demonſtratione

tione apud prædictos Authores invenimus, ea illuſtrare nobis viſum fuit: præmittentes ad hoc ſequentia Theoremata demonſtrata.

THEOREMA I.

Si fuerit triangulum æquilaterum MNL circulo inſcriptum, atque ex L educta utcunque recta LF uſque ad circumferentiam in F, quæ ſecet MN in O, junctæque rectæ MF, FN: Dico FL æqualem eſſe ipſis MF, FN ſimul ſumptis.



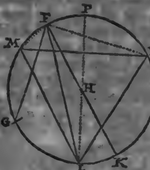
Triangula enim LNO & LNF ſimilia ſunt, cum habeant angulum ad L communem, & angulum LNO, hoc eſt, LMN ipſi LFN [1] æqualem, unde & tertius LON tertio LNF [2] æqualis eſt. Quocirca [3] erit ut NO ad LN, ita FN ad LF. Eodem modo cum ſimilia ſint triangula LMO & LFM, erit ut MO ad LM ſeu LN, ita FM ad LF. Igitur [4] erit, ut NO, MO ſimul ad LN, ita FN, FM ſimul ad LF. Æquales autem ſunt NO, MO ſimul ſumptæ ipſi LN, æquales ergo quoque erunt FN, FM ſimul ſumptæ ipſi LF. Quod erat oſtendendum.

[1] per 21 prop. tertii Elem.
[2] per 32 primi Elem.
[3] per quartam ſexti Elem.
[4] per 24 quinti Elem.

THEOREMA II.

Iiſdem poſitis, ductâ diametro FHK, ſumatur arcus GLK triplus arcûs LK, jungaturque GF: Dico ſimiliter arcum GMF arcus MF, nec non arcum GNF arcûs NF triplum eſſe.

Ducatur enim diameter LHP. Hæc namque ſecabit arcum MFN bifariam in P. Quoniam autem propter triangulum æquilaterum MNL, circumferentia circuli dividitur in tres partes æqua-



æquales, ac ipſa tripla eſt arcus M P N, erit & ſemicircumferentia F M K tripla arcus M P. Quocirca cum eadem ratio ſit arcus F M K ad arcum M P, totius ad totum, quæ arcus G L K ad arcum L K ſeu F P, ablati ad ablatum, erit quoque reliqui arcus G M F ad reliquum arcum M F eadem ratio, quæ totius ad totum *. Triplus autem eſt arcus F M K arcus M P. Triplus ergo etiam eſt arcus G M F arcus M F. Quod erat demonſtrandum.

* per 19 quinti Elem.

Eodem modo oſtenditur arcum G N F arcus N F triplum eſſe.

THEOREMA III.

Iiſdem poſitis, ducatur recta *n* N parallela F *m*, occurrens rectæ F L in N; itemque *m* M *l* parallela F *n*, ſecans quidem rectam F L in M, occurrens autem ductæ *n* N in *l*: Dico ſi ducantur H *l*, H N, & H M, ipſas inter ſe æquales eſſe, unamquamque verò æqualem rectæ L K.

Quoniam enim anguli *m* F M & N F *n* ſinguli circumferentiæ tertiæ parti inſiſtunt, & ob parallelas ductas angulus F M *m* angulo N F *n* æquatur, ac angulus F N *n* angulo *m* F M: erunt triangula *m* F M & N F *n*, quemadmodum etiam triangulum N M *l* æquiangula, ac proinde æquilatera. Porrò cum F L æquetur ipſis *m* F, F *n* ſimul ſumptis (ut ſupra oſtenſum fuit); atque ablata F M ipſi *m* F, erit reliqua M L ipſi F *n* æqualis: cumque F N æquetur ipſi *m* [illegible], erunt quoque M L & *m l*, atque adeo omnes tres *m l*, *n* N, & M L inter ſe æquales. Unde ſi ab his æqualibus rectis auferantur rectæ inter ſe æquales M *l*, N [illegible], & M N, remanebunt ſimiliter [illegible] M, *n l*, & N L inter ſe æquales. Præterea cum [illegible] & L *m* tres rectæ ſint inter ſe æquales [illegible] triangula [illegible] *n* L N, & [illegible] M

 [illegible]ſimiliter

inter ſe conſtare ex æqualibus lateribus, ipſaque ob hoc & angulos ſingulos ſingulis æquales habere, hoc eſt, æquales inter ſe erunt anguli *mnl*, *n*LN, & L*m*M. Quia autem & anguli *mn*H, *n*LH, & L*m*H inter ſe æquales ſunt, patet, ſi hi ex prædictis æqualibus inter ſe angulis demantur, reliquos itidem angulos H*nl*, HLN, & H*m*M inter ſe æquales fore. Denique, propter æqualitatem radiorum H*n*, HL, & H*m*, perſpicuum eſt, triangula H*nl*, HNL,



& H*m*M habere inter ſe duo latera duobus lateribus, utrumque utrique æqualia; ac inſuper angulum angulo, inter æqualia latera contentum: unde & baſin baſi æqualem habebunt, atque adeò æquales inter ſe erunt rectæ H*l*, HN, & HM. Quòd autem præterea unaquæque ex ipſis æquetur rectæ LK, conſequenter ſic oſtenditur. Producatur *l*H ut ſecet FL in Q. Hæc igitur ad rectos angulos cadet in FL, atque eam bifariam ſecabit in Q. Quia porrò, propter ſimilitudinem triangulorum FLK & FQH, FL eſt ad LK, ut FQ ad QH; & permutando FL ad FQ, ut LK ad QH, atque FL ipſius FQ eſt dupla: erit quoque LK ipſius QH

QH dupla. Dupla autem etiam eſt Hl ipſius QH, ſiquidem æquilaterum eſt triangulum MlN: quare & Hl nec non HM, HN ipſi LK æquales erunt. Quod erat oſtendendum.

Ex his perſpicua ſunt ea, quæ ab Alberto Girardo afferuntur in libello ſupra citato, ubi docet quo pacto radix æquationis 1③ ∞ 13① + 12, in qua cubus trientis numeri radicum major eſt quadrato ſemiſſis numeri abſoluti, ſit exprimenda.



Ut autem pateat MN eſſe $\sqrt{13}$, ob 13① in æquatione, ſciendum eſt ductis rectis HM, MP triangulum HMP eſſe æquilaterum, ac proinde quadratum MR triplum eſſe quadrati HR. Quocirca cum eadem ſit ratio duplæ MR, hoc eſt, ipſius MN ad duplam HR, hoc eſt, HP, quàm ſimplæ MR ad ſimplam HR: erit quoque quadratum MN quadrati HP triplum. Unde ſi ſtatuamus radium circuli æqualem radici quadratæ ex triente numeri radicum 13, hoc eſt, ∞ $\sqrt{4\frac{1}{3}}$, liquet MN tunc fore $\sqrt{13}$. Sicut proponebatur.

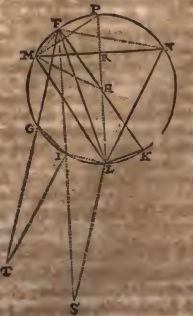
Lubet autem propoſitum ipſius ulteriùs inquirere, atque rem omnem paucis patefacere.

In quem finem ejuſmodi quæſtionem proponimus.

Circulo exiſtente FGK, *cujus diameter* FK, *in eoq́; inſcriptâ* FG, *trifariam ſecetur arcus* GK, *à diametro & inſcriptâ interceptus, in punctis* I *&* L, *& recta connectatur* FL; *datâ*

autem FH *ſeu* HK $\infty\ a$, *&* FG $\infty\ b$, *oporteat invenire* FL $\infty\ x$.

Jungantur KL, LI, & IG, ductaque FI producatur ad S, donec angulus FSL æquetur angulo IFL: eritque SL æqualis LF, & SI æqualis PL. Æqualis enim eſt SL ipſi LF [1], & SI ipſi FK, propter triangula ILS & KLF, quorum duo anguli LIS & S unius ſinguli ſunt æquales duobus LKF & LFK alterius [2], ac præterea latus IL lateri LK [3]. Eodem modo, productâ FG donec angulus FTI æquetur angulo GFI; erit ſimiliter TI æqualis IF, atque TG ipſi LF. Porrò cum ſimilia ſint triangla FHL, FLS, & FIT: erit ut HF ad FL, ita LF ad FS. Unde cum HF ſit $\infty\ a$, & FL $\infty\ x$, erit FS $\infty\ \frac{xx}{a}$, è quâ ſi auferatur SI ſeu KF $\infty\ 2a$, relinquetur IF $\infty\ \frac{xx}{a} - 2a$. Eâdem ratione, cum ſit ut HF ad FL, ita IF ad FT, erit FT $\infty\ \frac{x^3}{aa} - 2x$, è quâ ſi tollatur TG ſeu FL $\infty\ x$, remanebit GF $\infty\ \frac{x^3}{aa} - 3x$. Reſtat igitur, ut $\frac{x^3}{aa} - 3x$ adæquetur ipſi GF datæ $\infty\ b$. Quare æqualitate ordinatâ, x^3 æquabitur $3aax + aab$. Quæ æquatio ſecundæ formulæ eſt, in quâ quadratum ſemiſſis ultimi termini eſt minus cubo trientis quantitatis cognitæ penultimi: majus enim eſt a^6 quàm $\frac{1}{4}a^4bb$. Nam ſi utrobique dividamus per a^4, fit aa majus quàm $\frac{1}{4}bb$, cum, utrinque extrahendo radicem, a fiat majus quàm $\frac{1}{2}b$, ſeu $2a$ majus quàm b, Ut eſt manifeſtum, cum $2a$ dia-



[1] per 6 primi Elem.

[2] per 21 & 22 tertii Elem. nec non 13 primi Elem.

[3] per 29 tertii Elem.

a diametrum circuli referat, b autem in eodem inſcriptam GF, atque diameter omnium rectarum circulo inſcriptarum [1] ſit maxima. Undeſi a^6 æquetur $\frac{1}{4}a^4bb$, tunc quoque inſcripta GF æqualis erit diametro FK: ita ut eo caſu duæ hæ lineæ coincidant, ac eadem fiat quæſtio ac ſi ſemicircumferentia FGK in tres æquales partes ſecanda foret. Quo quidem caſu radix quæſita FL ſit latus trianguli æquilateri, eidem circulo inſcripti.

[1] per 15 tertii Elem.

E quibus plana fiunt illa, quæ ad explicationem radicis ſupradictæ æquationis 1 ③ ∞ 13 ① + 12 Albertus Girardus in medium affert. Ubi inter $4\frac{1}{3}$ (tertiam partem ipſius 13) & unitatem, mediam proportionalem invenit $\sqrt{4\frac{1}{3}}$, eamque ſemidiametrum circuli ſtatuit FH, quâ ut radio ipſum deſcribit, ac in eo deinde lineam FG adaptat æqualem $2\frac{10}{13}$, (quotienti videlicet diviſionis 12 per $4\frac{1}{3}$). In quo porrò trifariam ſecando arcum GK in punctis I & L, jungendoque FL, ait FL eſſe valorem radicis quæſitæ 1 ① æquationis propoſitæ. Dicens præterea alios duos valores ipſius ①, per — expreſſos, deſignari per rectas FM, FN, eoſque duobus modis inveniri. Juxta priorem quidem, ſi [2] centro H & intervallo LK arcus deſcribatur MN, ſecans FL in M & N; Juxta poſteriorem verò, [3] deſcribendo in circulo à puncto L triangulum æquilaterum LMN, jungendoque FM & FN. Illas enim utroque modo eaſdem inveniri, ex ſupra demonſtratis manifeſtum eſt.

[2] ut in fig. pag. 343.

[3] ut in fig. pag. 347.

Ubi præterea notat in æquatione 1 ③ ∞ 13 ① — 12 oſtenſos valores prioris æquationis radici quæſitæ propoſitæ æquationis ſatisfacere, ſi tantùm eorum ſigna + & — immutaverimus, eaque denotaverimus per — FL, + FM, & + FN. Sed hoc ex ſequentibus perſpicuum fiet. Quemadmodum etiam illud, quod ſpectat ad æquationes ſecundæ formulæ, quas inquit neminem ad ſuum uſque tempus reſolvere ſciviſſe, quæ ſecundùm Analyſin ſpecioſam Vietæ ita denotantur:

$$A \text{ cubus æqualis } \left.\begin{matrix} +BB \\ +BC \\ +CC \end{matrix}\right\} \text{ in } A \quad \left.\begin{matrix} +B \\ +C \end{matrix}\right\} \text{ in } BC.$$

Quod eodem recidit ac ſi earundem conſtitutionem ſic agnoſceres, conciperesque è duobus lateribus, puta B & C, facta eſſe tria proportionalia plana BB, BC & CC, quorum aggregatum ſit BB + BC + CC, ſeu quantitas p; & quod ſit ex medio plano

plano in aggregatum eorundem laterum ſit $\overline{B+C}$ in BC, ſeu quantitas q. Quod quidem ultimum factum ſic quoque interpretari poteris, dicendo illud produci ex multiplicatione duorum priorum planorum in latus ſecundum; vel etiam ex ſumma duorum poſteriorum planorum in latus primum: cum tria illa ſolida inter ſe æqualia ſint, ut experienti conſtabit.

Ut autem penitiùs hæc introſpiciamus, atque æquationum harum conſtitutionem agnoſcamus, ponamus $x \propto d$ ſeu $x - d \propto 0$, & rurſus $x \propto -b$ ſeu $x + b \propto 0$, ac denuo $x \propto -c$ ſeu $x + c \propto 0$, ducamuſque $x - d \propto 0$ in $x + b \propto 0$, tum verò quod inde ſit in $x + c \propto 0$, & prodibit æquatio:

$$\begin{array}{llll} x^3 - dxx - bdx - bcd \propto 0, & \text{vel } x^3 \propto + dxx & + bdx & + bcd. \\ \quad + b \quad - cd & \qquad\qquad - b & + cd & \\ \quad + c \quad + bc & \qquad\qquad - c & - bc & \end{array}$$

In qua ſi ponatur d, verus valor radicis x, æqualis $b + c$, duobus falſis valoribus ipſius x ſimul ſumptis, tunc quidem $+ d$ deſtruet $- b - c$, fietque $0\,xx$, hoc eſt, evaneſcet adfectio ſub quadrato, nec ampliùs ſeſe deſtruent. Nam cùm ex hypotheſi d æquetur $b + c$, communi multiplicatore d, fiet quoque dd æqualis $bd + cd$. At verò dd majus eſt quàm bc, quandoquidem idem valet quod $bb + 2bc + cc$, quadratum videlicet à $b + c$. Quare & $bd + cd$ majus erit quàm bc, manebitque adfectio ſub latere cum ſigno $+$. Ita ut, ſi $+ bd + cd - bc$ interpreteris per $+ p$, & $+ bcd$ per $+ q$, æquatio hanc recipiat formam: $x^3 \propto * + px + q$. Quam itaque conſtat tres admittere diverſos radicis valores, unum quidem verum ſeu $+$ quàm 0, & alios duos falſos ſeu $-$ quàm 0, qui ſimul ſumpti ipſi vero ſunt æquales.

Porrò, ut hæc æquatio tres ſemper ejuſmodi radicis valores recipiat, requiritur, ut in illâ $\frac{2}{3} p \sqrt{\frac{1}{3} p}$ non ſit minus quàm q, ſeu quod idem eſt, ut $2\sqrt{\frac{1}{3} p}$ non ſit minus quàm $\frac{3q}{p}$, ſive etiam $\frac{1}{27} p^3$ non minus quàm $\frac{1}{4} qq$. Quandoquidem, ſi p planum in tria plana dividitur proportionalia, maximum ſolidum, quod ſit ex ductu ſummæ duorum priorum vel duorum poſteriorum in latus ſecundum vel primum, eſt illud, quod ſit, cum p planum in tria plana æqualia dividitur.

Aliàs enim radix ejuſdem æquationis de unico tantùm valore explicabilis eſt, utpote vero, cum æquatio tunc non producatur ex du-

ex ductu trium ejuſmodi laterum in ſe invicem, niſi duo ſumantur fictitia ſeu non exiſtentia, quæ & impoſſibilia appellantur. Quemadmodum in exemplum afferre licet æquationem $1\,C \infty 6\,N + 40$, ubi $1\,N$ valet $+4$, cum $1\,C\ 8\ 0\,Q - 6\,N - 40 \infty 0$ dividatur per $1\,N - 4 \infty 0$, oriaturque æquatio impoſſibilis $1\,Q + 4\,N + 10 \infty 0$, quæ nullas omnino admittit radices. Niſi velis illas, quarum ſanè valor nullo modo comprehendi poteſt, utcunque tamen exprimere, ut ſcribendo $1\,N \infty -2 + \sqrt{-6}$, nec non $1\,N \infty -2 - \sqrt{-6}$. Ita ut verus valor ipſius $1\,N$ realis exiſtat & ſit 4, & duo falſi fictitii ſint $-2 + \sqrt{-6}$, & $-2 - \sqrt{-6}$.

Quòd ſi verò proponatur æquatio $1\,C \infty 6\,N + 6$, ſeu $1\,C\ 8\ 0\,Q - 6\,N - 6 \infty 0$, quæ per $1\,N +$ vel $-$ aliquo numero, ultimum terminum 6 dividente, dividi nequit, poterit neque radix ejus $1\,N$ per ullum numerum abſolutum vel fractum deſignari; ſed verum valorem admittet, qui eſt irrationalis, quique juxta ſecundam Cardani regulam (hic ante expoſitam) ſic exprimitur: $1\,N \infty \sqrt{C.}\,4 + \sqrt{C.}\,2$.

In quo porrò ſenſu æquatio prioris formulæ accipi debet, quæ nullæ determinationi eſt obnoxia. Nam ſi, verbigratiâ, proponatur $1\,C \infty -3\,N + 14$, poterit $1\,C\ 8\ 0\,Q + 3\,N - 14 \infty 0$ dividi per $1\,N - 2$, & orietur æquatio impoſſibilis $1\,Q + 2\,N + 7 \infty 0$. Unde liquet $1\,N$ valere tantùm 2, nec ullos alios valores admittere; niſi eos ſic velis exprimere $-1 + \sqrt{-6}$, & $-1 - \sqrt{-6}$.

Sin autem æquatio ejuſdem formulæ ſit $1\,C \infty -3\,N + 10$ ſeu $1\,C\ 8\ 0\,Q + 3\,N - 10 \infty 0$, quæ per $1\,N -$ aliquo numero, ultimum terminum 10 dividente, dividi nequit, valor quoque verus radicis nullo numero abſoluto vel fracto deſignari poterit. Quo igitur caſu explicabitur ſecundùm priorem Cardani regulam, hoc modo: $1\,N \infty \sqrt{C.\,\overline{\sqrt{26} + 5}} - \sqrt{C.\,\overline{26 - 5}}$.

Sed hæc mittentes veniamus ad ea, quibus ſecundæ formulæ æquationis uſum detegamus. Proponentes in eum finem hoc quod ſequitur.

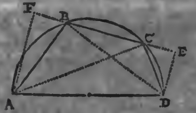
PROBLEMA.

In ſemicirculo ſupra diametrum AD *deſcripto quadrilatero* ABCD, *cognita ſint tria ejus latera* AB, BC, *&* CD: *Oporteatq; invenire diametrum ſeu quartum latus* AD.

Eſto AB ∞ a, BC ∞ b, CD ∞ c, diameter verò AD ∞ x; ducaturque recta BD, atque in BC productam perpendicularis demittatur DE.

[1] per 31 tertii Elem. [2] per 47 primi Elem. Quia itaque [1] triangulum ABD eſt rectangulum, ideoque [2] quadratum AD æquale duobus quadratis AB, BD: ſi à quadrato AD ∞ xx ſubducatur quadratum AB ∞ aa, relinquetur quadratum BD ∞ $xx - aa$. Porrò quoniam obtuſangulum eſt triangulum BDC, atque [3] quadratum BD majus quadratis BC, CD ſimul ſumptis, duplo rectangulo BCE; ſi à quadrato BD ∞ $xx - aa$ ſubducamus aggregatum quadratorum BC, CD ∞ $bb + cc$, reſtabit duplum rectangulum BCE ∞ $xx - aa - bb - cc$. Denique cum ſimilia ſint triangula ABD & CED, ſiquidem ipſa rectangula ſunt, ac angulos præterea A & DCE [4] æquales habent: erit ut DA ad AB, ita DC ad CE. Unde cum AD ſit ∞ x, AB ∞ a, & DC ∞ c: erit CE ∞ $\frac{ac}{x}$. Quæ ſi ducatur in duplam BC ∞ $2b$, fiet duplum rectangulum BCE ∞ $\frac{2abc}{x}$. Æquandum propterea duplo rectangulo BCE ante invento ∞ $xx - aa - bb - cc$. Quare $\frac{2abc}{x}$ æquabitur $xx - aa - bb - cc$. Hoc eſt ordinatâ æqualitate, erit

[3] per 12 ſecundi Elem.



[4] per 22 tertii & 13 primi Elem.

$$x^3 \infty + aax + 2abc.$$
$$+ bb$$
$$+ cc$$

Unde cum hæc æquatio ſit cubica ſecundæ formulæ, videndum deinceps an quadratum ſemiſſis ultimi termini ſit majus cubo trientis quantitatis cognitæ penultimi, an verò ipſi æquale, an

eo minus. In quem finem quæro tam hunc cubum quàm illud quadratum. Triens autem quantitatis cognitæ penultimi termini eſt $\frac{aa+bb+cc}{3}$, ejus cubus

$$\frac{a^6+{}^3a^4bb+{}^3aab^4+{}^3a^4cc+b^6+{}^6aabbcc+{}^3b^4cc+{}^3aac^4+{}^3bbc^4+c^6}{27.}$$

Quadratum autem ſemiſſis ultimi termini eſt $aabbcc$. Oportet itaque horum utriuſque relationem indagare. In quem finem productas quantitates $a^6+{}^3a^4bb+{}^3aab^4+{}^3a^4cc+b^6+{}^6aabbcc+{}^3b^4cc+{}^3aac^4+{}^3bbc^4+c^6$ & $27aabbcc$ inter ſe confero, ut ſequitur.

$3a^4bb$. $3aabbcc$. $3bbc^4$. ſunt tres proportionales in ratione aa ad cc, unde $3a^4bb+3bbc^4$ majus erit quàm $6aabbcc$, *per 25 quinti Elementorum.*

Sic $3aab^4$. $3aabbcc$. $3aac^4$. ſunt tres proportionales in ratione bb ad cc, unde $3aab^4+{}^3aac^4$ majus erit quàm $6aabbcc$.

Ut & $3a^4cc$. $3aabbcc$. $3b^4cc$. ſunt tres proportionales in ratione aa ad bb, unde $3a^4cc+3b^4cc$ majus erit quàm $6aabbcc$.

Quare & omnes ſimul omnibus ſimul erunt majores, hoc eſt, erit ${}^3a^4bb+{}^3aab^4+{}^3a^4cc+{}^3bbc^4+{}^3aac^4+{}^3b^4cc$ majus quàm ${}^{18}aabbcc$.

Unde & illius ſubtriplum $a^4bb+aab^4+a^4cc+bbc^4+aac^4+b^4cc$ majus quàm hujus ſubtriplum ${}^6aabbcc$.

Rurſus quoniam a^6. a^4bb. aab^4. b^6. ſunt proportionales continuè in ratione aa ad bb, erit a^6+b^6 majus quàm $a^4bb+aab^4$.

Sic etiam quia b^6. b^4cc. bbc^4. c^6. ſunt proportionales continuè in ratione bb ad cc, erit b^6+c^6 majus quàm $b^4cc+bbc^4$.

Similiter cum a^6. a^4cc. aac^4. c^6. ſint proportionales continuè in ratione aa ad cc, erit a^6+c^6 majus quàm $a^4cc+aac^4$.

Quare & ſimul omnes ſimul omnibus erunt majores, hoc eſt, erit $2a^6+{}^2b^6+{}^2c^6$ majus quàm $a^4bb+aab^4+b^4cc+bbc^4+a^4cc+aac^4$. Quia autem hoc ipſum majus eſt quàm ${}^6aabbcc$, ut ſupra oſtendimus, erit $2a^6+{}^2b^6+{}^2c^6$ majus quàm $6aabbcc$.

Unde & ſemiſſis $a^6+b^6+c^6$ majus quàm $3aabbcc$.

Quocirca cum $3a^4bb+3aab^4+3a^4cc+3bbc^4+3aac^4+3b^4cc$ majus ſit quàm $18aabbcc$.
ac ipſi addatur $a^6+b^6+c^6$ — — — quod majus eſt quàm $3aabbcc$.
& adhuc utrobique $6aabbcc$ — — — — — $6aabbcc$.

Fiet quoque $a^6+3a^4bb+3aab^4+3a^4cc+b^6+{}^6aabbcc+3b^4cc+3aac^4+3bbc^4+c^6$ majus quàm $27aabbcc$.

E quibus liquet cubum trientis quantitatis cognitæ penultimi termini majorem eſſe quadrato ſemiſſis ultimi, ac propterea radicem æquationis juxta regulam Cardani inveniri non poſſe.

Notandum autem porrò eſt, Problema propoſitum ſolidum eſſe, ſi tria latera data A B, BC, & CD inter ſe inæqualia ſtatuantur, cum ad æquationem cubicam reducatur, quæ diviſione ad quadratam reduci nequit. Cùm verò duo quælibet ex dictis lateribus ſunt æqualia, tunc quidem æquatio reducitur ad quadratam. Ut ſi b & c æqualia fuerint, devenietur ad æquationem: $x^3 \begin{smallmatrix} -aa \\ -{}^2bb \end{smallmatrix} x - {}^2abb \propto 0$, quæ dividi poterit per $x + a \propto 0$, qua ratione ipſa reducetur ad quadratam: $xx - ax - {}^2bb \propto 0$, quæ ulteriùs dividi nequit.

Sin autem tria latera æqualia ponantur, tunc quidem æquatio hanc accipiet formam: $x^3 - {}^3aax - {}^2a^3 \propto 0$, eaque dividi poterit per $x - {}^2a \propto 0$, orietur namque æquatio: $xx + {}^2ax + aa \propto 0$, duas admittens falſas radices, quæ ſibi invicem ſunt æquales. Unde ſequitur verum valorem radicis x eo caſu fore ${}^2a$, & duos falſos valores eſſe $-a$ & $-a$. Hoc enim manifeſtum eſt, quoniam, ſi tria latera AB, BC, & CD æqualia inter ſe extiterint, figura ABCD fit ſemi-hexagonum regulare, in quo latus quodlibet ſemidiametro eſt æquale.

Porrò ſi velimus idem Problema per numeros reſolvere, eſto AB ſeu $a \propto 24$, BC ſeu $b \propto 20$, CD ſeu $c \propto 15$, & quæratur AD $\propto x$. Hinc, cum $aa + bb + cc$ inveniatur $\propto 1201$, & ${}^2abc \propto 14400$, exurget ejuſmodi æquatio: $x^3 \propto 1201\,x + 14400$, ſeu $x^3 * 0xx - 1201x - 14400 \propto 0$. Quæ dividi poteſt per $x + 25 \propto 0$, oritur namque æquatio $xx - 25x - 576 \propto 0$, ſeu $xx \propto 25x + 576$, cujus radix x duos admittit valores, ut, $12\frac{1}{2} + \sqrt{732\frac{1}{4}}$ & $12\frac{1}{2} - \sqrt{732\frac{1}{4}}$. Ita ut radix prædictæ æquationis $x^3 \propto 1201x + 14400$ ſeu diameter quæſita AD tres recipiat diverſos valores, unum verum ſeu $+$ quàm o, ut $12\frac{1}{2} + \sqrt{732\frac{1}{4}}$; atque duos falſos ſeu $-$ quàm o, ut -25 & $12\frac{1}{2} - \sqrt{732\frac{1}{4}}$. Qui quidem ſimul ſumpti ipſi vero ſunt æquales.

Quòd ſi verò æquatio ſupra dicta $x^3 * 0xx - 1201x - 14400 \propto 0$ dividi non potuiſſet per quantitatem incognitam $x +$, vel $-$ aliquo numero ultimum terminum 14400 dividente, arguiſſet id ipſum & neque ullam ex radicibus tam veram quàm falſam

ſam ullo numero exprimi potuiſſe, ſed eam hoc caſu denotandam eſſe per rectam datum angulum vel arcum in tres æquales partes dividentem, vel alio denique modo, ut infra oſtendetur.

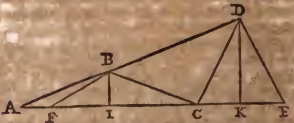
Ut ſi, exempli gratiâ, proponatur æquatio $x^3 \propto 243x + 1215$, ſeu $x^3 * 0xx - 243x - 1215 \propto 0$, quæ cum præcedenti modo dividi nequeat, poterit neque ulla ex radicibus tam vera quàm falſa ullis numeris exprimi, nec minùs per latera quorundam cuborum, quorum contentum cognoſcitur, ut docet Cardani regula. Quandoquidem ad illam revocare non licet, cum hîc cubus trientis numeri radicum major ſit quàm quadratum ſemiſſis numeri abſoluti. Adeò ut radix ejus per ſectionem anguli in tres æquales partes ſit denotanda, quemadmodum innuit Albertus Girardus. Nimirum deſcribendo circulum cujus radius FH ſeu HK ſit 9 ſeu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, in eoque adaptando rectam FG æqualem 15 ſeu $\frac{3q}{p}$, atque trifariam porrò ſecando arcum GK ſeu angulum GFK per rectam FL, quam ait veram quantitatem ipſius radicis x exprimere. Ubi præterea, ſi centro H intervallo rectæ LK arcum deſcripſerimus ſecantem ipſam FL in M & N[1], vel quod idem eſt à puncto L triangulum æquilaterum circulo inſcripſerimus LMN[2], rectæ FM & FN utramque falſam quantitatem radicis x deſignabunt.

Quod idem cum D. des Cartes in eundem ferè modum licebit exequi. Videlicet, ſi,[3] intervallo rectæ FH vel HK $\propto$ 9 ſeu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$ deſcribatur circulus, in quo, inſcriptâ rectâ FG $\propto$ 15 ſeu $\frac{3q}{p}$, arcus FMG & FNG trifariam porrò ſecentur, per rectas FM & FN, quas inquit ſimul ſumptas radici quæſitæ eſſe æquales.

[1] ut in fig. pag. 348.
[2] ut in fig. pag. 350.
[3] ut in fig. pag. 350.

Sin autem ejuſdem æquationis radicem juxta modum Vietæ exponere lubeat, oportebit duo triangula æquicrura concipere, cruribus alterum alteri æqualia, quorum ſecundi angulus, qui eſt ad baſin, triplus ſit anguli, qui eſt ad baſin primi, & intelligere baſin quidem ſecundi eſſe $7\frac{1}{2}$ ſeu $\frac{3q}{2p}$, crus verò eſſe 9 ſeu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$. x autem, de qua quæritur, eſſe baſin primi.

Quod ut cuivis obvium ſit, ſupponamus triangula illa eſſe ABC, & CDE, quorum crus quodlibet AB, BC, CD, vel DE ſit $\propto a$, & baſis ſecundi CE $\propto b$: Oporteatque invenire baſin primi AC $\propto x$.



Quia itaque demiſſis ad hoc perpendicularibus BI, DK, in triangulo rectangulo ABI, quadratum ex AI $\infty \frac{1}{4}xx$ ſubductum à quadrato ex AB ∞aa, relinquit quadratum ex BI [1]: erit quadratum ex BI $\infty aa - \frac{1}{4}xx$.

Eodem modo, in triangulo rectangulo CDK, quadrato ex CK $\infty \frac{1}{4}bb$ ſubducto à quadrato ex CD ∞aa, relinquetur $aa - \frac{1}{4}bb$, pro quadrato ex DK.

Porrò quoniam, propter ſimilitudinem triangulorum ABI & ADK [2], AI eſt ad IB, ſicut AK ad KD: erit quoque ut $\frac{1}{4}xx$, quad. ex AI, ad $aa - \frac{1}{4}xx$, quad. ex IB; ſic $xx + bx + \frac{1}{4}bb$, quad. ex AK, ad $aa - \frac{1}{4}bb$, quad. ex KD. Unde multiplicando extrema, invenietur productum $\frac{1}{4}aaxx - \frac{1}{16}bbxx$ æquale $aaxx + aabx + \frac{1}{4}aabb - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}bx^3 - \frac{1}{16}bbxx$, producto ſub mediis. Hoc eſt, demptis utrinque æqualibus, & terminis omnibus per 4 ductis, ſi ipſi deinde ad unam partem transferantur, habebitur $x^4 + bx^3 - 3aaxx - 4aabx - aabb \infty 0$. Quæ ſumma ſi porrò per $x + b \infty 0$ dividatur, obtinebitur æquatio $x^3 - 3aax - aab \infty 0$, ſeu $x^3 \infty * + 3aax + aab$. eadem nempe quæ ſuperior pag. 350, in qua cubus trientis quantitatis cognitæ penultimi termini excedit quadratum ſemiſſis ultimi termini, cujusque æquationis vera radix illic per rectam FL, hîc autem per rectam AC deſignatur.

Cæterùm quòd angulus ſecundi trianguli DCE, qui eſt ad baſin, triplus ſit anguli A, qui eſt ad baſin primi, ita patet: Æquales enim ſunt anguli A & BCA [3], propter æqualia crura AB, BC; & ob id [4] externus CBD alterutrius hujus duplus. Eſt autem hic CBD æqualis ipſi CDB [5], propter æqualitatem linearum CB, CD. Quare & CDB, id eſt, CDA ipſius A duplus eſt. Atqui [6] binis hiſce A & CDA æqualis eſt externus DCE.

1 per 47 primi Elem.
2 per 4 Sexti Elem.
3 per 5 primi Elem.
4 per 32 primi Elem.
5 per 5 primi Elem.
6 per 32 primi Elem.

DCE. Hinc, qualium partium angulus A eſt I, talium angulus CDA erit 2, & DCE 3, hoc eſt, triplus erit angulus DCE anguli A. Quemadmodum fuit propoſitum.

Denique quoniam omnes ſimiles æquationes ad æquationem præcedentis Problematis revocari queunt, poterimus quoque radicem x æquationis propoſitæ $x^3 \propto 243\,x + 1215$ ſic interpretari: dicentes eam eſſe diametrum ſemicirculi, ſupra quam deſcripto quadrilatero inæqualium laterum, tria ſuperiora in ſe invicem ducta faciant $607\frac{1}{2}$ ſeu $\frac{1}{2}q$; at verò ſumma quadratorum ex ipſis faciat 243 ſeu p.

Ubi præterea notandum, æquationem numericam 1③ ∞ 13① + 12, à Girardo allatam, non indigere ut radix ejus hoc modo exprimatur, cum in illa 1① valeat + 4, — 3, & — 1; ac ipſa æquatio 1③ 8 0② — 13① — 12 ∞ 0 per 1① — 4 ∞ 0, & per 1① + 3 ∞ 0, atque etiam per 1① + 1 ∞ 0 dividi queat. Ita ut tantùm radices earum æquationum ſecundæ formulæ juxta aliquem præcedentium modorum opus ſit exprimere, in quibus conſtat ipſas nec numero, nec Cardani regulâ exprimi poſſe.

Sed jam tempus eſt ut ad tertiam æquationum Cubicarum formulam accedamus, ubi z^3 æquatur $* + pz - q$.

Hæc autem æquatio tres diverſos radicis valores admittit, duos nempe veros & unum falſum, æqualem veris illis ſimul ſumptis, ſicut ex ejuſdem æquationis conſtitutione agnoſcere licet. Nam ſi ponamus $x \propto b$ ſeu $x - b \propto 0$, & $x \propto c$ ſeu $x - c \propto 0$, atque etiam $x \propto -d$ ſeu $x + d \propto 0$, & multiplicemus $x - b \propto 0$ per $x - c \propto 0$, ac denuo quod inde fit per $x + d \propto 0$, proveniet æquatio:

$$\begin{array}{llll} x^3 + dxx & - bdx & + bcd \propto 0, \text{ vel } x^3 \propto & - dxx + bdx - bcd. \\ \quad - b & - cd & & + b \quad + cd \\ \quad - c & + bc & & + c \quad - bc \end{array}$$

In qua ſi ponatur d, valor falſus radicis x, æqualis $b + c$, duobus veris valoribus ipſius x ſimul ſumptis, tunc quidem $b + c$ deſtruet $-d$, fietque $0\,xx$, hoc eſt, evaneſcet adfectio ſub xx, nec ampliùs ſeſe deſtruent. Nam cùm ex hypotheſi $b + c$ æquetur d, multiplicando utrinque per d, fiet quoque $bd + cd$ æquale dd. At verò dd majus eſt quàm bc, quandoquidem tantundem valet ac $bb + 2bc + cc$, quadratum videlicet à $b + c$. Quare & $bd + cd$ majus erit quàm bc, manebitque adfectio ſub x cum ſigno + [illegible]

Ita,

Ita ut, ſi $+bd+cd-bc$ interpreteris per $+p$, & $-bcd$ per $-q$; æquatio hanc induat formam: $x^3 \propto * + px - q$. Quam conſtat tres admittere differentes valores radicis x, duos quidem veros ſeu $+$ quàm 0, unum autem falſum ſeu $-$ quàm 0, æqualem veris illis ſimul ſumptis.

Porrò ut hæc æquatio recipiat ſemper tres ejuſmodi radicis valores, requiritur ut in illa $\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{1}{3}p}$ non ſit minus quàm q, ſeu $2\sqrt{\frac{1}{3}p}$ non minus quàm $\frac{3q}{p}$, ſive etiam $\frac{1}{27}p^3$ non minus quàm $\frac{1}{4}qq$. Ob rationem ſupra dictam.

Aliàs enim duo veri valores non niſi fictitii forent, nec ullus realis extaret præter falſum, qui juxta Cardani regulam ſic exprimeretur: $x \propto \sqrt{C.\, \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\, \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$.

Ut in exemplum afferre licet æquationem: $1C \propto 6N - 40$; in qua $1N$ valet -4, cum $1C$ 8 $0Q - 6N + 40 \propto 0$ dividi queat per $1N + 4 \propto 0$, oriaturque æquatio impoſſibilis $1Q - 4N + 10 \propto 0$, ſeu $1Q \propto 4N - 10$, cujus radicis valores nullo modo comprehendi poſſunt, niſi eos ſic exprimere velimus: $1N \propto 2 + \sqrt{-6}$, & $1N \propto 2 - \sqrt{-6}$. Adeò ut duo veri valores ipſius $1N$ ſint tantùm fictitii $2+\sqrt{-6}$ & $2-\sqrt{-6}$, & falſus realis ſit $\propto -4$.

E quibus patet tertiæ hujus atque ſecundæ formulæ æquationum convenientia mutuaque radicum ſuarum reciprocatio.

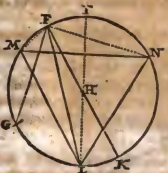
Lubet autem in uſum æquationis hujus tertiæ formulæ unum aut alterum Problema adducere, ut ſequentia manifeſtiora fiant.

PROBLEMA.

Circulo dato FMGN, *in eoq; inſcriptâ* FG, *trifariam ſecetur arcus uterque* FMG *&* FNG *in* M *&* N: *Oporteatq; invenire* FM *ſubtenſam trientis unius*, *&* FN *ſubtenſam trientis alterius.*

Eſto FH ſeu HK $\propto a$, FG $\propto b$, & FM $\propto x$, quæraturque ex HF & FM ceu datis juxta modum paginæ 91 hujus Geometriæ inſcripta FG, perinde atque ipſa eſſet incognita: quæ ideo erit $3x - \frac{x^3}{aa}$. Jam verò cum ipſa detur $\propto b$, erit $3x - \frac{x^3}{aa} \propto b$. Unde æqualitate ordinatâ, x^3 æquabitur $3aax - aab$.

Eodem



Eodem modo, ſi pro FN ponatur x, atque ex HF & FN quæramus FG, incidemus in eandem æquationem. E quibus ſequitur utramlibet ſubtenſam FM vel FN quæſitæ quantitati radicis x æqualem eſſe. Hinc cum 1③ æquetur 13① — 12, ſeu 1③ + 0② — 13① + 12 æquetur o, ac ipſa æquatio dividi poſſit per 1① — 1 ∞ o, & per 1① — 3 ∞ o, nec non per 1① + 4 ∞ o: arguit id ipſum FM fore 1, at verò FN 3. Porrò quoniam æquationes hujus tertiæ formulæ æque ac ſecundæ formulæ tres admittunt differentes valores radicis, quorum quidem duo ſimul ſumpti tertio ſunt æquales, ita & addendo duos veros 1 & 3, fiet falſus — 4, ſeu quantitas lineæ FL, quæ ipſis MF & FN ſimul ſumptis oſtenſa eſt æqualis.

Unde perſpicua fiunt ea, quæ ab Alberto Girardo in libello ſupra citato allata ſunt ad æquationum radices hujus tertiæ formulæ inveniendas. Ubi docet, illas ad ſecundum caſum ſecundæ formulæ revocandas eſſe, convertendo tantùm ſignum — numeri abſoluti in ſignum +: cum in iis ſicut hìc cubus trientis numeri radicum non minor requiratur quàm quadratum ſemiſſis numeri abſoluti. Ac proinde inventis tribus valoribus radicis quæſitæ, ſicut in ſecunda formula explicuimus, oportet tantùm illos ex o auferre ſeu eorum ſigna immutare, ut habeantur tres quæſiti hujus, in qua duo ſemper veri ſunt ſeu + quàm o, & tertius eſt falſus ſeu — quàm o, quemadmodum eſt oſtenſum.

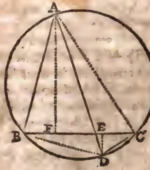
ALIUD PROBLEMA.

In circulo, cujus diameter AD, *inſcriptis tribus inæqualibus rectis lineis* AB, BC, *&* CD, *ſibi invicem contiguis, quarum quidem extremæ prodeunt ex diametri terminis* A *&* D: *Oportet ex iiſdem cognitis invenire diametrum* AD.

Ponatur ad hoc AB ∞ a, BC ∞ b, CD ∞ c, & AD ∞ x, jun-

ganturque AC, BD, & in BC, productam, ſi opùs ſit, perpendicularis demittatur DE.

Duplex autem hic occurrit caſus conſiderandus, juxta quem hæ inſcriptæ diverſimodè in circulo poſitæ intelligi poſſunt; primus, in quo rectæ AB & CD è diametri terminis prodeunt ad diverſas partes; & ſecundus, in quo ipſæ ex iiſdem terminis eductæ ſunt ad eandem partem, ſe mutuò interſecantes. In priori igitur poſitione ſi quadratum BD $\infty\, xx - aa$ ſubducatur ex ag-

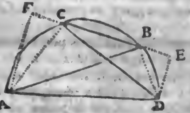


gregato quadratorum BC, CD $\infty\, bb + cc$, relinquetur [1] duplum rectangulum BCE $\infty\, bb + cc - xx + aa$. Deinde, quoniam triangula ABD & CED ſimilia ſunt, cum anguli ad B & E ſint recti, & BAD, ECD æquales [2], utpote eidem peripheriæ BD inſiſtentes: erit ut DA $\infty\, x$ ad AB $\infty\, a$, ita DC $\infty\, c$ ad CE $\infty\, \frac{ac}{x}$. Hæc autem ducta in duplam BC $\infty\, 2b$ dat duplum rectangulum BCE $\infty\, \frac{2abc}{x}$, æquale $bb + cc - xx + aa$, duplo videlicet rectangulo BCE, ante invento. Unde ordinatâ æquatione invenitur: $x^3 \infty + aax - 2abc$, æquatio cubica tertiæ for-
$+bb$
$+cc$
mulæ, in qua quadratum ſemiſſis ultimi termini eſt minus cubo $\frac{1}{3}$ quantitatis cognitæ penultimi termini, ut conſtat ex præmiſſo Problemate paginæ 354.

In ſecunda autem poſitione, ſi à quadrato DC $\infty\, cc$ auferantur quadrata DB, BC $\infty\, xx - aa + bb$, relinquetur [3] duplum rectangulum CBE $\infty\, cc - xx + aa - bb$. Cæterùm, quoniam rurſus

[1] per 13 ſecundi Elem.
[2] per 21 tertii Elem.
[3] per 12 ſecundi Elem.

Digitized by Google



ruſus propter ſimilitudinem triangulorum ABD & CED, AD $\infty\, x$ eſt ad AB $\infty\, a$, ſicut DC $\infty\, c$ ad CE: erit CE $\infty\, \frac{ac}{x}$. E quâ ſubductâ CB $\infty\, b$, remanebit BE $\infty\, \frac{ac}{x} - b$. Hæc autem ſi multiplicetur per duplam CB, proveniet duplum rectangulum CBE $\infty\, \frac{2abc}{x} - 2bb$: æquale duplo rectangulo CBE ante invento $\infty\, cc - xx + aa - bb$. Unde addito utrinque bb, ordinatâque ſecundùm artem æquatione, obtinebitur eadem atque ſuperior: $x^3 \infty + aax - 2abc.$

$$\begin{matrix} + bb \\ + cc \end{matrix}$$

Quocirca cum utroque caſu in eandem incidamus æquationem, cujus radix diametrum referat AD, ſequitur quoque eam differentem ſortiri quantitatem, & ex eiſdem datis inſcriptis pro diverſa earum poſitione dupliciter inveniri.

Ubi præterea notandum eſt, Problema propoſitum eſſe ſolidum, ſi tres inſcriptæ AB, BC, & CD inæquales inter ſe fuerint: ſiquidem ad cubicam æquationem adſcendit, quæ diviſione ad quadratam reduci nequit. Quum verò duæ quælibet ex inſcriptis æquales ponuntur, tunc quidem æquatio inventa reducetur ad quadratam, & Problema erit planum. Statuendo enim b & c æqualia, exſurget æquatio talis: $x^3 - aax + 2abb \infty\, 0$, quæ di-

$$- 2bb$$

vidi poterit per $x - a \infty\, 0$, & orietur æquatio quadrata $xx + ax - 2bb \infty\, 0$, quæ ulteriùs non eſt reducibilis.

Si autem juxta alterutram poſitionem omnes hæ tres inſcriptæ æquales fingantur, ita ut inde deducatur æquatio $x^3 - 3aax + 2a^3 \infty\, 0$, poterit hæc ipſa dividi per $x + 2a \infty\, 0$, orieturque æquatio $xx - 2ax + aa \infty\, 0$, quæ porrò dividi poterit per $x - a \infty\, 0$, & orietur $x - a \infty\, 0$. Quoniam verò hoc caſu inſcriptæ cum diametro coincidere intelliguntur ac ipſi diametro eſſe æquales, conſtat æquationis radicem x, hoc eſt, diametrum AD duos in eo

admittere veros valores ſibi invicem æquales, qui ſinguli per unamquamque ex illis inſcriptis deſignantur; ac præterea falſum, alterutrius illius duplum.

Cæterùm ſi deſideremus propoſitum Problema per numeros reſolvere, eſto $AB \infty a \infty 24$, $BC \infty b \infty 20$, $CD \infty c \infty 15$, & quæratur $AD \infty x$. Hinc cum $aa + bb + cc$ ſit 1201, & $2abc \infty 14400$, invenietur æquatio talis: $x^3 \infty 1201x - 14400$, ſeu $x^3 * 0xx - 1201x + 14400 \infty 0$. Quæ dividi poteſt per $x - 25 \infty 0$, oritur namque æquatio $xx + 25x - 576 \infty 0$, ſeu $xx \infty -25x + 576$. Cujus porrò vera radix eſt $\sqrt{732\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$, & falſa $-\sqrt{732\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$. Ita ut diameter quæſita AD, hoc eſt, x radix prædictæ æquationis $x^3 \infty 1201x - 14400$, tres ferat differentes valores, duos ſcilicet veros ſeu $+$ quàm 0, nimirum $+25$ majorem, & $\sqrt{732\frac{1}{2}} - 12\frac{1}{2}$ minorem, & unum falſum ſeu $-$ quàm 0, nimirum $-\sqrt{732\frac{1}{4}} - 12\frac{1}{2}$, qui veris iſtis ſimul ſumptis eſt æqualis. Quocirca cum tres ſuperioris æquationis $x^3 \infty 1201x + 14400$ radices inventæ ſint -25, $12\frac{1}{2} - \sqrt{732\frac{1}{4}}$, & $12\frac{1}{2} + \sqrt{732\frac{1}{4}}$, patet eas tantùm ex 0 eſſe auferendas, ſeu earum ſigna eſſe immutanda, ad habendes tres radices hujus poſterioris æquationis.

Quòd ſi verò hæc ipſa æquatio $x^3 * 0xx - 1201x + 14400 \infty 0$ dividi non potuiſſet per quantitatem incognitam $x +$ vel $-$ aliquo numero ultimum terminum 14400 dividente, argumentum fuiſſet quòd & nulla radicum tam vera quàm falſa ullo numero fuiſſet explicabilis, ſed eam tunc deſignandam eſſe per rectam datum angulum vel arcum in tres æquales partes dividentem, vel alio denique modo, ut infra oſtendetur.

Ut ſi in exemplum proponatur æquatio $x^3 \infty 2700x - 32400$, ſeu $x^3 * 0xx - 2700x + 32400 \infty 0$, quæ cum præcedenti modo dividi nequeat, poterit quoque valor radicis x, ſive is verus ſive falſus fuerit, nullis numeris exprimi, nec per latera quorundam cuborum, quorum contentum cognoſcitur, ut docent Cardani regulæ. Quippe illum ad has non revocare licet, cum ipſæ exigant ut cubus trientis numeri radicum à quadrato ſemiſſis numeri abſoluti auferatur, qui quidem cubus hîc major datur. Adeò ut radices ejus per rectas ſubtendentes trientem anguli vel arcus dati ſint denotandæ, ut vult D. des Cartes, atque ut etiam Albertus Girardus innuit. Scilicet deſcribendo circulum cujus radius

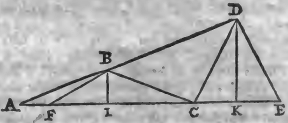
FH

FH ſeu HK ſit 30 ſeu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$, in eoque accommodando rectam FG $\propto$ 36 ſeu $\frac{3q}{p}$, atque deinde triſariam ſecando utrumque arcum FMG & FNG per rectas FM & FN. Nam uti circulus, cujus radius 30 per inſcriptam 36 in duos inæquales arcus diſpeſcitur, ita quoque incognita quantitas x duplicem verum valorem ſortitur, ſitque alterutra è ſubtenſis FM vel FN, tam trientis FM minoris arcus FMG, quàm trientis FN majoris FNG: Falſus autem ejuſdem valor æqualis eſt veris illis ſimul ſumptis, atque per rectam FL deſignatur.

Quos binos radicis valores cum Vieta aliâ porrò ratione explicare licet, ut ſequitur.

Duo intelligantur triangula æquicrura, cruribus alterum alteri æqualia, quorum ſecundi angulus, qui eſt ad baſin, ſit triplus anguli, qui eſt ad baſin primi, & baſis ſecundi intelligatur eſſe 18 ſeu $\frac{3q}{2p}$, crus verò 30 ſeu $\sqrt{\frac{1}{3}p}$. x autem de qua quæritur, eſſe baſin dimidiam primi, multatam continuatámve longitudine ejus rectæ, cujus quadratum eſt æquale triplo quadrato altitudinis primi.

Quod ut perſpicuum fiat, fingantur triangula illa eſſe ABC & CDE, quorum (ut ante) crus quodlibet AB, BC, CD, vel DE ſit $\propto a$, & baſis ſecundi CE ſit $\propto b$. Demiſſis autem in iis perpendicularibus BI, DK, ſumatur BF æqualis duplæ BI: eritque FI recta, cujus quadratum eſt æquale triplo quadrato altitudinis primi.



Quibus ita poſitis, ut inveniatur AF, liquet, ſi pro ea ponamus y, & pro AC, ut ante, ponamus x, quadratum ex BI fore $\propto aa - \frac{1}{4}xx$, adeóque quadratum ex FI $\propto 3aa - \frac{3}{4}xx$. Quoniam verò ex AI $\propto \frac{1}{2}x$ ſublatâ AF $\propto y$, relinquitur FI $\propto \frac{1}{2}x - y$, cujus quadratum eſt $\frac{1}{4}xx - xy + yy$: erit $\frac{1}{4}xx - xy + yy \propto 3aa - \frac{3}{4}xx$.

 Hoc

Hoc eſt, ordinatâ æquatione, habebitur $xx \infty yx + {}^{3}aa. - yy$ Unde extractâ radice, ſit $x \infty \frac{1}{2}y \pm \sqrt{3aa - \frac{3}{4}yy}$. Hinc, ſi in æquatione olim inventa $x^3 \infty * + {}^{3}aax + aab$ in locum x ſubſtituatur valor inventus $\frac{1}{2}y \pm \sqrt{3aa - \frac{3}{4}yy}$, & in locum x^3 ejus cubus, qui eſt $\frac{9}{2}aay - y^3 \pm 3aa\sqrt{3aa - \frac{3}{4}yy}$, obtinebimus æquationem $y^3 \infty * + {}^{3}aay - aab$. Cujus ideo vera radix erit linea AF.

Eodem modo ad inveniendam FC, ſi pro ea ponamus z, atque ab ipſa tollamus IC $\infty \frac{1}{2}x$, remanebit FI $\infty z - \frac{1}{2}x$. Unde cum quadratum ejus ſit $zz - xz + \frac{1}{4}xx$: erit itidem $zz - xz + \frac{1}{4}xx \infty 3aa - \frac{3}{4}xx$. Hoc eſt, ordinatâ æquatione, habebitur $xx + zx + {}^{3}aa. - zz$ Et ſit, extractâ radice $x \infty \frac{1}{2}z \pm \sqrt{3aa - \frac{3}{4}zz}$.

Hinc ſi rurſus in æquatione olim inventa $x^3 \infty * + {}^{3}aax + aab$ in locum x ſubrogetur valor inventus $\frac{1}{2}z \pm \sqrt{-3aa - \frac{3}{4}zz}$, & in locum x^3 ejus cubus $\frac{9}{2}aaz - z^3 \pm 3aa\sqrt{3aa - \frac{3}{4}zz}$, obtinebimus æquationem $z^3 \infty * + {}^{3}aaz - aab$. Cujus ideo vera radix eſt linea FC.

Ex quibus colligitur, ſi æquatio propoſita fuerit $x^3 \infty * + {}^{3}aax - aab$, eandem duas admittere veras radices, quarum minor AF obtinetur, ſi ex AI vel IC dimidia baſe primi trianguli ABC auferatur recta FI, cujus quadratum ſit æquale triplo quadrato ejuſdem altitudinis BI; & major, ſi ad AI vel IC ipſa FI addatur. Omnino ut fuit propoſitum.

Ubi porrò advertendum, quòd, in eadem æquatione $x^3 \infty * + {}^{3}aax - aab$, ob mutuam radicum æquationis hujus tertiæ ac ſecundæ formulæ reciprocationem, tertia radix ſit falſa, quæ per AC, baſin primi trianguli ABC, deſignatur, quæque ipſis veris AF, FC ſimul ſumptis eſt æqualis. Et contra ſi æquatio fuerit $x^3 \infty * + {}^{3}aax + aab$, quòd præter veram, quæ per AC exhibetur, aliæ duæ extent falſæ, quarum minor eſt AF, & major FC, quæ ſimiliter ſimul ſumptæ ipſi veræ AC ſunt æquales.

Denique quoniam omnes ſimiles æquationes ad æquationem poſterioris Problematis revocari queunt, poterimus quoque propoſitæ æquationis $x^3 \infty 2700x - 32400$ valores radicis x ſic exprimere: Dicentes eos per diametrum circuli AD deſignari, in quo ſi inſcribantur tres rectæ lineæ inæquales AB, BC, & CD,

Vide figuras pag. 362. & 363.

ſibi

ſibi invicem contiguæ, quarum extremæ prodeunt è diametri terminis A & D, ſolidum ex ipſis tribus ſit ∞ 16200 ſeu $\frac{1}{2}q$, & ſumma quadratorum earundem ſit ∞ 2700 ſeu p. Nam quemadmodum hæ tres inſcriptæ cum diametro duobus modis girgillum referunt, & utrâque poſitione diameter duplicem quantitatem ſortitur, ita quoque ipſa in hac vel illa poſitione veram ſemper radicem deſignat. Falſa autem, ipſis veris æqualis, exhibetur per diametrum ſemicirculi, in quo deſcripto ſupra diametrum quadrilatero, tria hujus reliqua latera dictis inſcriptis ſumpta ſint æqualia. Ut ex ſuperioribus manifeſtum eſt.

Ubi advertendum inſuper reſtat, æquationem numericam 1 ③ ∞ 13 ① — 12, à Girardo propoſitam, non requirere ut radices ejus hoc modo exprimantur: cum in illa 1 ① valeat — 4, + 1, & + 3, ac ipſa æquatio 1 ③ * 0 ② — 13 ① + 12 ∞ 0 per 1 ① + 4 ∞ 0, & per 1 ① — 1 ∞ 0, nec non per 1 ① — 3 ∞ 0 dividi poſſit. Ita ut duntaxat radices earum æquationum tertiæ formulæ juxta aliquem præcedentium modorum opùs ſit exprimere, in quibus conſtat ipſas nec numero, nec Cardani regula explicari poſſe.

Unde demum cum D. des Cartes concludere licet, valorem radicum æquè facilè, immo quidem faciliùs concipi, cùm ipſe per ſubtenſas arcuum deſignatur, quorum triplum eſt datum, quàm cùm per latera certorum cuborum exprimitur, quorum non niſi contentum cognoſcitur. Præterquam quòd ad illas ſubtenſas non magis indigeamus aliquo charactere peculiari, quàm √C. ad exprimenda latera cubica, & √ ad quadrata. Adeò ut cubicarum æquationum valores radicum, qui nec numero nec per Cardani regulas exprimi queunt, allatis quidem modis clarè ac diſtinctè explicari poſſint.

Cæterùm ne quid hìc deſideretur, ſed etiam appareat, quo pacto hæ Cardani regulæ fuerint inventæ, lubet hoc loco afferre ea, quæ circa hanc rem acutiſſimus noſter Huddenius olim adinvenit, mihique coram communicavit.

Proponatur æquatio $z^3 \infty * - pz + q$; & ſit z quantitas, quam invenire oportet.

Ponatur ad hoc $z \infty x - y$ Eritque $z^3 \infty x^3 - 3xxy + 3xyy - y^3$. Unde cum & z^3 æquetur $- pz + q$: erit ſimiliter $- pz + q \infty x^3 - 3xxy + 3xyy - y^3$.

Divi-

Dividamus jam hanc æquationem in duas, nempe $-pz \propto -3xxy + 3xyy$, & $q \propto x^3 - y^3$. Quarum prima diviſa per $z \propto x - y$ dat $-p \propto -3xy$, ſeu $p \propto 3xy$; & fit $x \propto \frac{\frac{1}{3}p}{y}$. Unde, ſi in ſecunda in locum x ſubrogetur valor inventus $\frac{\frac{1}{3}p}{y}$, & in locum x^3 hujus cubus $\frac{\frac{1}{27}p^3}{y^3}$, obtinebitur $q \propto \frac{\frac{1}{27}p^3}{y^3} - y^3$. Hoc eſt, multiplicando utrinque per y^3, & ordinando æquationem, habebitur $y^6 \propto -qy^3 + \frac{1}{27}p^3$. Cujus radix, juxta pag. 6, eſt $y^3 \propto -\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$. Et fit $y \propto \sqrt{C.\,-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$. Adeoque $x \propto \frac{\frac{1}{3}p}{y}$ $\propto \frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt{C.\,-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq\,\frac{1}{27}p^3}}}$. Poſueramus autem $z \propto x - y$. Erit itaque $z \propto \frac{\frac{1}{3}p}{\sqrt{C.\,-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}} - \sqrt{C.\,-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$. Qui ſanè valor eo Cardani ſimplicior cenſeri poteſt, ſiquidem ad hunc obtinendum radix cubica ſemel tantùm eſt extrahenda. Quòd ſi verò ipſius z valor cum Cardano ſit exhibendus, ita porrò operari licebit, videlicet in æquatione jam dictâ $q \propto x^3 - y^3$ in locum y^3 ſubſtituendo valorem inventum $-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$: habebiturque $q \propto x^3 + \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$, ſeu $x^3 \propto +\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}$. Et fit $x \propto \sqrt{C.\,+\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$. Hinc cum z ſit $\propto x - y$: erit $z \propto \sqrt{C.\,+\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}} - \sqrt{C.\,-\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{1}{27}p^3}}$.

Haud diſſimili modo procedendum in æquatione $z^3 \propto * + pz + q$, ubi z valet $\sqrt{C.\,+\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}} + \sqrt{C.\,+\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - \frac{1}{27}p^3}}$. ponendo nempe $z \propto x + y$.

Notandum verò, in his z æqualem ſupponi $x +$ vel $-y$, non autem pluribus incognitis quantitatibus, ex eo quòd plures duabus diverſis æquationibus inſtitui nequeunt; ut & $-pz$ ſupponi $\propto -3xxy + 3xyy$, ex eo quòd tunc æquationem hanc dividere licet per $z \propto x - y$, atque ſic deinde ipſarum x, y, & z valores in ſimpliciſſimis terminis invenire. Idem quoque aliter fieri poteſt, ad modum paginæ 296.

Hæc autem de Cubicarum Æquationum Reſolutione dicta ſufficiant.

AD-

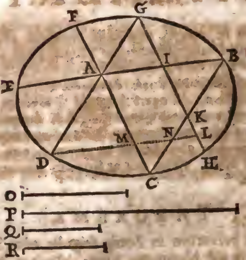
ADDITAMENTUM.

Cæterùm ut pateat, non facilè Problema aliquod datum iri, quod hanc Geometriam effugiat, aut ejuſdem Methodo ſolvi non poſſit, ſubjungam in ejus ſpecimen ſolutionem artificioſiſſimam Problematis, quod habetur in libello ingenioſiſſimo, qui operâ Jacobi à Waeſſenaer Anno 1640 ſub titulo: *Den onvviſſen Wiſ-konſtenaer, I. I. Stampioënius*, in lucem prodiit. Verùm enimverò quoniam ad ejus ſolutionem, ibi traditam, quædam admittuntur ut conceſſa, quæ demonſtrare operæ pretium duxi, viſum fuit ea ſequenti Theoremate demonſtrata exhibere.

THEOREMA.

Alicubi terrarum in Zonis frigidis, cùm Sol non occidit, defixis ad plumbum ſupra planum horizontale tribus baculis in punctis A, B, & C, ita ſe habentibus, ut, poſtquam eodem die extremitas umbræ baculi A tranſire deprehenſa fuerit per B & C, reperta item ſit extremitas umbræ baculi B tranſiiſſe per C & A, nec non ejus qui in C per A: Demonſtrandum eſt eandem tranſiiſſe pariter per B.

Quod ut fiat, ſciendum primò eſt umbram baculi A deſcripſiſſe Ellipſin vel Circulum, tranſeuntem per puncta B & C, prout videlicet hæc obſervata ponuntur in Sphæra obliqua vel parallela. Deinde junctis CA, AB, BC, productiſque BA, AC donec ejus circumferentiæ occurrant in punctis E & F, ductâque per A rectâ DG ipſi BC parallelâ, & utrinque peripheriæ occurrente in punctis D & G: evidens eſt, quòd, poſtquam umbra baculi B finiit in A, eodem puncto temporis umbra baculi A finierit quoque in E; ita ut BA ad AE, rationem, quæ eſt inter baculum B & baculum A, deſignet. Eodem modo, poſtquam umbra baculi C pertigit ad A, pertigit etiam umbra baculi A ad F; ita ut CA ad AF ſit, ſicut baculus C ad baculum A. Similiter, dum umbra ipſius B pervenit ad C, pervenit etiam umbra ipſius A ad D; ita ut BC ſit ad AD, ſicut baculus B ad baculum A. Quibus ſic intelle-



tellectis, ut conſtet, umbram baculi C tranſiiſſe item per B, oſtendendum eſt, cùm umbra baculi A incidit in G, umbram ipſius C incidiſſe ſimiliter in B, hoc eſt, baculum C ad baculum A, vel CA ad AF eſſe, ſicut CB ad AG.

Quod ipſum igitur ut fiat manifeſtum, inveniendus nobis eſt valor lineæ AG. Quocirca ad hoc ductâ GH parallelâ AC, ſecante AB, BC in I & K, & Ellipſis vel Circuli circumferentiæ occurrente in H, ponatur AB ∞ a, BC ∞ b, CA ∞ c, AF ∞ d, AE ∞ e, HK ∞ x, & AG vel CK ∞ z: eritque KB ∞ $b - z$.

Deinde, ut innoteſcat AD, quoniam baculus B eſt ad baculum A, ut BA ad AE; itemque B baculus ad A baculum, ut BC ad AD: erit ut BA ad AE, vel a ad e, ſic BC vel b ad AD. quæ ideo erit $\frac{be}{a}$. Cum autem hæc multiplicata per AG ſeu z producat $\frac{bez}{a}$ rectangulum DAG, ſimiliterque AG vel CK ſeu z multiplicata per KB ſeu $b - z$ producat $bz - zz$ rectangulum CKB; & quidem, juxta 17 prop. 3^{tii} libri Conicorum Apollonii, $\frac{bez}{a}$ ad $bz - zz$ ſit, vel $\frac{be}{a}$ ad $b - z$, ſicut ▭ FAC ad ▭ GKH ſeu

cd ad

Digitized by Google

cd ad cx, vel d ad x: fiet, multiplicando medios tum extremos, $db - dz \infty \frac{bcx}{a}$, vel $adb - adz \infty bcx$.

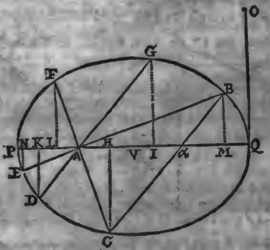
Jam, ut habeatur K I, fiat, propter ſimilitudinem triangulorum B C A & B K I, ut B C $\infty\, b$ ad C A $\infty\, c$, ita B K $\infty\, b - z$ ad K I $\infty \frac{cb - cz}{b}$. quæ ad H K ſeu x addita dat H I $\infty \frac{cb - cz + bx}{b}$; at verò ex K G vel C A ſeu c ſubducta relinquit I G $\infty \frac{cz}{b}$. ex quarum ductu unius in alteram invenitur $\Box$ G I H $\infty \frac{ccbz - cczz + cbxz}{bb}$.

Porrò, ut obtineatur A I, fiat, propter ſimilitudinem triangulorum A G I & B C A, ut B C $\infty\, b$ ad B A $\infty\, a$, ita A G $\infty\, z$ ad A I $\infty \frac{az}{b}$. quæ ad A E ſeu e addita dat E I $\infty \frac{az + eb}{b}$; at verò ex A B $\infty\, a$ ſubducta relinquit I B $\infty \frac{ab - az}{b}$. ex quarum mutua multiplicatione exurgit $\Box$ E I B $\infty \frac{aabz + abbe - aazz - abez}{bb}$. Jam cum, ut ante, per 17 3^tii^ Con. Apoll., $\Box$ F A C ſeu cd ſit ad $\Box$ G I H ſeu $\frac{ccbz - cczz + cbxz}{bb}$, ſive d ad $\frac{cbz - czz + bxz}{bb}$, ſicut $\Box$ E A B ſeu ea ad $\Box$ E I B ſeu $\frac{aabz + abbe - aazz - abez}{bb}$, ſive e ad $\frac{abz + bbe - azz - bez}{bb}$: fiet, multiplicando extremos tum medios, omiſſo priùs communi denominatore bb, $abdz + bbed - adzz - bedz \infty cbez - cezz + bexz$. Quoniam autem ſupra inventum fuit $adb - adz \infty bex$, hoc eſt, multiplicando utrinque per z, $abdz - adzz \infty bexz$: obtinebitur, ſubducendo unam æquationem ex altera, $bbed - bedz \infty cbez - cezz$, vel $bbd - bdz \infty cbz - czz$. Hoc eſt, æqualitate ritè ordinatâ, erit $zz \infty \frac{cb + db}{c}$ in $z - \frac{bbd}{c}$. Quæ æquatio juxta regulam pag. 7 reſoluta dat $z \infty b$, ut & $z \infty \frac{db}{c}$. Cum verò horum duorum valorum ipſius z duntaxat $\frac{db}{c}$ quæſitæ A G reſpondeat, hicque nos doceat c eſſe ad d, ſicut b ad z: patet, C A ad A F eſſe ſicut C B ad A G. Quod erat oſtendendum.

Sequitur Problema, ejusque ſolutio.

PROBLEMA.

TEmpore verno erectis alicubi terrarum ad perpendiculum tribus baculis in plano Horizontali in punctis A, B, & C, quorum is qui in A ſit 6 pedum, qui in B 18 pedum, & qui in C 8 pedum, exiſtente linea AB 33 pedum: Contingit quodam die extremitatem umbræ baculi A tranſire per puncta B & C, baculi autem B per puncta A & C, & baculi C per punctum A, unde fit ut etiam per punctum B ſit tranſitura. Quæritur jam quo terræ loco atque anni die hæc evenerint?



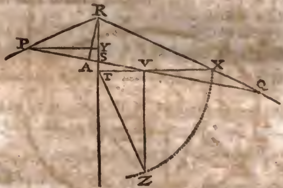
Solutio.

Ut hoc Problema ſolverem, primò conſideravi, Solem, baculi cujuſque umbrâ, eo die quo hæc obſervata ſunt, deſcripſiſſe Ellipſin, Hyperbolam, aut Parabolam.

Deinde etiam facilè perſpexi, umbram illam non Hyperbolam, nec Parabolam, ſed Ellipſin deſcripſiſſe, eamque obſervationem, quæ prima recenſetur, non matutino tempore, ſed ante mediam

mediam noctem factam fuiſſe. Quibus brevitatis cauſâ ſuppoſitis, ad Problematis ſolutionem ita procedo.

Sit PGQC Ellipſis, quam deſcripſit umbra baculi A, ejuſque maxima diameter ſit PQ, repræſentans lineam meridianam: liquet, cùm umbra baculi A pertigit ad Q, fuiſſe mediam noctem, & cùm à Q per C tranſiens pervenit ad P fuiſſe meridiem, & denique à P per G decurrens uſque in Q rurſus ad mediam noctem fuiſſe perventum. Deinde, cùm umbra baculi B incidit in A, tum quoque umbra baculi A incidit in E; ita ut AB ſit ad AE, ut 3 ad 1. Porrò, cùm umbra baculi C pertigit ad A, pertigit etiam umbra baculi A ad F; Ita ut CA ad AF ſit, ut 4 ad 3. Denique, cùm umbra baculi B terminabatur in C, terminabatur quoque umbra baculi A in D; ita ut GA ad AD ſit, ut 9 ad 4. Quibus rationibus in Ellipſi ſic explicatis, demittantur perpendiculares BM, EN, CH, FL, GI, & DK. A



Deinde, in ſecunda figura ſupponendo PRQ eſſe Conum, in quo PQ deſignet majorem prædictæ Ellipſeos diametrum, AR baculum A, RS axem Coni, angulus ASR altitudinem Poli, & angulus RPY diſtantiam inter æquatorem & locum Solis in Ecliptica: fiat in Ellipſi PQ $\infty\, q$, latus rectum QO $\infty\, r$, AQ $\infty\, p$, MQ $\infty\, x$, HQ $\infty\, y$, & KQ $\infty\, z$: eritque AM $\infty\, p - x$, AN $\infty\, \frac{1}{3}p - \frac{1}{3}x$, NQ $\infty\, \frac{4}{3}p - \frac{1}{3}x$, AH $\infty\, p - y$, AL $\infty\, \frac{3}{4}p - \frac{3}{4}y$, LQ $\infty\, \frac{7}{4}p - \frac{3}{4}y$, & KA $\infty\, z - p$; In Cono verò, AR $\infty\, 6$, ſeu 6, PQ $\infty\, q$, AV $\infty\, qu$, SV $\infty\, fuq$: eritque AS $\infty\, qu - fuq$, B & PS $\infty\, \frac{1}{2}q - fuq$.

 His

His poſitis, quæro primùm rationem, quam inter ſe habent MQ, HQ, & KQ, ut &, BM, HC, & DK: & invenio BM + HC æquari 3 DK: cum BC & AD parallelæ exiſtentes inter
C ſe ſint, ſicut baculus B ad baculum A, hoc eſt, ut 3 ad 1: ac pro-
D inde BM + HC ∞ 3 DK. E quibus porrò invenitur PA ad AQ eſſe, ut $\frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$ ad $\frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, hoc eſt, ut $\sqrt{3} - \frac{7}{8}$ ad $\sqrt{3} + \frac{7}{8}$.

Deinde beneficio AM & AB quæro perpendicularem BM, quæ etiam in aliis terminis inveniri poteſt, unde innoteſcit latus rectum r, quod poſtea quoque aliter beneficio Coni invenitur.

Ex duplicibus terminis quantitati r æqualibus quæro f, tum q, ac poſtea etiam u.

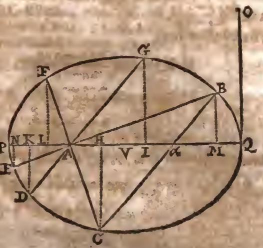
A Cognitis autem f, q, & u, quæritur ratio AS ad AR, oſtendens Poli elevationem.

Denique inveſtigatur ratio, quæ eſt inter TX & TR, hoc eſt, inter PY & YR, & inde innoteſcit diſtantia inter Æquatorem & locum Solis in Ecliptica.

Primò igitur MQ ſic inveſtigatur: Ut PQ ſeu q ad QO ſeu r, ita quadratum MQ ſeu xx ad $\frac{rxx}{q}$, quod ſubductum ab rx, rectangulo MQO, relinquit $rx - \frac{rxx}{q}$, pro quadrato ex BM, adeoque $\sqrt{rx - \frac{rxx}{q}}$ pro BM. Rurſus, ut q ad r, ita quadratum NQ $\frac{16}{9}pp - \frac{8}{9}px + \frac{1}{9}xx$ ad $\frac{\frac{16}{9}ppr - \frac{8}{9}prx + \frac{1}{9}rxx}{q}$. quod ſi ſubtrahatur à $\frac{4}{3}pr - \frac{1}{3}rx$, rectangulo NQO, & ex reliquo extrahatur radix quadrata, fiet $\sqrt{\frac{4}{3}pr - \frac{1}{3}rx \frac{-16ppr + 8prx - rxx}{9q}}$
E pro NE, ∞ $\sqrt{\frac{rx}{9} - \frac{rxx}{9q}}$, tertiæ videlicet parti ipſius BM. Quæ æquatio ſi reducatur, invenietur x ∞ $\frac{4pp - 3pq}{2p - q}$, pro MQ.

Deinde, ad inveniendam HQ, inveſtigetur priùs eodem modo HC, $\sqrt{ry - \frac{ryy}{q}}$. Tum fiat, ut CA ad AF, ſeu 4 ad 3, ita $\sqrt{ry - \frac{ryy}{q}}$ ad $\sqrt{\frac{9}{16}ry - \frac{9ryy}{16q}}$, ſeu LF. Porrò, ut q ad r, ita quadratum LQ $\frac{49pp}{16} - \frac{21py}{8} + \frac{9yy}{16}$ ad $\frac{49ppr}{16q} - \frac{21pry}{8q} + \frac{9ryy}{16q}$.

Quod



Quod ſi auferatur à $\frac{7pr}{4} - \frac{3ry}{4}$, rectangulo LQO; & ex reliquo extrahatur radix, fiet $\sqrt{\frac{7pr}{4} - \frac{3ry}{4} - \frac{49ppr}{16q} + \frac{21pry}{8q} - \frac{9ryy}{16q}}$ pro LF $\infty \sqrt{\frac{9ry}{16} - \frac{9ryy}{16q}}$, ante inventâ. Quæ æquatio reducta dat $y \infty \frac{7pp - 4pq}{6p - 3q}$, pro HQ.

Porrò, ad inveniendam KQ, inveſtigetur ut priùs KD $\sqrt{rz - \frac{rzz}{q}}$. Deinde fiat ut AD ad AG, ſeu 4 ad 9, ita $\sqrt{rz - \frac{rzz}{q}}$ ad $\sqrt{\frac{81rz}{16} - \frac{81rzz}{16q}}$, ſeu GI. Rurſus, ut 4 ad 9, ita AK $z - p$ ad $\frac{9z - 9p}{4}$, ſeu AI. quæ ex AQ ſublata relinquit IQ $\frac{13p}{4} - \frac{9z}{4}$. Porrò ut q ad r, ita quadratum QI $\frac{169pp}{16} - \frac{117pz}{8} + \frac{81zz}{16}$ ad $\frac{169ppr}{16q} - \frac{117rpz}{8q} + \frac{81rzz}{16q}$. Quod ſi auferatur à $\frac{13pr}{4} - \frac{9rz}{4}$, rectangulo IQO, & ex reliquo extrahatur radix, proveniet $\sqrt{\frac{13pr}{4} - \frac{9rz}{4} - \frac{169ppr}{16q} + \frac{117rpz}{8q} - \frac{81rzz}{16q}}$, pro

GI

GI $\propto \sqrt{\frac{81rz}{16} - \frac{81rzz}{16q}}$, ante inventæ. Quæ æquatio ſi reducatur, habebitur $z \propto \frac{13pp - 4pq}{18p - 9q}$.

Atque ita inventæ ſunt

$$MQ \text{ ſeu } x \propto \frac{4pp - 3pq}{2p - q}.$$

$$HQ \text{ ſeu } y \propto \frac{7pp - 4pq}{6p - 3q}.$$

$$KQ \text{ ſeu } z \propto \frac{13pp - 4pq}{18p - 9q}.$$

Ad inveniendas jam BM, HC, & DK, quoniam ante inventa eſt BM $\sqrt{rx - \frac{rxx}{q}}$, loco x ſubſtituatur $\frac{4pp - 3pq}{2p - q}$, & $\frac{16p^4 - 24p^3q + 9ppqq}{4pp - 4pq + qq}$ loco xx, fietque BM

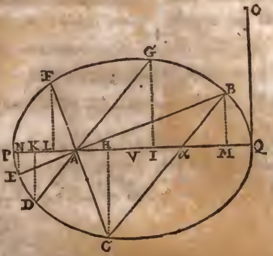
$$\sqrt{\frac{-16p^4r + 32p^3qr - 19ppqqr + 3pq^3r}{4ppq - 4pqq + q^3}}$$

Eodem modo, quoniam HC inventa eſt $\sqrt{ry - \frac{ryy}{q}}$, loco y ſcribatur $\frac{7pp - 4pq}{6p - 3q}$, & $\frac{49p^4 - 56qp^3 + 16ppqq}{36pp - 36pq + 9qq}$ loco yy, eritque HC $\sqrt{\frac{-49p^4r + 98p^3qr - 61ppqqr + 12pq^3r}{36ppq - 36pqq + 9q^3}}$.

Similiter, quoniam DK inventa eſt $\sqrt{rz - \frac{rzz}{q}}$, loco z ponatur $\frac{13pp - 4pq}{18p - 9q}$, & $\frac{169p^4 - 104p^3q + 16ppqq}{324pp - 324pq + 81qq}$ loco zz, fietque DK $\sqrt{\frac{-169p^4r + 338p^3qr - 205ppqqr + 36pq^3r}{324ppq - 324pqq + 81q^3}}$.

Quibus inventis, facile eſt invenire rationem ipſius PA ad AQ. Cum enim 3 DK æquetur BM + HC, ut ſupra dictum eſt: hinc inventos terminos ad eandem denominationem reduco, utpote ipſius HC, multiplicando tam numeratorem, quàm denominatorem ipſius BM per $\sqrt{9}$, & denominatorem ipſius DK dividendo per 3, fietque omiſſo communi denominatore, pro BM $\sqrt{-144p^4r + 288p^3qr - 171ppqqr + 27pq^3r}$, pro

Digitized by Google



pro HC $\sqrt{-49p^4r + 98p^3qr - 61ppqqr + 12pq^3r}$, & pro tripla DK $\sqrt{-169p^4r + 338p^3qr - 205ppqqr + 36pq^3r}$. Qui ſinguli ſi per pr dividantur, fiet pro BM $\sqrt{-144p^3 + 288ppq - 171pqq + 27q^3}$, pro HC $\sqrt{-49p^3 + 98ppq - 61pqq + 12q^3}$, & pro tripla DK $\sqrt{-169p^3 + 338ppq - 205pqq + 36q^3}$; & hi rurſus diviſi per $-p+q$, dant pro BM $\sqrt{-144pp + 144pq - 27qq}$, pro HC $\sqrt{-49pp + 49pq - 12qq}$, & pro tripla DK $\sqrt{-169pp + 169pq - 36qq}$. Ubi porrò, ſi ſupponatur $-p+q \infty n$, habebitur $\sqrt{+144pn - 27qq}$ pro BM, $\sqrt{+49pn - 12qq}$ pro HC, & $\sqrt{+169pn - 36qq}$ pro tripla DK, adeoque $\sqrt{144pn - 27qq} + \sqrt{49pn - 12qq} \infty \sqrt{169pn - 36qq}$. Quæ æquatio reducta dabit $ppnn \infty + \frac{33599}{768}pn - \frac{14394}{3072}$. Et fit $pn \infty \frac{1}{4}qq$, nec non $pn \infty \frac{143}{768}qq$.

Ubi ſciendum, accipiendam eſſe tantùm radicem $pn \infty \frac{143}{768}qq$: cum reliqua radix $pn \infty \frac{1}{4}qq$, reſtituendo valorem ipſius n, producat hanc æquationem $pp \infty qp - \frac{1}{4}qq$, cujus radix eſt $p \infty \frac{1}{2}q$; oſtendens baculum A in medio ipſius PQ fuiſſe conſtitutum.

 Quod

Quod ſanè fieri non poteſt, quandoquidem umbræ baculi A utrinque non ſunt æquales. Hinc, cum pn, hoc eſt, $\frac{143}{768}qq$, ſit $\infty - pp + pq$, ſeu $pp \infty qp - \frac{143}{768}qq$, cujus radix eſt $p \infty \frac{1}{2}q -$
H $\frac{7q}{16\sqrt{3}}$, nec non $p \infty \frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$: fiet pro PA $\frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, & $\frac{1}{2}q +$
I $\frac{7q}{16\sqrt{3}}$ pro AQ. Unde porro innoteſcit PA eſſe ad AQ, ſicut $\sqrt{3} - \frac{7}{8}$ ad $\sqrt{3} + \frac{7}{8}$.

Quo pacto cognoſcatur primam obſervationem matutino tempore non fuiſſe factam.

Jam ſi in Ellipſi primam obſervationem matutino tempore ponamus factam eſſe, & PQ, ut ante, lineam meridianam deſignare, atque baculi A umbram, motum Solis inſequentem, à P per F tranſiiſſe uſque ad Q (quo tempore Sol humillimus exiſtens mediam noctem efficit): erit B ex eadem parte ſumendum qua punctum C, non autem qua punctum F. Quo poſito, ſi per modum præcedentem quæratur æquatio, fiet $ppnn \infty \frac{67qq}{160}pn - \frac{143q^4}{3200}$: in qua numerus abſolutus major eſt quadrato ſemiſſis numeri radicum. Unde, cum nulla ſit linea, quæ Æquationis hujus radix eſſe poſſit: liquet, primam obſervationem matutino tempore non contigiſſe, ſed ante mediam noctem. Sicut initio fuit ſuppoſitum.

Quâ ratione innoteſcat umbram non deſcripſiſſe Hyperbolam, aut Parabolam.

Deinde, ſi ponatur, umbram baculi A deſcripſiſſe Hyperbolam, invenietur æquatio $ppnn \infty - \frac{335qq}{768}pn - \frac{143q^4}{3072}$. Quæ cum nullam admittat radicem, quæ propoſito convenire poſſit, indicio eſt, umbram non deſcripſiſſe Hyperbolam. Eodem modo oſtenditur ipſam non deſcripſiſſe Parabolam.

Quomodo inveniatur latus rectum per Ellipſin.

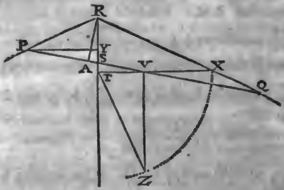
Poſtea ad inveniendum r, latus rectum Ellipſeos, quæratur AM, ut ſequitur. Quoniam ſubducendo MQ ex AQ, hoc eſt, $\frac{4pp - 3pq}{2p - q}$ ex p, relinquitur $\frac{-2pp + 2pq}{2p - q}$, pro AM: hinc ſi loco p ſubſtituatur $\frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, ante inventum, & $\frac{1}{4}qq + \frac{7qq}{16\sqrt{3}} + \frac{49qq}{768}$ loco pp; fiet $\frac{143q}{112\sqrt{3}}$ pro AM. Porrò, poſito baculo A ∞ 6 ∞ c, erit AB ∞ 33 ∞ $\frac{11c}{2}$ (eſt enim ut 6 ad 33, ſeu 2 ad 11, ſic c ad $\frac{11c}{2}$). à cujus quadrato $\frac{121cc}{4}$ ſi auferatur

$\frac{143,143,qq}{112,112,3}$, quadratum ex AM; relinquetur $\frac{121cc}{4} - \frac{143,143,qq}{112,112,3}$, pro quadrato ex BM. Subductâ autem AM $\frac{143q}{112\sqrt{3}}$ ex AQ $\frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, remanet $\frac{1}{2}q - \frac{47q}{56\sqrt{3}}$ prò MQ ſeu x. Jam cum quadratum ex BM, primò inventum, ſit $rx - \frac{rxx}{q}$, ſubrogato $\frac{1}{2}q - \frac{47q}{56\sqrt{3}}$ in locum x, & $\frac{1}{4}qq - \frac{47qq}{56\sqrt{3}} + \frac{47,47,qq}{56,56,3}$ in locum xx; K habebitur $\frac{143qr}{56,56,3}$, pro quadrato ex BM. Ac proinde, cum paulò ante pro quadrato ex BM inventum quoque ſit $\frac{121cc}{4} - \frac{143,143,qq}{112,112,3}$: erit $\frac{143qr}{56,56,3} \infty \frac{121cc}{4} - \frac{143,143,qq}{112,112,3}$. Quæ æquatio ſi reducatur, proveniet $r \infty \frac{11,14,56,3cc}{13q} - \frac{143q}{4}$.

Quomodo latus rectum inveniatur per Conum.

Præterea, ad inveſtigandum latus rectum r in aliis terminis, addatur quadratum ex AS, $qqvv - 2fvvqq + ffvvqq$, ad quadratum ex AR, cc; & habebitur $cc + qqvv - 2fvvqq + ffvvqq$, pro quadrato ex RS: adeoque $\sqrt{cc + qqvv - 2fvvqq + ffvvqq}$, pro RS. quæ brevitatis cauſâ nominetur n. Deinde, quoniam, propter ſimilitudinem triangulorum ARS, TSV, & PYS, RS ſeu n eſt ad AR ſeu c, ſicut SV ſeu fvq ad TV, & PS ſeu $\frac{1}{2}q - fvq$ ad PY; invenietur $\frac{fvqc}{n}$ pro TV; & $\frac{\frac{1}{2}qc - fvqc}{n}$, pro PY, quæ additæ efficiunt $\frac{\frac{1}{2}qc}{n}$, pro TX. Rurſùs, quia, propter eandem triangulorum ſimilitudinem, RS, ſeu n, eſt ad AS ſeu $qv - fvq$, ſicut SV ſeu fvq ad ST, & PS ſeu $\frac{1}{2}q - fvq$ ad SY; fiet pro ST $\frac{qqvvf - ffvvqq}{n}$, & $\frac{\frac{1}{2}qqv - fvvqq - \frac{1}{2}fvqq + ffvvqq}{n}$, pro SY. quæ ab RS $\frac{cc + qqvv - 2fvvqq + ffvvqq}{n}$ ſubducta, relinquit $\frac{cc + qqvv - fvvqq + \frac{1}{2}fvqq - \frac{1}{2}qqv}{n}$, pro RY. Additis autem RS & ST, habebitur $\frac{cc + qqvv - fvvqq}{n}$ pro RT. Jam

Digitized by Google



Jam cum, ob quatuor lineas proportionales RT, RY, TX, & PY, RT multiplicata per PY tantundem producat atque RY per TX: proveniet $\frac{1}{2}cc + \frac{1}{2}qqvv - \frac{1}{2}fvvqq - ccfv - fqqv^3 + ffv^3qq \infty \frac{1}{2}cc + \frac{1}{2}qqvv - \frac{1}{2}fvvqq + \frac{1}{4}fvqq - \frac{1}{4}qqv$, adeoque $cc \infty fvvqq - qqvv \frac{+\frac{1}{4}qq}{f} - \frac{1}{4}qq$. Porrò ſubducto quadrato ex TV à quadrato ex TX vel TZ, relinquetur $\frac{\frac{1}{4}qqcc - ffvvqqcc}{nn}$ pro quadrato ex ZV, $\infty \frac{1}{4}qr$. Unde r ſic invenitur. Reſtituatur valor ipſius nn, & fit

$$\frac{\frac{1}{4}ccqq - ffvvqqcc}{cc + qqvv - 2fvvqq + ffvvqq} \infty \frac{1}{4}qr,$$

vel $ccq - ccr - 4ffvvqcc \infty qqvvr - 2fvvqqr + ffvvqqr$: itemque loco cc valor ejus jam modò inventus, & habebitur, qq utrobique exemptis, $fvvq - 4f^3v^4q - vvq + 4ffv^4q - \frac{1}{4}q + \frac{1}{4}r + ffvvq - fvvq \frac{+\frac{1}{4}q - \frac{1}{4}r}{f} \infty - fvvr + ffvvr$. Quibus demum per f multiplicatis, ſi quantitates in r ductæ ad unam partem transferantur, obtinebitur, utramque partem per $\frac{1}{4} - \frac{1}{4}f - ffvv + fvv$ dividendo, $r \infty q - 4fvvq$.

Quâ ratione, ex duplici terminorum genere ipſius r, inveniatur f. Poſtquam igitur inventa eſt $r \infty \frac{11, 14, 56, 3, cc}{139} - \frac{1439}{4}$, nec non $r \infty q - 4fvvq$, erit $\frac{11, 14, 56, 3, cc}{139} - \frac{1439}{4} \infty q - 4fvvq$.

$4fvvq$. Ex qua æquatione quæro f, hoc modo: pro $\frac{11,14,56,3}{13}$ ſcribatur brevitatis causâ d, eritque $\frac{dcc}{q} - \frac{143q}{4} \infty q - 4fvvq$. Rurſus pro $\frac{143}{4}$ ſcribatur h, & erit $\frac{dcc}{q} - hq \infty q - 4fvvq$, hoc eſt, ſubrogato $fvvqq - qqvv + \frac{\frac{1}{4}qq}{f} - \frac{1}{4}qq$ in locum cc, habebitur $dfvvq - dvvq + \frac{\frac{1}{4}dq}{f} - \frac{1}{4}dq - hq \infty q - 4fvvq$. Unde, dividendo utrinque per q, & multiplicando per f, invenietur, quantitatibus in ff ductis ad unam partem translatis, $dvvff + 4vvff \infty f + hf + \frac{1}{4}df + dvvf - \frac{1}{4}d$: adeoque ſi reſtituantur valores quantitatum d & h, atque in locum v ſubſtituatur $\frac{7}{16\sqrt{3}}$,

$\frac{317569}{2496}ff \infty \frac{137543}{208}f - \frac{6468}{13}$, vel $ff \infty \frac{33684}{6481}f - \frac{25344}{6481}$, M

cujus æquationis radix eſt $f \infty \frac{16842 - \sqrt{119398500}}{6481}$ ſeu N

$\frac{16842 - 390\sqrt{785}}{6481}$.

Deinde, ex iiſdem terminis quæro q, ut ſequitur. Reſumptâ æquatione $\frac{25872cc}{13q} - \frac{143q}{4} \infty q - 4fvvq$, loco cc reponatur valor ejus datus 36, & ubique multiplicetur per q, fietque $\frac{25872.36}{13} - \frac{143qq}{4} \infty qq - 4fvvqq$, vel $\frac{25872,36}{13} \infty qq + \frac{143qq}{4} - 4fvvqq$, adeoque $qq \infty \frac{\frac{25872,36}{13}}{1 + \frac{143}{4} - 4fvv}$. Quoniam autem inventa eſt f & v, hinc in locum $-4fvv$ ſubſtituatur $\frac{-4,7,7,16842 + 4,7,7:390\sqrt{785}}{16,6,3,6481}$,

ſeu $\frac{-196,16842 + 76440\sqrt{785}}{768,6481}$,

Quâ ratione ex iiſdem terminis ipſius v inveniatur q.

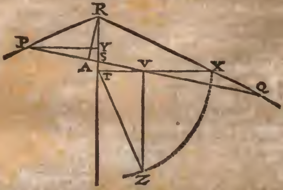
ſeu

ſeu $\frac{-24, 137543 + 24, \overline{3185 \sqrt{785}}}{24, 32, 6481}$, hoc eſt,

$\frac{-137543 + 3185 \sqrt{785}}{32, 6481}$; eritque $qq \propto \dfrac{\frac{25872, 36}{13}}{\frac{7484113 + 3185 \sqrt{785}}{32, 6481}}$,

ſeu $qq \propto \dfrac{\frac{25872, 36}{13}}{\frac{49, 13 \text{ in } \overline{11749 + 5 \sqrt{785}}}{32, 6481}}$; hoc eſt,

$\frac{25872, 36, 32, 6481}{13, 13, 49 \text{ in } \overline{11749 + 5\sqrt{785}}}$, ſeu $\frac{528, 49, 36, 32, 6481}{169, 49 \text{ in } \overline{11749 + 5\sqrt{785}}}$,
hoc eſt, $\frac{11, 48, 36, 32, 6481}{169 \text{ in } \overline{11749 + 5 \sqrt{785}}}$. Hinc poſito $cc \propto 1$, erit
$qq \propto \frac{11, 48, 32, 6481}{169 \text{ in } \overline{11749 + 5 \sqrt{785}}}$; at verò exiſtente



$cc \propto \overline{169} \text{ in } \overline{11749 + 5\sqrt{785}}$, erit $qq \propto 11, 48, 32, 6481$, adeoque $q \propto \sqrt{11, 48, 32, 6481}$, & $qv \propto \sqrt{\frac{49, 11, 48, 32, 6481}{16, 16, 3}}$,

ſeu

ſeu $\sqrt{\dfrac{49,\ 11,\ 48,\ 32,\ 6481}{16,\ 48}}$, hoc eſt, $\sqrt{\dfrac{49,\ 11,\ 32,\ 6481}{16}}$,
ſeu $\propto \sqrt{49,\ 22,\ 6481}$.

Jam, ut inveniatur ratio AS ad AR, quoniam $1 - f$ multiplicata per qv producit $qv - fvq$, atque f eſt $\dfrac{16842 - 390\sqrt{785}}{6481}$: ideo, ſi $1 - f \propto \dfrac{390\sqrt{785} - 10361}{6481}$ multiplicetur per $qv \propto \sqrt{49,\ 22,\ 6481}$, exſurget $qv - fvq \propto$ $\dfrac{\sqrt{49,\ 22,\ 6481} \text{ in } 390\sqrt{785} - 10361}{6481}$, pro AS; ſeu AS $\propto$ $\dfrac{7\sqrt{22,\ 6481} \text{ in } 13,\ 30\sqrt{785} - 13,\ 797}{\sqrt{6481,\ 6481}}$, hoc eſt, $\dfrac{7,\ 13\sqrt{22} \text{ in } 30\sqrt{785} - 797}{\sqrt{6481}}$; & AR $\propto 13$ in $\sqrt{11749 + 5\sqrt{785}}$. *Ut & ratio AS ad AR.*

Quibus per 13 diviſis, erit AS $\propto \dfrac{7\sqrt{22} \text{ in } 30\sqrt{785} - 797}{\sqrt{6481}}$, & AR $\propto \sqrt{11749 + 5\sqrt{785}}$, aut, ſi ponatur AS $\propto 7\sqrt{22}$, erit AR $\dfrac{\sqrt{6481} \text{ in } \sqrt{11749 + 5\sqrt{785}}}{30\sqrt{785} - 797}$: multiplicatoque hujus tum numeratore tum denominatore per denominatoris reſiduum, proveniet AR $\propto \dfrac{\sqrt{6481} \text{ in } \sqrt{11749 + 5\sqrt{785}} \text{ in } 797 + 30\sqrt{785}}{11,\ 6481 \text{ vel } 11.\ \sqrt{6481},\ \sqrt{6481}}$, hoc eſt, AR $\propto \dfrac{\sqrt{11749 + 5\sqrt{785}} \text{ in } 797 + 30\sqrt{785}}{11\sqrt{6481}}$, ſeu $\sqrt{\dfrac{15951432541 + 568545725\sqrt{785}}{121,\ 6481}}$, ſeu $\sqrt{20341 + 725\sqrt{785}}$. Ac proinde ſi AS $\propto 7\sqrt{22}$ ſumatur pro radio, erit AR $\propto \sqrt{20341 + 725\sqrt{785}}$, tangens anguli ASR ſive elevationis Poli, videlicet 80 grad. 45 min. circiter.

Denique ad inveſtigandam rationem TX ad TR, vel PY ad YR; cum TX ſupra inventa ſit $\dfrac{\frac{1}{2}cq}{n}$, & TR $\propto \dfrac{cc + qqvv - fvvqq}{n}$: hine

hinc ut inveniatur ratio horum terminorum, (quoniam ſuppoſitâ AR ſeu $c \infty 1$, qq eſt $\frac{11,48,32,6481}{169 \text{ in } \overline{11749+5\sqrt{785}}}$, vel, numeratore atque denominatore per $\overline{11749-5\sqrt{785}}$ multiplicato,

$qq \infty \frac{11,48,32,6481 \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}{169,138019376}$, ſeu

$\frac{48,2,176,6481 \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}{169,121,176.6481}$, hoc eſt, $\frac{48,2 \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}{169,121}$,

& $q \infty \sqrt{\frac{48.2 \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{735}}}{169,121}}$, & vv eſt $\frac{49}{256,3}$, adeoque $qqvv$

$\infty \frac{48,2,49 \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}{169.121,256,3}$, ſeu $\frac{96,49 \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}{169,121,96,8}$, hoc eſt,

$\frac{49 \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}{169,121,8}$) neglecto communi denominatore n, multiplicetur $1-f$ per $qqvv$, & fit $qqvv-fvvqq \infty$

$\frac{390\sqrt{785}-10361}{6481} \text{ in } \frac{49 \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}{169,121,8}$, ſeu

$\frac{-6517,11,6481+49,5,11,6481\sqrt{785}}{13,11,11,8,6481}$, hoc eſt, $\frac{-6517+49,5\sqrt{785}}{13,11,8}$.

Cui ſi addatur $cc \infty 1$, fiet $cc+qqvv-fvvqq \infty$ $\frac{-5373+49,5\sqrt{785}}{13,11,8}$, pro TR. Eodem modo multiplicato

$q \infty \sqrt{\frac{48,2 \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}{169,121}}$, per $\frac{1}{2}c$, ſeu $\frac{1}{2}$ (quandoquidem c eſt 1):

habebitur $\frac{1}{2}cq \infty \sqrt{\frac{24 \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}{169,121}}$, pro TX. Inventæ igitur TX & TR ſi reducantur ad eandem denominationem, ac deinde denominator communis omittatur, obtinebitur TX ∞ $\sqrt{64,24 \text{ in } \overline{11749-5\sqrt{785}}}$, & TR ∞ $49,5\sqrt{785}-5373$, ſive TX $\infty \sqrt{18046464-\sqrt{463011840000}}$, & TR $\infty \sqrt{47119625}-5373$.

P Quarum ſi TX vel PY ſumatur pro radio, erit TR vel YR tangens anguli TXR vel YPR, grad. 19, & 27 min. circiter, diſtantiæ loci Solis in Ecliptica ab Æquatore.

Cum autem in expoſita hujus Problematis ſolutione nonnulla occurrant, quæ illuſtrationem aliquam requirere videntur, atque minùs

minùs exercitatis ſcrupulum injicere poſſent; placuit ea, quæ ad eorum explicationem Vir Clariſſimus D. Eraſmius Bartholinus, Caſp. Fil. Medicinæ ac Mathematum in Academia Hafnienſi Profeſſor Regius concinnavit, paucis hîc adjicere.

Ita ut GA ad AD ſit, ut 9 ad 4.] Oſtenſum enim eſt Theoremate præcedenti CA eſſe ad AF, hoc eſt, baculum C ad baculum A, ſicut CB ad AG. Unde cum baculus A ad baculum B ſit, ſicut DA ad CB: erit quoque ex æqualitate in proportione perturbata, ut C baculus ad B baculum, hoc eſt, ut 8 ad 18, ſeu 4 ad 9, ita DA ad AG; & convertendo GA ad AD, ut 9 ad 4. A

AV ∞ qu, SV ∞ fuq.] Puta hîc unitatem ſubintelligi, quæ ſit *a*; ita ut *a* ſeu 1 ſit ad *q*, ſicut *u* ad *qu*; & rurſus *a* ſeu 1 ad *qu*, ſicut *f* ad *fuq*. B

Ac proinde BM + HC ∞ 3 DK.] Nam cum, propter ſimilitudinem triangulorum *a*BM & *a*CH, *a*B ſit ad BM, ſicut *a*C ad CH, & permutando *a*B ad *a*C, ſicut BM ad CH, componendoque BC ad *a*C, ſicut BM + CH ad CH: & propter ſimilia triangula C*a*H & DAK, *a*C ad CH, ſicut AD ad DK, permutandoque *a*C ad AD, ſicut CH ad DK; erit ex æquo, ut BC ad AD, ſic BM + CH ad DK. Unde cum BC ipſius AD tripla ſit, erit quoque BM + HC ipſius DK tripla. C *Huc refer fig. p. 372.*

E quibus porrò invenitur PA ad AQ eſſe, ut $\frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$ ad $\frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, hoc eſt, ut $\sqrt{3} - \frac{7}{8}$ ad $\sqrt{3} + \frac{7}{8}$.] Quemadmodum poſtea perſpicuum fiet. D

Tertia videlicet parti ipſius BM.] Nimirum, propter ſimilitudinem triangulorum ABM & AEN, ubi AB eſt ad BM, ſicut AE ad EN, & permutando AB ad AE, ſicut BM ad NE. Unde cum AB ad AE (ut ſupra) ſit, ſicut 3 ad 1: erit quoque BM ipſius NE tripla. E

Et hi rurſus diviſi per $-p+q$, *&c.*] Ubi notandum, ſi BM $\sqrt{-144p^3 + 288ppq - 171pqq + 27q^3}$, HC $\sqrt{-49p^3 + 98ppq - 61pqq + 12q^3}$, & tripla DK $\sqrt{-169p^3 + 338ppq - 205pqq + 36q^3}$ dividantur per $-p+q$, oriri pro BM $\sqrt{+144pp - 144pq + 27qq}$, pro F

HC $\sqrt{+49pp-49pq+12qq}$, & pro tripla DK $\sqrt{+169pp-169pq+36qq}$; non autem $\sqrt{-144pp+144pq-27qq}$, $\sqrt{-49pp+49pq-12qq}$, & $\sqrt{-169pp+169pq-36qq}$, ut habet Auctor. Ratio autem cur ita ſigna immutaverit, eſt, quòd ſigna negata prævaleant ſignis affirmatis. quod ſic oſtendi poteſt.

Etenim cum $2p-$ major ſit quàm $-q$	$2p$ major quàm q
& utrinque multiplicetur per $72q$ — — — — $72q$	utraque in ſe ducatur $2p$ — — q
erit quoque $144pq-$ major quàm $-72qq$,	& fiet $4pp$ major quàm qq
unde ſi auferatur* $144pp-$ major quàm $-36qq$,	adeoq; multiplicando utrinque per 36 — — — 36
relinquetur $144pq-144pp$ major quàm $36qq$:	
adeoque addendo utrinque $144pp$ — — — — — $144pp$	* erit $144pp$ major quam $36qq$
erit quoque $144pq$ major quàm $144pp+36qq$.	

Ac proinde $144pq$ multò major quàm $144pp+27qq$. Et ſic de reliquis. Ubi notandum, ſi loco diviſoris ſuperioris $-p+q$ ſumatur diviſor $+p-q$, eoſdem terminos inveniri, iiſdemque ſignis affectos, quemadmodum ab Auctore ſunt propoſiti.

G *Ubi porrò ſi ſupponatur* $-p+q \infty n$, *habebitur* $\sqrt{+144pn-27qq}$ *pro BM.*] Etenim exiſtente $-p+q \infty n$, ſi utrobique multiplicetur per $+144p$, fiet $-144pp+144pq \infty +144pn$: adeoque $-144pp+144pq-27qq \infty +144pn-27qq$, ac proinde $\sqrt{-144pp+144pq-27qq} \infty \sqrt{+144pn-27qq}$. Et ſic de reliquis.

H *Fiet pro PA* $\frac{1}{2}q-\frac{7q}{16\sqrt{3}}$, *&* $\frac{1}{2}q+\frac{7q}{16\sqrt{3}}$ *pro AQ.*]

Vide pag. 165. vel 284. Quoniam enim æquatio $pp \infty qp-\frac{143}{768}qq$, duas admittit veras radices, quarum ſumma eſt q, referens quantitatem cognitam ſecundi termini qp, atque deſignans lineam PQ: fit, ut ſi una $\frac{1}{2}q+\frac{7q}{16\sqrt{3}}$ ſumatur pro linea AQ, pro quâ ſuppoſita fuit p, altera $\frac{1}{2}q-\frac{7q}{16\sqrt{3}}$ ſumenda ſit pro linea PA.

I *Unde porrò innoteſcit PA eſſe ad AQ, ſicut* $\sqrt{3}-\frac{7}{8}$ *ad* $\sqrt{3}+\frac{7}{8}$.] Quod ſic liquet,

AP AQ

$\frac{1}{2}q - \frac{7p}{16\sqrt{3}}$ ad $\frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$.

Multiplicetur utrinque per 2, & fit $q - \frac{7q}{8\sqrt{3}}$ ad $q + \frac{7q}{8\sqrt{3}}$:

tum rurſus per $\sqrt{3}$, & fit $q\sqrt{3} - \frac{7q}{8}$ ad $q\sqrt{3} + \frac{7q}{8}$.

Denique dividatur utrobique per q, fietque $\sqrt{3} - \frac{7}{8}$ ad $\sqrt{3} + \frac{7}{8}$.

Subrogato $\frac{1}{2}q - \frac{47q}{56\sqrt{3}}$ *in locum* x, *&* $\frac{1}{4}qq - \frac{47qq}{56\sqrt{3}} + \frac{47,47,qq}{56,56,3}$ *in locum* xx, *habebitur* $\frac{143qr}{56,56,3}$, *pro quadrato ex* K
B M.] Id quod hoc pacto fieri poteſt.

Ex $rx \infty \frac{1}{2}qr - \frac{47qr}{56\sqrt{3}}$

ſubtrahatur $\frac{rxx}{q} \infty \frac{1}{4}qr - \frac{47qr}{56\sqrt{3}} + \frac{47,47,qr}{56,56,3}$:

& remanebit $rx - \frac{rxx}{q} \infty \frac{1}{4}qr - \frac{47,47,qr}{56,56,3}$, vel $\frac{143qr}{56,56,3}$.

Nimirum ſi reducatur $\frac{1}{4}qr$ ad denominatorem ipſius $\frac{47,47,qr}{56,56,3}$. utpote faciendo ut 4 ad 56, ſic 1 ad 14, eritque $\frac{1}{4}qr \infty \frac{14qr}{56}$. & deinde multiplicando tam numeratorem quàm denominatorem hujus fractionis per 56, 3, fiet $\frac{56,3,14qr}{56,56,3}$, vel $\frac{2352qr}{56,56,3}$: à quo ſubducto $\frac{47,47,qr}{56,56,3}$ ſeu $\frac{2209qr}{56,56,3}$, relinquetur $\frac{143qr}{56,56,3}$.

Quæ addita efficiunt $\frac{\frac{1}{2}qc}{n}$ *pro TX.*] Eſt enim PY æqualis VX. Quod facilè demonſtrari poteſt. Cum enim Sol quotidianâ ſuâ converſione circa mundi axem rectos Conos efficiat: fit, ut PY, ſi producta concipiatur, donec ipſi RQ occurrat, ab axe RT in puncto Y bifariam atque ad angulos rectos ſecetur, triangulumque efficiat, quod triangulo VXQ ſit ſimile ac ſimiliter poſitum, cujus latus PQ duplum exiſtens lateris VQ trianguli VXQ (propter punctum V, quod centrum refert Ellipſis, cujus transverſa diameter eſt PQ, & ZV ſemiſſis ſecundæ dia- L

 metri)

Digitized by Google

metri) facit ut etiam linea PY producta ipſius VX dupla ſit ſutura, adeoque PY æqualis VX.

M *Atque in locum v ſubſtituatur* $\frac{7}{16\sqrt{3}}$.] Convincitur autem v eſſe $\frac{7}{16\sqrt{3}}$: eſt enim AQ ſupra inventa $\infty \frac{1}{2}q + \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, & PA $\infty \frac{1}{2}q - \frac{7q}{16\sqrt{3}}$. Unde cum PQ ſit $\infty\ q$, & V punctum medium ipſius PQ, adeoque PV vel VQ $\infty \frac{1}{2}q$; erit AV $\infty \frac{7q}{16\sqrt{3}}$. Hinc cum AV ſuppoſita ſit $\infty\ vq$, erit $vq \infty \frac{7q}{16\sqrt{3}}$, ac proinde $v \infty \frac{7}{16\sqrt{3}}$.

N *Cujus æquationis radix f eſt* $\frac{16842 - \sqrt{119398500}}{6481}$, *ſeu* $\frac{16842 - 390\sqrt{785}}{6481}$.] Notandum hic, æquationem $ff \infty \frac{33684}{6481}f - \frac{25344}{6481}$ aliam adhuc admittere radicem, nempe $f \infty \frac{16842 + 390\sqrt{785}}{6481}$, juxta ea, quæ habentur pag. 7. Quam quidem radicem, cum major ſit quàm $v \infty \frac{7}{16\sqrt{3}}$, cujus non niſi partem deſignare debet, Author meritò neglexit. Eſſe autem $\frac{16842 + 390\sqrt{785}}{6481}$ quàm $\frac{7}{16\sqrt{3}}$ majorem, patet, ſi reducantur ad eandem denominationem, utpote ponendo $\frac{16842,7 + 390.7\sqrt{785}}{6481,16,\sqrt{3}}$, & $\frac{6481,7}{6481,16\sqrt{3}}$.

O *Ac proinde ſi AS* $\infty\ 7\sqrt{22}$ *ſumatur pro radio, erit AR* $\infty \sqrt{20341 + 725\sqrt{785}}$, *tangens anguli ASR ſive elevationis Poli, videlicet 80 grad. 45 min. circiter.*] Eſt enim $7\sqrt{22}$ in rationalibus ∞ 32, 8' 3'' 1''', circiter, & $\sqrt{20341 + 725\sqrt{785}} \infty$ 201, 6' 2'' 8''', circiter. Unde ſi fiat ut AS 32, 8' 3'' 1''' ad radium 100000, ita AR 201, 6' 2'' 8''' ad quartum 614105: erit 614105 tangens anguli ASR, proximè reſpondens tangenti grad, 80, & 45 min,

Qua-

Quarum ſi TX vel PY ſumatur pro radio, erit TR vel YR tangens anguli TXR vel YPR, grad. 19, & 27 min. circiter, diſtantia loci Solis in Ecliptica ab Æquatore.] Cum enim pro TX inventa ſit $\sqrt{18046464} - \sqrt{46301184000}$, quæ in rationalibus ferè eſt 4222, $7' 1'' 1'''$, & pro TR $\sqrt{47119625} - 5373$, quæ in rationalibus eſt 1491, $3' 7'' 4'''$ circiter: hinc, ſi fiat ut TX 4222, $7' 1'' 1'''$ ad radium 100000, ita TR 1491, $3' 7'' 4'''$ ad quartum 35318; erit 35318 tangens anguli TXR vel YPR, congruens quàm proximè tangenti grad. 19, & 27 min.

Et tantum de ſolutione Problematis, quod in ſpecimen hujus Methodi afferre viſum fuit: quæ cum talis ſit, ut ad Arithmeticæ quæſtiones enodandas, non minùs quàm ad Geometriæ Problemata reſolvenda atque conſtruenda deſerviat, non abs re fuerit, ſi Coronidis loco hic ſubjiciam regulam quandam generalem, ex eadem Methodo depromptam, extrahendi radices quaslibet ex quibuſcunque Binomiis, radicem binomiam habentibus, quæ unà cum præcedenti ſolutione tunc temporis prodiit; præſertim cum illa à nemine (quod ſciam) antea ſit inventa, nec ab aliquo ea in re cuiquam ſatisfactum; cujus demonſtrationem, qualis à me inventa eſt, breviter ſum ſubjuncturus.

Regula generalis extrahendi quaslibet radices ex quibuſcunque Binomiis, radicem binomiam habentibus.

PRÆPARATIO.

PRimo, ſi in dato Binomio reperiantur fractiones, oportet illas, multiplicando binomium per illarum denominatorem, eximere. Ut, exempli gratiâ, ad extrahendam $\sqrt{(3)}$ ex $\sqrt{242} + 12\frac{1}{2}$, multiplico binomium per 2, & fit $\sqrt{968} + 25$. Similiter ſi ſit $\sqrt{\frac{242}{5}} + \sqrt{\frac{125}{4}}$, primùm multiplico binomium per

$\sqrt{5}$, & fit $\sqrt{242} + \frac{25}{2}$, deinde per 2, ut jam factum eſt, & ſic de cæteris.

Deinde, ſi neutra pars binomii rationalis fuerit, reducendum eſt per multiplicationem aut diviſionem ad aliud binomium, cujus altera pars ſit rationalis. Id quod per multiplicationem alterutrius partis ſemper fieri poteſt; ſed breviùs plerumque per minoris numeri multiplicationem aut diviſionem. Quemadmodum $\sqrt{242} + \sqrt{243}$ multiplicari quidem poteſt per $\sqrt{242}$, & fit $242 + \sqrt{58806}$; ſed compendioſiùs per $\sqrt{2}$, & provenit $22 + \sqrt{486}$. Eodem modo $\sqrt{\textcircled{3}}\,3993 + \sqrt{\textcircled{6}}\,17578125$ poteſt bis multiplicari per $\sqrt{\textcircled{3}}\,3993$, & producitur aliud binomium, cujus abſolutus numerus eſt 3993; ſed breviùs per $\sqrt{\textcircled{3}}\,9$; & adhuc breviùs, ſi dividatur per $\sqrt{\textcircled{3}}\,3$, fietque $11 + \sqrt{125}$.

Ubi notandum, poſtquam habetur binomium, cujus una pars eſt rationalis, tunc quoque quadratum alterius partis rationale eſſe debere; aut nullam ex eo radicem, nec etiam ex alio binomio, utramque partem irrationalem habente, à quo per multiplicationem aut diviſionem deductum eſt, extrahi poſſe.

Tertiò, ad extrahendam $\sqrt{\textcircled{6}}$, oportet primò radicem quadratam extrahere, & deinde ex hac $\sqrt{\textcircled{3}}$. Et ad extrahendam $\sqrt{\textcircled{9}}$ oportet bis extrahere $\sqrt{\textcircled{3}}$. Et ſic de reliquis radicibus, quæ per numeros compoſitos, hoc eſt, qui per alios dividi poſſunt, deſignantur. Radicem verò quadratam quod attinet, regula ad illam extrahendam ſatis nota eſt: quapropter hîc tantùm opùs eſt, ut doceam, quo pacto extrahendæ ſint $\sqrt{\textcircled{3}}$, $\sqrt{\textcircled{5}}$, $\sqrt{\textcircled{7}}$, $\sqrt{\textcircled{11}}$, & ſimiles aliæ, quæ per numeros primos, hoc eſt, qui per alios dividi nequeunt, denotantur.

Poſtremò ad extrahendam $\sqrt{\textcircled{3}}$, $\sqrt{\textcircled{5}}$, $\sqrt{\textcircled{7}}$, aut ſimilem, per numerum primum deſignatam, explorandum primò eſt, utrum radix Binomium eſſe poſſit, cujus una pars ſit rationalis. Id quod innoteſcit ſubducendo quadrata partium à ſe invicem, & ex reliquo extrahendo radicem, nempe cubicam ſi ex dato binomio $\sqrt{\textcircled{3}}$ ſit extrahenda; aut ſurdeſolidam, ſi $\sqrt{\textcircled{5}}$ ſit extrahenda, & ſic de cæteris. Quod ita in poſterum, ubi radix aliqua extrahi debet, intelligendum eſt, licèt expreſsè non dicatur. Etenim ſi radix hæc numerus rationalis non fuerit, certò conſtat, radicem quæſitam parte rationali carere. Sed cum binomium adhuc eſſe poſ-

ſit,

ſit, cujus utraque pars ſit irrationalis: hinc ad eam extrahendam datum binomium per differentiam quadratorum partium erit multiplicandum, ſi de radice cubica extrahenda quæſtio fuerit; aut per quadratum hujus differentiæ, ſi de √⑤; aut per ejuſdem cubum, ſi de √⑦; aut per ipſius ſurdeſolidum, ſi de √⑪ quæratur, atque ita de cæteris. Quâ ratione aliud ſemper binomium habebitur, in quo radix differentiæ quadratorum partium erit differentia quadratorum partium prioris binomii. Ut ad extrahendam radicem cubicam ex $25 + \sqrt{968}$, ſubduco primùm 625, quadratum ex 25, à 968, & remanent 343, cujus numeri radix cubica eſt 7, numerus nimirum rationalis. Id quod arguit, radicem, modò ex dato binomio extrahi poſſit, fore binomiam, cujus una pars futura ſit rationalis. Similiter ad extrahendam √③ ex $22 + \sqrt{486}$, oportet 484, quadratum à 22, ſubducere ex 486, & ex reliquo 2 elicere radicem cubicam. Quoniam verò id fieri non poteſt, conſtat radicem cubicam ex $22 + \sqrt{486}$ parte rationali carere: ac propterea $22 + \sqrt{486}$ per 2 multiplicandam eſſe, ut habeatur binomium $44 + \sqrt{1944}$, in quo radix differentiæ quadratorum partium eſt 2. Sic ad extrahendam radicem ſurſolidam ex $11 + \sqrt{125}$, quoniam ſubductis 121 à 125, remanent 4, qui numerus ſurdeſolidus non eſt: hinc $11 + \sqrt{125}$ multiplicari debet per 16, quadratum ex 4, ut proveniat $176 + \sqrt{32000}$. In quo radix ſurſolida differentiæ quadratorum partium eſt 4. Denique ad extrahendam √⑦ ex $338 + \sqrt{114242}$, in quo differentia quadratorum partium eſt 2, quoniam hic numerus B-ſurdeſolidus non eſt: ideo datum binomium multiplicari debet per 8, hoc eſt, per cubum ex 2, & fit $2704 + \sqrt{7311488}$, in quo √⑦ differentiæ quadratorum partium eſt 2.

R E G U L A.

Per præcedentem præparationem ſemper invenitur binomium, cujus una pars, & alterius partis quadratum, nec non radix differentiæ quadratorum partium, ſunt numeri rationales integri; ex quo √③, aut √⑤, aut √⑦, &c. extrahi debet.

In quem finem inveniendus eſt numerus rationalis, radice quæſitâ paulò major; ita ut differentia non major ſit quàm $\frac{1}{2}$. Quod facilè per vulgarem Arithmeticam fieri poteſt.

Jam

Jam ſi pars rationalis dati binomii reliquâ parte major fuerit, oportet huic radici rationali addere radicem differentiæ quadratorum partium, diviſam per eandem radicem rationalem: eritque ſemiſſis maximi integri numeri, in aggregato contenti, pars rationalis radicis quæſitæ. A cujus partis quadrato ſi auferatur radix differentiæ quadratorum partium, habebitur reliquæ partis quadratum; dummodo radix ex dato binomio extrahi poſſit. Id quod facilè per multiplicationem hujus inventæ radicis experiri licet, quæ datum binomium, ſi aliqua ex eo extrahi poſſit, producere debet.

Verùm, ſi dati binomii pars rationalis reliquâ parte minor fuerit, oportet à radice rationali, quam ex toto binomio extraximus, ſubducere radicem differentiæ quadratorum partium, diviſam per eandem radicem rationalem: eritque media pars maximi integri numeri in reliquo contenti, pars rationalis, radicis quæſitæ. Ad cujus partis quadratum ſi addatur radix differentiæ quadratorum partium, habebitur quadratum reliquæ partis; modò radix fuerit binomium. Quod ex multiplicatione (ut ſupra) manifeſtum fiet.

Exempli causâ, ad extrahendam radicem cubicam ex $25 + \sqrt{968}$, cognito jam radicem cubicam differentiæ quadratorum partium eſſe 7, extraho radicem quadratam ex $\sqrt{968}$, quæ eſt major quàm 31, at minor quàm 32; deinde ad 25, numerum abſolutum, addo 31 aut 32, & fit ſumma 56 aut 57. Ex qua radicem cubicam extraho, quæ quidem minor eſt quàm 4, at major quàm $3\frac{1}{2}$; ita ut 4 ſit numerus quæſitus rationalis, verâ radice paulò major. Poſtea ex 4 ſubtraho $\frac{7}{4}$ (hoc eſt, 7, radicem cubicam differentiæ quadratorum partium, poſtquam per radicem inventam 4 eſt diviſa), & remanent $2\frac{1}{4}$. Subtraho autem, quoniam numerus abſolutus 25 minor eſt quàm $\sqrt{968}$; ſi enim eſſet major addenda fuiſſet. Maximus verò integer numerus in $2\frac{1}{4}$ contentus, eſt 2, cujus ſemiſſis eſt 1, pars rationalis, radicis. Cujus quadrato 1, addo 7, $\sqrt{(3)}$ nempe differentiæ quadratorum partium, & fit ſumma 8, quadratum alterius partis. Ita ut $1 + \sqrt{8}$ ſit $\sqrt{(3)}$ ex $25 + \sqrt{968}$, nimirum ſi $\sqrt{(3)}$ ex eo extrahi poſſit. Quod ut cognoſcatur, oportet per multiplicationem inveſtigare cubum ex $1 + \sqrt{8}$; aut ſi brevitati conſulamus, tantùm ejus partem rationalem: quod fit addendo 1, cubum partis rationalis radicis, ad triplum ejuſ-

ejuſdem partis 1, multiplicatæ per 8, quadratum alterius partis. Quod quia cum 25 parte rationali dati binomii convenit, conſtat, $1+\sqrt{8}$ eſſe veram radicem: ſi verò non conveniret, radicem extrahi non poſſe, liquidò conſtaret.

Eodem modo ad extrahendam $\sqrt{\textcircled{3}}$ ex $44+\sqrt{1944}$: radix cubica differentiæ quadratorum partium eſt 2, & radix quadrata ex 1944 major quàm 44, at minor quàm 45. Quam addo numero abſoluto 44, & fit ſumma 88 aut 89, cujus $\sqrt{\textcircled{3}}$ major eſt quàm 4, & minor quàm $4\frac{1}{2}$. Quapropter ſubtractâ $\frac{4}{9}$, radice differentiæ quadratorum partium, diviſâ per radicem rationalem, ex $4\frac{1}{2}$, pro radice rationali aſſumptâ, remanent $4\frac{1}{18}$. Et fit 2, ſemiſſis ex 4, pars rationalis radicis. cujus quadrato 4, ſi addatur 2, radix differentiæ, prodibit 6, quadratum reliquæ partis. Ut patet, addendo 8 ad ter 2, multiplicatum per 6, hoc eſt, 36; & fit ſumma 44, pars rationalis binomii dati: adeoque $2+\sqrt{6}$ radix quæſita.

Ad extrahendam $\sqrt{\textcircled{5}}$ ex $176+\sqrt{32000}$; radix ſurſolida differentiæ quadratorum partium eſt 4; radix autem ſurſolida rationalis ex dato binomio eſt $3\frac{1}{2}$, unde ſubductis 4, diviſis per $3\frac{1}{2}$, hoc eſt, $1\frac{1}{7}$, remanebunt $2+\frac{5}{14}$. Semiſſis verò ex 2 eſt 1, cujus quadratum 1 additum ad 4 efficit 5, & fit $1+\sqrt{5}$, radix ſurſolida quæſita ex $176+\sqrt{32000}$; ſaltem ſi aliqua inveniri poſſit. Id quod totius binomii multiplicatione indagari poteſt, vel breviùs, addendo ſimul; ſurdeſolidum partis rationalis, radicis; decuplum cubum ejuſdem, multiplicatum per quadratum alterius partis; & quintuplum partis rationalis, multiplicatum per quadrato-quadratum ejuſdem alterius partis. Nimirum addendo 1, 50, & 125, unde exſurgunt 176. Quod cum parti rationali dati binomii ſit æquale, ſequitur $1+\sqrt{5}$ propoſiti binomii eſſe veram radicem.

Ad extrahendam $\sqrt{\textcircled{7}}$ ex $2704+\sqrt{7311488}$; radix B-ſurſolida differentiæ quadratorum partium eſt 2; radix autem B-ſurſolida rationalis totius binomii eſt $3\frac{1}{2}$, cui addo $\frac{4}{7}$ (quoniam hic numerus abſolutus major eſt), & fit ſumma $4\frac{1}{14}$: ac proinde 2 radicis pars rationalis. A cujus quadrato 4 ſubtraho 2, radicem B-ſurſolidam differentiæ quadratorum partium, & relinquetur alterius partis quadratum 2. Porrò multiplico $2+\sqrt{2}$ B-ſurſolidè, vel breviùs, in unam ſummam colligo; 128, B-ſurſolidum ex 2;

1344, vicies & ſemel ſurſolidum ex 2, multiplicatum per quadratum ex $\sqrt{2}$; 1120, trigeſies & quinquies cubum ex 2, multiplicatum per quadrato-quadratum ex $\sqrt{2}$; & 112, ſepties 2, multiplicatum per quadrato-cubum ex $\sqrt{2}$, & provenient 2704. Unde manifeſtum fit, $2+\sqrt{2}$ eſſe radicem quæſitam.

Cæterùm obſervandum hîc eſt, poſtquam datum binomium per numerum aliquem multiplicatum aut diviſum fuerit, atque ad aliud reductum, cujus radix jam ſit inventa, quòd, ad prioris binomii radicem obtinendam, radicem inventam dividere aut multiplicare oporteat per radicem numeri, per quem binomium multiplicatum fuit aut diviſum.

Sic quoniam ad extrahendam $\sqrt{\textcircled{3}}$ ex $\sqrt{242}+12\frac{1}{2}$, ipſum per 2 multiplicavimus, & deinde hujus poſterioris binomii radicem invenimus eſſe $1+\sqrt{8}$; dividendum erit $1+\sqrt{8}$ per $\sqrt{\textcircled{3}}$ ex 2, & fiet $\sqrt{\textcircled{3}}\,\frac{1}{2}+\sqrt{\textcircled{6}}\,128$, radix cubica ex $\sqrt{242}+12\frac{1}{2}$.

Multiplicavimus $\sqrt{\frac{242}{5}}+\sqrt{\frac{125}{4}}$ per $\sqrt{5}$, & invenimus $\sqrt{242}+12\frac{1}{2}$, cujus radix eſt $\sqrt{\textcircled{3}}\,\frac{1}{2}+\sqrt{\textcircled{6}}\,128$; quâ diviſâ per $\sqrt{\textcircled{6}}\,5$, emerget $\sqrt{\textcircled{6}}\,\frac{1}{20}+\sqrt{\textcircled{6}}\,\frac{128}{5}$, pro radice ex $\sqrt{\frac{242}{5}}+\sqrt{\frac{125}{4}}$.

Multiplicatum eſt $\sqrt{242}+\sqrt{243}$, primò per $\sqrt{2}$, & deinde per 2; unde fit ut inventa radix cubica $2+\sqrt{6}$ dividenda ſit per $\sqrt{2}$, & prodibit $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, pro radice cubica quæſita ex $\sqrt{242}+\sqrt{243}$.

Diviſimus $\sqrt{\textcircled{3}}\,3993+\sqrt{\textcircled{6}}\,17578125$ per $\sqrt{\textcircled{5}}\,3$, & multiplicavimus per 16, ad extrahendam $\sqrt{\textcircled{5}}$: quare neceſſe eſt inventam radicem $1+\sqrt{5}$ dividere per $\sqrt{\textcircled{5}}\,16$, & multiplicare per $\sqrt{\textcircled{15}}\,3$, ut habeatur vera radix ſurſolida ex dato binomio.

SEQUITUR DEMONSTRATIO.

IN primis eſt oſtendendum; quòd, ſi binomium aliquod in ſe multiplicetur cubicè, proveniat ſemper aliud binomium, cujus partium quadrata, à ſe invicem ſubducta, relinquant cubum differentiæ quadratorum partium radicis ſive primi binomii. Id quod

quod manifeſtum ſit, ſupponendo binomium illud deſignari per $a \pm \sqrt{bc}$, quod in ſe multiplicatum quadratè producit binomium $aa + bc \pm 2a\sqrt{bc}$, & hoc rurſus per $a \pm \sqrt{bc}$, producit binomium $a^3 + 3abc \pm 3aa + bc\sqrt{bc}$; utpote cubum ex $a \pm \sqrt{bc}$.

Ubi notandum, quòd, licèt in binomio plures reperiantur partes, tamen non niſi pro duabus ſint habendæ, quarum una, utpote, $a^3 + 3abc$, deſignet numerum rationalem, at verò $3aa + bc\sqrt{bc}$, numerum irrationalem ſeu ſurdum. Deinde conſtat, partem rationalem $a^3 + 3abc$, compoſitam eſſe ex cubo partis rationalis radicis, & ex triplo ſolido, quod ſit ex eadem hac parte in quadratum reliquæ partis radicis: ac denique, ſi dictarum partium $a^3 + 3abc$ & $3aa + bc\sqrt{bc}$ quadrata $a^6 + 6a^4bc + 9aabbcc$ & $b^3c^3 + 6aabbcc + 9a^4bc$ à ſe invicem auferantur, relinqui $a^6 =\!= {}^3a^4bc + 3aabbcc =\!= b^3c^3$, cubum ex $aa =\!= bc$, differentiâ quadratorum partium radicis.

Signum $=\!=$ *ſignificat differentiam inter duas pluréſve quantitates, cùm non exprimitur aut cognoſcitur, penes quas ſit exceſſus.*

In numeris. Eſto $a \infty 2$, $\sqrt{bc} \infty \sqrt{6}$. Hinc multiplicato binomio $2 + \sqrt{6}$ in ſe cubicè, ſit binomium $44 + \sqrt{1944}$: in quo partium quadrata, 1936 & 1944, à ſe invicem ſubducta, relinquunt 8, cubum differentiæ quadratorum partium.

Deinde oſtendendum, binomium multiplicatum per differentiam quadratorum partium producere ſemper aliud binomium, in quo differentia quadratorum partium ſit numerus cubicus.

Quod patet ſi multiplicetur binomium $a \pm \sqrt{bc}$, per $aa =\!= bc$ differentiam quadratorum partium. Exſurgit enim binomium $a^3 =\!= abc \pm \sqrt{a^4bc =\!= 2aabbcc + b^3c^3}$: cujus partium quadrata, $a^6 =\!= 2a^4bc + aabbcc$ & $a^4bc =\!= 2aabbcc + b^3c^3$ à ſe invicem ſubducta, relinquunt $a^6 =\!= {}^3a^4bc + 3aabbcc =\!= b^3c^3$, numerum cubicum, cujus radix cubica $aa =\!= bc$, eſt, ut ſupra, differentia quadratorum partium prioris binomii $a \pm \sqrt{bc}$.

In numeris. Sit $a \infty 22$, & $\sqrt{bc} \infty \sqrt{486}$. Unde multiplicato binomio $22 + \sqrt{486}$ per differentiam quadratorum partium 2, prodibit binomium $44 + \sqrt{1944}$. in quo differentia quadratorum partium eſt 8, utpote cubus differentiæ 2, quæ eſt inter 484 & 486, partium quadrata prioris binomii $22 + \sqrt{486}$.

Quibus expoſitis, ad extrahendam $\sqrt{}$ ③ ex binomio $20 + \sqrt{392}$, in quo pars rationalis 20 eſt major reliquâ parte $\sqrt{392}$:

 cogi-

cogitetur $a^3 + 3abc$ eſſe 20, & $\overline{3aa + bc}\sqrt{bc}$ eſſe $\sqrt{392}$, ita ut $\begin{matrix} + a^3 + 3aa \\ + 3abc + bc \end{matrix}\sqrt{bc}$ deſignet datum binomium $20 + \sqrt{392}$, & radix ejus cubica $a + \sqrt{bc}$ ipſam radicem quærendam, cujus major pars ſit a, & minor $\sqrt{bc}$. Tum operare ſecundùm regulam.

$20 + \sqrt{392}$
20

ſubt. $\left\{ \begin{matrix} 400 \\ 392 \end{matrix} \right\}$ quadrata partium à ſe invicem.

reliq. 8,
2 radix cubica reliqui, ſive $aa - bc$.

Adde ad 20, partem rationalem binomii

19, præter propter valorem partis irrationalis.

& fit 39, valor dati binomii in rationalibus, circiter, utpote à vero unitate non diſcedens, quippe qui inter 39 & 40 conſiſtit. Unde radix cubica ſit major quàm 3 & minor quàm $3\frac{1}{2}$, ita ut $3\frac{1}{2}$ radicem veram non ſupra $\frac{1}{2}$ excedat. Sumatur autem quaſi eſſet vera, & æqualis $a + \sqrt{bc}$.

Et divid. 2, hoc eſt, $aa - bc$,
per $3\frac{1}{2}$, hoc eſt, $a + \sqrt{bc}$:
& fit $\frac{4}{7}$, ſive $a - \sqrt{bc}$.
add. $3\frac{1}{2}$, hoc eſt, $a + \sqrt{bc}$,

& fit ſumma $4\frac{1}{14}$, ſive $2a$, duplum partis rationalis, radicis. ſupponendo $3\frac{1}{2}$ eſſe veram radicem. Sed cum $3\frac{1}{2}$ ſit major radice verâ; ita tamen, ut differentia non ſit ſupra $\frac{1}{2}$, fit, ut $4\frac{1}{14}$ quoque duplo partis rationalis major exiſtat, & differentia minor quàm 1, ſicut inferiùs oſtenſuri ſumus. Unde cum eadem pars ſit numerus rationalis integer, ſequitur duplum ejus fore 4, utpote maximum integrum numerum in $4\frac{1}{14}$ contentum, adeoque ipſam dictam partem fore 2. Quâ inventâ, facile eſt reliquam invenire. Etenim, ſi à 4, quadrato ejuſdem partis, ſubducatur 2, radix cubica differentiæ quadratorum partium dati binomii, relinquetur 2, quadratum alterius partis: Ita ut radix inventa ſit $2 + \sqrt{2}$.

Ubi

Ubi notandum, operationem hanc ſufficere ad inveſtigandam radicem, cùm conſtat illam binomium eſſe; ſed quando id incertum fuerit, explorari poterit per multiplicationem inventi binomii in ſe cubicè, aut etiam breviùs per ſequentem operationem.

Divid. 40, hoc eſt, $2a^3 + 6abc$
per 4, hoc eſt, $2a$:
& fit quotiens 10, ſive $aa + 3bc$.
Cui addatur ter 2, ſeu 6, hoc eſt, $3aa - 3bc$.
& provenit 16, ſive $4aa$: quod eſt quadratum ſuperioris 4, nimirum duplum partis rationalis inventæ 2. Unde radix binomia erit, & duplum ejuſdem partis 4: adeoque $2 + \sqrt{2}$ radix quæſita.

Vel etiam hoc modo:
Ad 8, hoc eſt, a^3
add. 12, hoc eſt, $3abc$:
& provenit 20, ſive $a^3 + 3abc$. quod cum ſit pars rationalis dati binomii: ſequitur $2 + \sqrt{2}$ eſſe radicem quæſitam.
Omnino ut ſupra fuit expoſitum.

Similiter, ad extrahendam $\sqrt{(3)}$ ex $44 + \sqrt{1944}$, in quo pars rationalis 44 eſt minor reliquâ parte $\sqrt{1944}$; cogitetur (ut ſupra) $\begin{matrix} a^3 \\ + 3abc \end{matrix}$ eſſe 44, & $\begin{matrix} 3aa \\ + bc \end{matrix} \sqrt{bc}$ eſſe $\sqrt{1944}$, ita ut $\begin{matrix} a^3 + 3aa \\ + 3abc + bc \end{matrix} \sqrt{bc}$ deſignet datum binomium $44 + \sqrt{1944}$, & illius radix cubica $a + \sqrt{bc}$ hujus radicem quærendam, cujus a ſit minor pars, & $\sqrt{bc}$ major. Tum operare ſecundùm regulam.

$44 + \sqrt{1944}$
ſubt. $\left\{\begin{matrix} 1944 \\ 1936 \end{matrix}\right\}$ quadrata partium à ſe invicem.
reliq. 8
2, radix cubica reliqui, ſive $bc - aa$.

3 x 9 / 4	4 4 / 4 / 8

Adde ad 44 partem rationalem binomii
— — 44, præter propter valorem partis irrationalis:
& fit 88, valor binomii dati in rationalibus, circiter. quippe qui à vero unitate non abſit, cum inter 88 & 89 conſiſtat. Radix autem ejus cubica eſt major quàm 4, & minor quàm $4\frac{1}{2}$;

ita ut $4\frac{1}{2}$ ſit major radice verâ, exceſſu minore quàm $\frac{1}{2}$. Aſſumatur autem ut vera, & æqualis $a + \sqrt{bc}$.

Et divid. 2, hoc eſt, $bc - aa$,
per $4\frac{1}{2}$, hoc eſt, $\sqrt{bc} + a$:
& fit quotiens $\frac{4}{9}$, ſive $\sqrt{bc} - a$:
ſubt. { ex $4\frac{1}{2}$, hoc eſt, $\sqrt{bc} + a$,
$\frac{4}{9}$, hoc eſt, $\sqrt{bc} - a$:

& relinquitur $4\frac{1}{18}$, ſive $2a$, duplum partis rationalis radicis. videlicet ſupponendo $4\frac{1}{2}$ eſſe veram radicem. Sed cum major ſit, fit ut etiam $4\frac{1}{18}$ excedat idem duplum, differentiâ minore quàm 1; ſicut mox oſtendemus. Unde cum eadem pars ſit numerus integer rationalis: ſequitur duplum ejuſdem partis fore 4, utpote maximum integrum numerum in $4 + \frac{1}{18}$ comprehenſum: adeoque ipſam partem eſſe 2. Quâ inventâ, facile eſt reliquam partem invenire. Etenim ſi ad 4, quadratum dictæ partis, addatur 2, radix cubica differentiæ quadratorum partium binomii dati, fit ſumma 6, quadratum alterius partis: ita ut radix inventa ſit $2 + \sqrt{6}$.

Ubi (ut ſupra) notandum, non opùs eſſe ut ulteriùs operemur, poſtquam conſtat radicem extrahi poſſe, hoc eſt, ipſam binomium eſſe: quandoquidem eo caſu radix inventa ſit quæſita. Illud autem ſi ignoretur, dignoſci poterit multiplicando radicem inventam in ſe cubicè, aut etiam breviùs, hoc modo:

Divid. 88, hoc eſt, $2a^3 + 6abc$,
per 4, hoc eſt, $2a$:
& fit quotiens 22, ſive $aa + 3bc$.
Subtr. ter 2, ſive 6, hoc eſt, $3bc - 3aa$:

& relinquitur 16, ſive $4aa$, quod eſt quadratum præcedentis 4. nimirum duplæ partis rationalis inventæ 2. Id quod monſtrat, duplum ejuſdem partis eſſe 4, adeoque radicem quæſitam binomium eſſe, videlicet $2 + \sqrt{6}$. quemadmodum modò inventa fuit.

Vel etiam ſic:

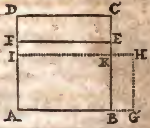
Ad 8, hoc eſt, a^3
add. 36, hoc eſt, $3abc$:

& provenit 44, ſive $a^3 + 3abc$. quod cum ſit pars rationalis dati binomii: ſequitur $2 + \sqrt{6}$ eſſe radicem quæſitam.

Ut ſupra expoſitum fuit.

Quibus explicatis, demonſtrandum nunc eſt, quod ſuperiùs polliciti ſumus.

In quem finem, pro radice cubica rationali inventa, veram, ut dictum eſt, ſuperante, ſcribatur m; at pro vera, quam in allatis exemplis per $a + \sqrt{bc}$ deſignavimus, brevitatis causâ ſcribatur v; ſimiliterque pro $aa = bc$, differentiâ quadratorum partium radicis, ſcribatur d. Hinc, cùm d diviſa per m det $\frac{d}{m}$, quæ in primo exemplo ipſi m eſt addita, & in ſecundo exemplo ab m ablata; oſtendendum eſt, differentiam, quâ $m + \frac{d}{m}$ excedit $v + \frac{d}{v}$, quod duplum partis rationalis, antea $2a$ nominatum, & quâ $m - \frac{d}{m}$ excedit $v - \frac{d}{v}$, quod ſimiliter duplum partis rationalis, ſuperiùs $2a$ nominatum, deſignat, unitate non eſſe majorem. Quod facile erit, ſi tantùm oſtendatur exceſſum ipſius $\frac{d}{v}$ ſupra $\frac{d}{m}$ minorem eſſe exceſſu ipſius m ſupra v. hoc modo:



Eſto AB ∞ v, ſupra quam deſcribatur quadratum ABCD, quod majus erit quàm d, quippe quæ tantùm differentiam deſignat, quæ eſt inter quadrata partium ipſius v, cujus quadratum earundem partium quadratis unà cum duplo ſub partibus rectangulo eſt æquale. Hinc ſi ſupponatur rectangulum ABEF ∞ d, erit AF ∞ $\frac{d}{v}$. Tum aſſumptâ AG ∞ m, ita ut BG non ſuperet $\frac{1}{2}$, factoque rectangulo AGHI ∞ d, hoc eſt, æquali rectangulo ABEF, erit AI ∞ $\frac{d}{m}$; nec non rectangulum IKEF æquale rectangulo KBGH. Atque adeò cum IK ſit major quàm KB, erit IF minor quàm BG, hoc eſt, exceſſus ipſius $\frac{d}{v}$ ſupra $\frac{d}{m}$ minor erit exceſſu ipſius m ſupra v. Quod erat demonſtrandum.

Eadem eſt ratio cùm dati binomii partes per ſignum — disjungun-

guntur. Si enim, exempli causâ, proponatur binomium $20 - \sqrt{392}$. oportet tantùm ſignum — transmutare in ſignum +, atque ut ſupra ex $20 + \sqrt{392}$ radicem cubicam extrahere, quæ eſt $2 + \sqrt{2}$; & fit $2 - \sqrt{2}$ radix cubica ex $20 - \sqrt{392}$. Quemadmodum liquet ex iis, quæ ſuperiùs ſunt oſtenſa. Et ſic de aliis.

Cæterùm, quæ hic de radice cubica oſtenſa ſunt, applicari quoque poſſunt ad ea, quæ ad reliquarum radicum extractionem ſunt allata: cum eadem ubique ſit demonſtrandi ratio, idemque proceſſus; ita ut plura hac de re afferre non ſit opùs. Tantùm ſciendum, modum, quo hæc regula inventa fuit, ad plures alias regulas, in Arithmetica hactenus incognitas, inveniendas inſervire poſſe. Qui quidem in eo conſiſtit, ut, dum in aliqua quæſtione ignoratur ratio inveniendi verum numerum, quem integrum eſſe certò conſtiterit, quæratur numerus fractus unitate verum non ſuperans: eritque maximus integer numerus, in eo contentus, is qui quæritur.

FINIS.

Celeberrimo, Amiciſſimoq; VIRO,

D. FRANCISCO à SCHOOTEN
JOHANNES HUDDE
S. P. D.

Clariſſime Vir,

VT copiam Tibi faciam rogas, prolixam illam de Reductione Æquationum epiſtolam, ſive libellum mavis, ut & alteram illam, quæ meam de Maximis & Minimis Methodum continet, Commentariis tuis in D. Carteſii Geometriam annectendi edendique. Certè, cum id non modò poſtules, ſed etiam ſeriò, ut faciam, mihi author ſis, in illam opinionem, ſive imaginationem potius, devenio, aliquid illis, tuo ſaltem judicio, contineri, quod laboribus in lucem edendi reſpondere queat; quippe cum continuo dies noctesque cogitationes tuæ circa illa, quæ aliquo commodo humanum genus beare poſſint, verſentur occupenturque, nec unquam, vel leviſſimo indicio, deprehendere potuerim, Te, ſecus ac Batavum deceat, aliud clauſum in pectore premere, aliud verò linguâ promere, in animum inducere nequaquam potui, Te, eo tantùm temporis articulo, quo has poſceres, mihique ut facerem author eſſes, à conſuetâ tibi & regiâ viâ deflexiſſe. Præterea amicitia noſtra, nec hodie nec heri nata, vinculum, tuuſque candor ſingularis, mihi ſatis ſuperque, Te nequaquam hoc ab animo tuo impetraturum fuiſſe, teſtatum faciunt. Quare, ſi hac in re Tibi obluctarer, commiſſi erroris fortaſſe inſimularer. Non pauca tamen obſtant, quo minus aſſenſum planè præbeam. Non enim Te latet, me præmultâ temporis egeſtate, quod tunc aliis ſtudiis deſtinâram, hæc non ita ad normam exigere potuiſſe, quàm illa quidem,

Digitized by Google

quæ publico uſui viritim legenda terendáque permittuntur, quaſi ſuo quodam jure poſtulant: cum non tantùm benevolorum amicorum, ſed etiam vitilitigatorum, acerborumque inimicorum, quorum ſi non in præſens, in poſterum fortaſſe copia ſuppetere poſſit, judicium ſubire debeant. At fortè inquies, quòd non ſub libelli, ſed epiſtolarum, ad Te datarum, nomine, in lucem proditura ſint, idque iis temporibus datarum, quibus aliis ſtudiis animum applicaſſem, ideoque nullo merito accuratam illam diligentiam, ſummamque curam, omniumque probationes deſiderari poſſe. Sed quid cauſæ eſt, quin paulò diutius expectem, illaque, quibuſdam præterea additis, ſub libelli nomine, accuratius elaborata publici juris faciam? maximè cum libellum quendam, (quibuſdam ſtudiis ex voto ad finem perductis,) de Natura, Reductione, Determinatione, Reſolutione, atque Inventione Æquationum *prælo ſubjicere propoſuerim, (niſi ſontica quædam cauſa denuo curſum meum remoretur,) cujus maximam jam partem, quod materiam ſpectat, ſi pauca quædam excipias, in numerato habeo, adeò ut non niſi in ordinem redigendi labor & quaſi forma deſideretur. Cum enim in animo habeam, illum ita accurare, ut à quolibet, qui modo ab ovo, quod dicitur, rem ipſam ordiri, & per numeros graduſque procedere, nec uno impetu montis verticem ſuperare cupit, intelligi & in uſum transferri poſſit; certè multo magis, procul omni dubio, utilitate ſuâ, quàm hæ epiſtolæ, quæ non niſi partem continent, eamque ita, uti dictum eſt, ſcriptam, ſe publico commendaret. Sed jam mihi reſponſionem tuam audire videor: Quid obſtat, Huddeni, quo minus utriuſque nos participes facias?*

Nam bene conveniunt unaque in ſede morantur.

Sed quid utilitatis imperfectior ille, & quaſi abortivus fœtus, tum allaturus eſt? Nullum equidem, fortaſſe inquies, ubi conſummatior ſe conſpiciendum præbuerit, ſed jam quidem quandiu ille intra penetralia Veſtæ latet, cum experientiâ in omnibus pene ſcientiis compertum ſit, illos, qui earum amore tenentur, vel quibus

bus res cura & cordi eſt, eamque quam penitiſſimè, & quam maximè fieri poteſt, circumſpectè rimari & penetrare cupiunt, raro quid amplius, quam rudi Minervâ delineatam, aut manuductionem ad eam requirant, vel nudam modò, omnibus demonſtrationibus, quaſi ſupervacaneis ornamentis, neglectis, veritatem expetant: Ita namque partim magis ad intimam rerum medullam ingenio ſuo penetrare illis datur, cum ex parte iis quoque inveſtigandi labor incumbat; partim majore voluptate perfunduntur, atque adeo multo aptiores ad aliarum rerum veritatem in apricum producendam evadunt. Cum etiam id experientia doceat, eos, nec ferè alterius generis homines, aliquid, quod communem captum ſuperet, & cornicum quaſi oculos configat, elaboratum dare poſſe. Unde illud confici videtur, ſcientiarum amatoribus ſatis ſuperque dictum, nec mihi fas licitumque eſſe, illud ſubducere aut invidere iis, quibus, ſi non aliis, aliquo modo ſatisfacere queat. quibus addere poſſes: alios, licèt multis in locis, ejus quod dicitur, veritatem demonſtrationibus fulcitam, & ad unguem elaboratam, (quod variis in locis, levi tantùm brachio attigi,) non reperturi ſint, nihilominus multas regulas ad uſum, cujus reſpectu non pauca ad amuſſim facta ſunt, transferre poſſe. Atque ita jam cauſam meam contra me ipſum egiſſe videor, ut vix mutire vel hiſcere adverſus ea, quæ dixi, mihi licitum videri poſſit, ſi in Lectores, quales eſſe decet, incidere mihi contingat: ſed cum maxima hominum pars eò propendeat, ut ante de re aliqua, quam illam clarè & diſtinctè perceperit, judicium ferat, remque potius in deteriorem, quam meliorem partem interpretetur, atque eorum judicium ſit periculi plenum, ſi circa res verſetur, quæ non exactè ſcripta, dilucidè explicata, demonſtrationibus ſubnixa ſunt; eoque magis ſi illæ paucis verbis indicatæ fuerint, ipſaque res ita ſit comparata, ut non niſi difficulter paucis verbis ita ſe comprehendi ſinat, quin alicubi aliquid, quod dubiam, variamque interpretationem ſuſcipere poſſit, irrepat, ſeque immiſceat: Cumque multo maxima pars

 eorum

eorum quæ epiſtolis meis continentur talia ſint, demonſtrationibuſque deſtituta, verbiſque paucis, uti jam dictum, indicata, cum Tibi hoc pluſquam abundè ſufficeret; Satis mihi vel hoc ſolum, cauſa videtur, epiſtolarum editioni, nulla ex parte ſuffragari. Pone verò me majori felicitate quam cuiquam ſperare fas ſit, hac in parte uti, meaſq́; literas non niſi in genuinorum veritatis amatorum, qui nihil, exceptâ veritate, inveſtigant, manus incidere, neque meos Lectores tales eſſe, qui, ubi ad dubium verbum, quaſi ſcopulum, offenderint, veritati conſonâ ſignificatione inſuper habitâ, eam magis quæ falſitatis aliquid ſecum trahit, veluti obtorto collo arripiunt, tanquam in ſinu gaudentes, & caſtellanos neſcio quos triumphos ducentes, quaſi verò jam repererint aliquid, quo ſuſpectam authoris inventionem reddant, ejuſq́; apud alios exiſtimationem elevent, ut ipſi eò majores videantur, atque ita vel alterius nominis, ſi fieri poſſit, ruinâ gradum ſibi ad gloriolam, licèt inanem, faciant: Pone inquam

Omnia jam fieri, fieri quæ poſſe negamus,

Tamen adhuc plura obſtant: nam, cum non tantùm typographicæ emendationis moleſtiam, ſatis ſæpe tædioſam, Te devoraturum, ſed & illa, quæ vernaculâ linguâ à me ſcripta ſunt, Latio Te donaturum, liberaliter, qui tuus eſt mos, obtuleris, videor mihi ſatis graviter in publica commoda peccaturus, niſi repulſam feras. Nonne enim tempus illud, quod operæ illi impendere neceſſe habebis, nec id modicum, tum propter ritè in Latinum ſermonem convertendi, tum propter rectè, ubi prælo ſubjecta fuerint, corrigendi moleſtiam, melioribus curis impendere, bonaſque horas melius collocare poſſes? niſi enim me experientia docuiſſet, quid non poſſis, ubi penitus cogitationes tuas in rem aliquam defixeris, quamque multis in rebus, quarum ego ſum conſcius, optatum Tibi exitum conſequutus fueris, facilius aſſenſum præberem. Ne igitur impræſentiarum ægrè feras, quòd is audire nolim, qui, cum tempori tuo non contemnendam partem ſuffuratus fuerit, meliora, quæ alioquin invenires, publico invidiſſe

vidiſſe videri poſſit. Atque adeo omnes hæ rationes eò me impellerent, ut, niſi à mea conſuetudine abhorreret, amicis aliquid denegare, jam ſine omni dubio repulſam ferres. Quid ergo in re dubia conſilii? Si edendi copiam faciam, haud leviter peccabo; ſin id recuſem, optimo meorum amicorum præter conſuetudinem refragabor. Sed in omnes partes mentem verſando, tandem videor mihi Gordio huic nodo gladium reperiſſe, & rationem, qua anceps malum effugere queam. Nimirum: nec aſſentior, nec repugno editioni epiſtolarum, ſed totum hoc, quicquid eſt, Tibi planè trado & committo, ut id, quod optimum Tibi videbitur, probes & ſequaris, ubi rationum mearum momenta non præoccupato, ſed liberò ac provido animo perpenderis, libraveriſque. Vale, Vir Amiciſſime, & me, quod facis, amare perge.

Datum Amſtelædami ipſis
Calendis Apriliſs 1658.

JOHANNIS HUDDENII EPISTOLA PRIMA DE REDUCTIONE ÆQUATIONUM.

Cla-

Clariſsimo, Præſtantiſsimoq́; VIRO

D. FRANCISCO SCHOTENIO JOHANNES HUDDE S. P. D.

Doleo, Vir Amiciſsime, quòd dubia valetudine & negotiis impeditus amicæ petitioni tuæ, de iis latius deducendis, quæ de Reductione Æquationum ad amicum quempiam ante aliquot annos breviter perſcripſeram, hactenus ſatisfacere nequiverim. Impræſentiarum ergo aliquid temporis (quamvis parum eo abundem) decidam, ut promiſſa ſi non in totum, ex parte ſaltem exſolvam, ne vel nimis longa te offendat mora, vel nomen malum apud te audiam; quamvis non videaris immeritò mihi crimen illud impingere poſſe, ſed tamen velim memor ſis Belgici adagii: Die noch wat betaalt / wil noch betalen / en is van de quaatſte ſlagh niet.

Quod igitur ad *Reductionem Æquationum* attinet, eam duobus modis conſidero, vel quatenus æquatio *abſolutè* conſiderari poteſt, vel *relativè* in quantum ſcilicet illam ad aliquod Problema, è quo originem duxit, referre licet.

Primò verò eam *abſolutè* conſiderabo, omiſsâ vulgari Reductione, quæ per additionem, ſubtractionem, multiplicationem, diviſionem & extractionem procedit: ponamque tantùm Reductionum Regulas quaſdam, quarum plurimas non ita pridem inveni, eaſque exemplis, ut mentem meam meliùs percipias, illuſtrabo, relictis earum demonſtrationibus, tum quòd maxima earum pars ſit perquàm inventu facilis, tum, quod rei

caput

caput eſt, quòd hominis foret otio ſuo abutentis, eas tibi (cui, quicquid in Matheſi inacceſſum aliis videtur, perſpectum eſt,) tranſmittere.

Et ut diſtinctiùs meos conceptus exprimam, primò reſtringam meas Regulas ad eas æquationes, in quibus una tantùm incognita quantitas reperitur, quam ſemper nominabo x; & in quibus Primus Terminus (Primum Terminum eum dico, in quo x plurimarum eſt dimenſionum; Secundum, ubi x eſt unâ dimenſione minor, & ſic porrò) non eſt multiplicatus aut diviſus per aliquam cognitam quantitatem, atque ſemper affectus ſigno $+$: Quia non tantùm hoc pacto omnes æquationes conſiderare conſuevimus, ſed etiam quia nullo, aut parvo admodum labore, ut cuilibet notum eſt, ad talem formam, ſi eam non habeant, redigi poſſunt.

SEQUENTES NOVEM REGULÆ SE EXTENDUNT AD OMNEM ÆQUATIONEM, SIVE IN EA IRRATIONALES QUANTITATES ET FRACTIONES, SIVE NULLÆ INVENIANTUR.

I. *REGULA.*

Si in æquatione literali una vel plures literæ ſeu quantitates cognitæ ſupponantur ∞ o, atque eo *ultimus Terminus non evaneſcat*, neque æquatio, quæ hinc reſultat, reducibilis ſit, certum eſt neque Propoſitam æquationem reducibilem fore; at verò ſi *ultimus Terminus evaneſcat*, atque etiam inde Reſultans æquatio non exiſtat reducibilis, æquatio Propoſita ad pauciores dimenſiones quàm iſta Reſultans reduci non poterit.

Exem-

Digitized by Google

Exemplum, ubi ultimus Terminus non evaneſcit.

Sic in æquatione $\begin{array}{llll} x^3 - {}^3axx & + {}^2bbx & - {}^3a^3 & \propto 0, \\ - b & + {}^3ab & - b^3 & \\ & + {}^4aa & - {}^5aab & \\ & & - {}^4bba & \end{array}$ ſi ſupponatur $a \propto 0$, reſultabit inde $x^3 - bxx + {}^2bbx - b^3 \propto 0$. Quia autem hæc æquatio reducibilis non eſt, certum eſt neque Propoſitam reducibilem fore.

Exemplum, ubi ultimus Terminus evaneſcit.

Si in æquatione $\begin{array}{lllll} x^6 - {}^6abx^4 & + {}^6c^3x^3 & + {}^6a^3bxx & - {}^{12}aac^3x & + {}^{12}c^5d \propto 0 \\ - {}^3aa & + ccd & & - {}^6abccd & - {}^{12}abbc^3 \\ & - bba & & + {}^6aab^3 & \end{array}$

ſupponantur d & $a \propto 0$, reſultat inde $x^3 + {}^6c^3 \propto 0$. Quia verò hæc æquatio trium dimenſionum reduci nequit, argumentum eſt neque Propoſitam ad pauciores dimenſiones quàm ad tres, reducibilem fore.

Sic etiam ſupponendo d & $b \propto 0$, vel tantùm $c \propto 0$, orientur hæ duæ æquationes

$$x^5 - {}^3aax^3 + {}^6c^3xx - {}^{12}aac^3 \propto 0.$$

$$\begin{array}{l} x^5 - {}^6abx^3 - bbaxx + {}^6a^3bx + {}^6aab^3 \propto 0. \\ - {}^3aa \end{array}$$

Quæ ſi reduci non poterunt, denotabunt Propoſitam æquationem, ad pauciores dimenſiones quàm ad 5, reduci non poſſe.

Dico, *illam non ad pauciores dimenſiones reducibilem fore*, quippe aliquando contingere poteſt, ut Propoſita æquatio ad eundem dimenſionum numerum ſit reducibilis, quemadmodum contingit in hac $x^4 - {}^4ax^3 + {}^4aaxx + {}^2b^3x - {}^4ab^3 \propto 0$, ſupponendo $a \propto 0$: exſurgit enim $x^3 + {}^2b^3 \propto 0$, quæ non poteſt reduci, & tamen æquatio Propoſita eſt reducibilis per $x - {}^2a \propto 0$.

II. *REGULA.*

Si in æquatione literali pro una, vel pluribus, vel omnibus literis ſeu quantitatibus cognitis, ſupponantur

Digitized by Google

tur numeri, vel aliæ quantitates ad libitum, atque eo *ultimus Terminus non evaneſcat*, neque æquatio, ſive numeralis, ſive literalis, quæ hinc reſultat, reducibilis ſit, certum eſt, neque propoſitam æquationem reducibilem fore; ſi verò *ultimus Terminus evaneſcat*, atque etiam inde Reſultans æquatio non exiſtat reducibilis, æquatio Propoſita ad pauciores dimenſiones, quàm iſta Reſultans, reduci non poterit.

Exempla, ubi ultimus Terminus non evaneſcit.

1. Si in hac æquatione

$$\begin{array}{llll} x^3 - {}^{2}axx & + {}^{3}bbx & - {}^{3}a^3 & \infty\ 0 \\ \quad\ - b & + {}^{3}ab & - {}^{3}b^3 & \\ & + {}^{4}aa & - {}^{6}aab & \\ & & + {}^{9}abb & \end{array}$$

ſupponatur $a \infty 1$, & $b \infty 1$, reſultabit inde æquatio numeralis $x^3 - {}^{3}xx + {}^{10}x - 3 \infty 0$. Quæ, quoniam non eſt reducibilis, indicabit, neque Propoſitam æquationem reducibilem eſſe.

2. Sic etiam, ſi habeamus hanc

$$\begin{array}{lll} x^5 *** & + {}^{4}aabbx & - {}^{10}a^4b \infty 0; \\ & - \frac{3a^3bb}{a-b} & - \frac{2}{3}b^3aa \end{array}$$

atque ſupponamus ${}^{4}aabb \infty \frac{3a^3bb}{a-b}$, ſeu $b \infty \frac{1}{4}a$, exſurget inde $x^5 **** - 2\frac{49}{96}a^5 \infty 0$. Quia verò hæc æquatio reduci non poteſt, certum eſt, neque Propoſitam reducibilem fore.

3. Non ſecus, ſi in æquatione

$$\begin{array}{lll} x^5 ** & - {}^{8}a^3xx & + {}^{4}ca^3x - {}^{2}a^3cd \infty 0 \\ & - {}^{2}aac & + accd \end{array}$$

ſupponatur $- {}^{8}a^3 - {}^{2}aac \infty 0$, ſeu $c \infty - {}^{4}a$; ac ${}^{4}ca^3 + accd \infty 0$, ſeu $d \infty - \frac{4aa}{c}$, fiet inde $x^5 **** + {}^{8}a^5 \infty 0$. Quoniam verò hæc æquatio non reducibilis exiſtit, *certum eſt*, &c.

4. Eodem modo ſe res habet in æquationibus, ubi quantitates Irrationales reperiuntur: nam, exempli gratiâ, ſi detur hæc æquatio $x^5 ** + xx\sqrt{\overline{\tfrac{1}{4}aa + bb}}, * + a^3b\sqrt{C.\,\overline{\tfrac{1}{8}a^3 + \tfrac{1}{27}abb}} \infty 0$, ſupponendo $\frac{1}{4}aa + bb \infty 0$, ſeu $bb \infty - \frac{1}{4}aa$, reſultabit $x^5 **** + a^3b\sqrt{C.\,\tfrac{25}{216}a^3} \infty 0$. quæ, quoniam reduci non poteſt, *certum eſt*, &c.

Exem-

Exempla, ubi æquatio Reſultans pauciores quàm Propoſita dimenſiones habet.

1. Si habeatur $\begin{array}{l} x^4 + 4cx^3 + 4ccxx - 4bbcx + b^4 \\ \qquad\qquad\quad - dd \qquad\qquad\quad - bbdd \\ \qquad\qquad\quad - 2bb \end{array} \infty\, 0$, ac ſupponatur $c \infty 1$, $b \infty 1$, $d \infty 1$, reſultabit inde æquatio numerica $x^3 + 4xx + 1x - 4 \infty 0$. Quia verò hæc æquatio trium dimenſionum non exiſtit reducibilis, etiam æquatio Propoſita ad pauciores dimenſiones quàm ad tres reduci non poterit.

2. Si proponatur $\begin{array}{l} x^3 - \frac{2}{4}ab\sqrt{xx+aa-bb} + 3axx + \frac{2}{4}abx - aab \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + bb\sqrt{3aa+bb} \end{array} \infty\, 0$, & ſupponatur $aa - bb \infty 0$, ſeu $a \infty b$, reſultabit $x^3 + 3axx * + a^3 \infty 0$. quæ etiam non poterit reduci, ideoque indicabit Propoſitam æquationem ad pauciores quàm ad tres dimenſiones reduci non poſſe.

Dico, *non ad pauciores dimenſiones illam reducibilem fore*, quippe aliquando contingere poteſt, ut Propoſita æquatio ad eundem dimenſionum numerum ſit reducibilis. Quod etiam in prima Regula locum habuit, ibique explicatum eſt. Sed ſi roges, quot ego dimenſiones ſecundo huic exemplo adſcribam? reſpondeo, me tot dimenſiones cuilibet æquationi adſcribere, quot ejus incognita quantitas ad ſummum dimenſiones habet, dempto omni ſigno radicali, quod illam incognitam quantitatem includit: ideoque illud ſecundum exemplum habiturum 6 dimenſiones, poſtquam ſignum radicale ante quantitatem incognitam, nempe $\sqrt{xx+aa-bb}$, ablatum fuerit.

NOTÆ *duæ in hanc* I *&* II *Regulam.*

I. Notandum eſt, utramque hanc Regulam non tantùm magnum habere uſum in inquirendo, utrum æquatio aliqua literalis reducibilis ſit, verùm etiam eodem modo inquiri poſſe:

1mo. Num æquatio illa vel etiam quantitas quævis compoſita, per aliam æquationem vel quantitatem, quæ rationalis ſit, dividi poſſit.

2do. Num admittat radicem quadratam, cubicam, vel aliam.

3tio. Num duæ vel plures æquationes, vel quantitates dictæ, admittant communem aliquem diviſorem.

Nam, *ſi non admittant diviſorem rationalem, vel radicem aliquam, vel communem diviſorem*, illud plerumque, monſtratam jam ineundo viam, vel uno intuitu, vel ſaltem admodum facilè, innoteſcet; præſertim in æquationibus vel quantitatibus valde compoſitis, atque ex multis diverſis literis conſtantibus, quod ſæpenumero ineundo aliam viam valde difficile inventu eſſet, magnumque & laborem & induſtriam requireret. Hæc enim Methodus tantùm exigit, ut æquationes, vel quantitates dictæ, determinentur (ſupponendo unam vel plures literas nihilo, vel unitati, vel numero, vel quantitati, ad libitum ſumendis, æquales,) ad alias, quas aliunde ſcimus non admittere reductionem, vel rationalem diviſorem, vel radicem aliquam, vel communem diviſorem. Quod omne, exemplis explicare, ſupervacuum erit, quemadmodum etiam omnem ejus methodi uſum enumerare, quem ſatis inſignem eſſe jam patuit; ac vel eo nomine, quòd ipſa nec fractiones, nec irrationales quantitates moretur, non raò magnum adfert compendium.

Denique, *ſi æquationes, vel quantitates compoſitæ, admittant reductionem, vel diviſorem rationalem, vel aliquam radicem, vel communem diviſorem*, poſſunt etiam illa omnia in multis caſibus hâc Methodo ſatis compendioſè inveniri: ſed hæc non ſunt hujus loci, poſthac fortaſſis aliquid de iis indicabo.

II. Quid velim per *æquationem ex Propoſita Reſultantem*, neceſſarium videtur, ut paulò clariùs exponam: maximè quia id etiam in ſequentibus Regulis, ubi litera aliqua ∞ o ſupponitur, uſum ſuum habebit. Quando enim una pluréſve literæ vel quantitates ∞ o ſumuntur, liquet, omnes quantitates, ex multiplicatione harum per alias productas, etiam æquales nihilo fieri; ideoque in Propoſita æquatione neceſſariò evaneſcere. quemadmodum in allatis exemplis quoque eſt videre. Adeò ut in æquationibus, quæ literales fractiones non includunt, pateat, quid per æquationem Reſultantem intelligam. Sed ſi literales fractiones dantur, tunc quidem facilè, niſi quis probè animum advertat, error committi poſſet. Etenim fractionis numeratore ∞ o exiſtente, tollenda eſt iſta fractio ex Propoſita æquatione; at denominatore ∞ o exiſtente, oportet terminos omnes æquationis primùm per ejuſmodi

deno-

denominatores multiplicare. Quo peracto, erit æquatio hæc, in quâ ſcilicet nulla ampliùs reperitur fractio literalis, cujus denominator eſt $\propto 0$, & in qua conditiones omnes aſſumptæ, ſive ſuppoſitiones, ſunt adimpletæ, illa, quam ex Propoſita reſultare dico.

Exempla.

ÆQUATIONES PROPOSITÆ.		ÆQUATIONES RESULTANTES.
$\begin{array}{l} xx - \frac{cc}{a}x + cc \propto 0. \\ \quad + b \quad - aa \\ \qquad\quad - \frac{ccb}{a} \\ \qquad\quad + ab \end{array}$	ſupponatur $c \propto 0$	$\begin{array}{l} xx + bx - aa \propto 0 \\ \qquad\quad + ab \end{array}$
	$a \propto 0$	$-ccx - ccb \propto 0$, ſeu $x + b \propto 0$.
$\begin{array}{l} xx - cx + \frac{c^3}{2a} \propto 0. \\ \quad + a \quad - \frac{3}{2}cc \\ \quad + \frac{ac}{a+b} - \frac{cca}{2a + 2b} \\ \quad - \frac{cc}{2a} \end{array}$	$c \propto 0$	$xx + ax \propto 0$, ſeu $x + a \propto 0$
	$a \propto 0$	$-\frac{ccx}{2} + \frac{c^3}{2} \propto 0$, ſeu $x - c \propto 0$.

$$x^5 * * + \frac{{}^2ac - ab}{{}^3a - b}xx + \frac{ccb^3}{{}^3aa - ab}x + \frac{b^3a^3}{a + b} \propto 0;$$

ſuppoſitâ ${}^3a - b \propto 0$:

habebitur $\overline{{}^2ac - ab}$ in xx, $+ \frac{ccb^3}{a}x \propto 0$, ſeu $\begin{array}{l} + {}^2acx \\ - ab \end{array} + \frac{ccb^3}{a} \propto 0$.

Unde, ſuppoſitione ${}^3a \propto b$ adimpletâ, reſultat

$$\begin{array}{l} + {}^2acx + 27aacc \propto 0. \\ - {}^3aa \end{array}$$

Nec tantùm hoc obſervandum in æquationibus, ſed etiam in quantitatibus compoſitis, quarum communis menſura, vel diviſor, vel radix petitur. Ut, exempli gratiâ, ſi inquirere velis, num $\sqrt{Q}$ extrahi poſſit ex $cc - {}^2cd + dd + \frac{b^4}{cc - {}^2cd + dd} + {}^2bb$, & in eum finem ſuppoſuiſſes $cc - {}^2cd + dd \propto 0$: retinendum eſſet b^4, non autem ${}^2bb$. Si enim ${}^2bb$ retineres, concludendum foret,

 meam

Digitized by Google

meam ſequendo methodum, quòd $\sqrt{Q}$ ex $cc - {}^2cd + dd + \frac{b4}{cc - {}^2cd + dd} + {}^2bb$ extrahi non poſſet, quæ tamen eſt $c - d + \frac{bb}{c-d}$

SEQUENTES 3, 4, ET 5 REGULÆ SE EXTENDUNT AD OMNES ÆQUATIONES, QUÆ EX MULTIPLICATIONE DUARUM ALIARUM PRODUCI POSSUNT, IN QUARUM UNA ALIQUA LITERA INCLUDITUR, QUÆ IN ALTERA NON CONTINETUR.

III. *REGULA*,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, quæ produci poteſt ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una literam aliquam *comprehendit, quæ in altera non continetur; & quæ* litera *non habet eundem dimenſionum numerum in diverſis Terminis.*

Suppono omnes Propoſitæ æquationis quantitates, in quibus *eadem litera* reperitur, quæque ſimul ſic dividi poſſunt, ut litera illa evaneſcat, ∞ o. Atque hoc in *ſingulis literis* inſtituo, verùm *uno tantùm modo*. Quippe id interdum variis modis fieri poteſt, quo caſu illi præ cæteris eligendi veniunt, qui facillimas æquationes ſubminiſtrant, vel quibus omnium breviſſimè ad quæſitum pervenire licet. Et, ſi Propoſita æquatio ex duabus ejuſmodi dictis æquationibus produci poterit, etiam per aliquam harum fictarum æquationum, in quibus dictæ *literæ* ſunt ſublatæ, diviſibilis erit.

1^{mum} *genus exemplorum, in quibus Propoſitæ æquationes nec numerales nec literales fractiones continent.*

1. Proponatur hæc æquatio

$$x^4 - {}^6ax^3 \begin{array}{l} + {}^4bc \\ + {}^4ac \\ + {}^{16}aa \\ + {}^4ab \end{array} xx \begin{array}{l} - {}^{16}abc \\ - {}^{16}aac \\ - {}^8aab \\ - {}^{16}a^3 \end{array} x \begin{array}{l} + {}^{16}bbca \\ + {}^{48}aabc \\ + {}^{32}a^3c \end{array} \infty 0.$$

Primò

Primò itaque periculum faciam in litera a, ſupponendo $-16a^3x + 32a^3c \infty 0$. Quæ ſunt omnes quantitates per a^3 diviſibiles, quæ in Propoſita æquatione inveniuntur, & in quibus factâ diviſione litera a evaneſcit: oritur enim $-16x + 32c \infty 0$, ſeu, dividendo per -16, $x - {}^{2}c \infty 0$.

Jam tento, num Propoſita æquatio dividi queat per $x - {}^{2}c \infty 0$. Nam ſi per hanc dividi non poſſit, *uti &, ſi hac* $x - {}^{2}c \infty 0$ *ab omni fractione non libera fuiſſet*, (*quod huic quidem primo exemplorum generi eſt proprium*) ad aliam literam tranſiiſſem. (Quamvis enim aliæ adhuc quantitates in æquatione reperiantur, in quibus a continetur, quæque omnes per aliam quàm a^3 dividi poſſunt, ſic ut litera a ubique evaneſcat, utpote ſupponendo

$$\begin{array}{l} +16aaxx - 16aacx + 48aabc \infty 0, \text{ ut \&} \\ \qquad\qquad - 8aab \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -6ax^3 + 4acxx - 16abcx + 16bbca \infty 0; \\ \qquad\quad + 4ab \end{array}$$

tamen id *uno modo* in hac Regula tentaſſe ſufficit.) Hinc cum Propoſita æquatio per $x - {}^{2}c \infty 0$ diviſibilis non ſit, tranſeo ad aliam literam, puta b. Quoniam autem hîc una tantùm quantitas exiſtit, in qua bb reperitur, nempe $16bbca$, idcirco & hanc tranſeo, quandoquidem per $16bbca$ nullus valor ipſius x obtineri poteſt, & conſidero literam c, ponendo

$$\begin{array}{llll} 4bcxx & -16abcx & +16bbac & \infty 0. \\ 4ac & -16aac & +48aabc & \\ & & +32a^3c & \end{array}$$

Hæc igitur cum abſque fractione dividatur per ${}^{4}bc + {}^{4}ac$, ac oriatur $\begin{array}{l} xx - {}^{4}ax + {}^{4}ab \infty 0: \\ \qquad\qquad + {}^{8}aa \end{array}$ inquirendum ulteriùs reſtat, an Propoſita æquatio dividi poſſit per $\begin{array}{l} xx - {}^{4}ax + {}^{4}ab \infty 0. \\ \qquad\qquad + {}^{8}aa \end{array}$ inveniturque diviſionem fieri poſſe.

Dixi in Regula, *quòd ſufficiat, rem ſingulis literis uno tantùm modo tentaſſe, & quòd illi modi præ cæteris eligendi veniant, qui faciliimas æquationes ſubminiſtrant, vel quibus omnium breviſſimè ad quæſitum pervenire licet.* Sic enim breviorem viam ingreſſus eſſem, ſi quantitates ſumpſiſſem, in quibus a ubique unam tantùm dimenſionem habet. Nam quoniam tunc obtineo $-6ax^3 \begin{smallmatrix} +4ac \\ +4ab \end{smallmatrix} xx - 16abcx + 16bbca \infty 0$, primo intuitu apparet, cum 4 per 6 dividi nequeat, quòd hæ quantitates non ſine fractione dividi poſſint.

2. Eo-

Digitized by Google

2. Eodem modo, ad reducendam hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^3 & -{}^{3}cxx & +abx & -{}^{2}aab \infty 0: \\ & -{}^{2}a & +{}^{6}ac & +{}^{3}abb \\ & +{}^{3}b & -9bc & \end{array}$$

quia quantitas $-{}^{2}aab$ in eâ ſola reperitur, in qua a duas habet dimenſiones; & quantitas $+{}^{3}abb$ ſola, in qua b duas dimenſiones habet: idcirco tranſeo ad literam c, obtineoque

$$\begin{array}{ll} -{}^{3}cxx + {}^{6}acx \infty 0 & \text{ſeu } -3cx + {}^{6}ac \infty 0. \\ \quad -9bc & \qquad\qquad -9bc. \end{array}$$

Id quod diviſum per $-3c$, dat $\begin{array}{l} x - {}^{2}a \infty 0. \\ \ \ +3b \end{array}$ Cujus ope Propoſita æquatio dividi poteſt. Quod, ſi aliter eveniſſet, poſtquam jam periculum in omnibus factum eſſet literis, indicio fuiſſet, æquationem Propoſitam ex duabus ejuſmodi aliis, quales ſupra determinavi, produci non poſſe.

3 Similiter examinaturus hanc æquationem

$$\begin{array}{lll} x^3 + b & xx + {}^{2}b\sqrt{ab+3bb} \text{ in } x & - {}^{6}bb\sqrt{ab+3bb} \infty 0, \\ -\sqrt{ab+3bb} & & + {}^{18}b^3 \end{array}$$

exordiens à litera a, invenio æquationem $-\sqrt{ab+3bb}$ in xx, $+{}^{2}b\sqrt{ab+3bb}$ in x, $-{}^{6}bb\sqrt{ab+3bb} \infty 0$. Quam divido per $-\sqrt{ab+3bb}$, & evaneſcit a, obtineoque hanc $xx - {}^{2}bx + {}^{6}bb \infty 0$; per quam Propoſita dividi poteſt. Quòd ſi verò hæc diviſio non fieri potuiſſet, progrediendum fuiſſet ad literam b. Quia autem liquet per b, ſecundùm ſingulas etiam ſuas dimenſiones conſiderata, non poſſe aliquem ipſius x valorem inveniri: concluſiſſem, ut ante, æquationem Propoſitam ex duabus ejuſmodi aliis, quales ſupra determinavi, produci non poſſe.

4. Nec aliter ſe res habet in hac æquatione

$$\begin{array}{llll} x^3 - xx\sqrt{xx+aa} & -{}^{2}cxx + {}^{2}cx\sqrt{xx+aa} & -{}^{6}acx - a\sqrt{3cc+aa} \text{ in } \sqrt{xx+aa} \infty 0. \\ \quad +{}^{2}a & + ax\sqrt{xx+aa} - {}^{3}aax & \qquad +{}^{3}aa\ \sqrt{3cc+aa} \\ & \qquad + ax\sqrt{3cc+aa} & \end{array}$$

Nam primò video literam a negligi poſſe, quia ſola $-3aax$ reperitur, nec ulla alia, quæ per aa ſic dividi poſſit, ut ipſa a prorſus evaneſcat. Tranſeo itaque ad literam c, ſupponendo $-{}^{2}cxx + {}^{2}cx\sqrt{xx+aa} - {}^{6}acx \infty 0$ ſeu $-{}^{2}cx + {}^{2}c\sqrt{xx+aa} - {}^{6}ac \infty 0$, & fit, dividendo ubique per $-{}^{2}c$, $x - \sqrt{xx+aa} + 3a \infty 0$. Cujus ope

ope Propoſitam æquationem dividere licet. Quæ ſi per hanc dividi non potuiſſet, quia jam res ſingulis literis tentata eſſet, concluſiſſem, ut priùs, Propoſitam æquationem, &c.

2dum genus exemplorum, in quibus Propoſitæ æquationes fractiones continent.

Inter hæc & præcedentia exempla, nulla alia differentia reſpectu operationis exiſtit, quàm quòd Ficta æquatio, per quam diviſio Propoſitæ tentatur, non neceſſariò, ſicut ibi, ab omni fractione libera eſſe debeat. Quocirca unicum exemplum in medium adduxiſſe ſuffecerit.

Proponatur æquatio
$$x^3 \begin{array}{l} + \frac{{}^2bb}{a+c} \\ + {}^2b \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} xx \begin{array}{l} + \frac{bba}{a+c} \\ + \frac{3}{4}aa \\ - cc \\ + ab \\ \\ \\ \end{array} x \begin{array}{l} - \frac{1}{2}a^3 \\ + \frac{1}{2}acc \\ + {}^2abb \\ - {}^2cbb \\ + {}^2aab \\ - {}^2bcc \end{array} \infty\ 0.$$

Tranſeo literam a, propter quantitatem $-\frac{1}{2}a^3$, quoniam a nuſquam ampliùs 3 dimenſionum reperitur. Hinc tranſiens ad b, invenio ${}^2bxx + abx + {}^2aab - {}^2ccb \infty 0$, ſeu, dividens ubique per $2b$, $xx + \frac{1}{2}ax \begin{array}{l} + aa \\ - cc \end{array} \infty 0$, per quam Propoſita dividi poteſt. Quòd ſi verò hæc diviſio fieri non potuiſſet, concluſiſſem; cum tantùm per literam c adhuc explorandum foret, atque hæc ipſa c non magis quàm litera a, ſicut ex quantitate $-{}^2cbb$ manifeſtum eſt, ad rem quidquam faciat; æquationem Propoſitam ex duabus ejuſmodi aliis, quales ſupra determinavi, produci non poſſe.

Ordo verò, quem in hac inquiſitione, an nimirum Propoſita æquatio per hujuſmodi Fictas diviſibilis ſit, obſervo, talis eſt: Primùm inquiro, an nullæ aliæ quantitates, in quibus hæc ablata litera reperitur, in Propoſita æquatione exiſtant. Si enim plures reperiantur, tum ipſas omnes, quæ ita per illam dividi poſſunt, ut ea ubique evaneſcat, in unam ſummam colligo. (ut in hoc exemplo, quantitates omnes in quibus b duas dimenſiones habet.) Quo peracto, ſi quotiens non idem ſit cum præcedenti, per quod diviſio examinatur, concludo, hanc diviſionem fieri non

 poſſe.

poſſe. Denique, ſi nullæ ampliùs in Propoſita æquatione ſuperſint quantitates, in quibus dicta litera reperitur, divido ultimò per illam Fictam æquationem omnes reliquas quantitates, in quibus litera illa non reperitur; quæque ſimul per dictam Fictam diviſibiles ſunt futuræ, ſi quidem Propoſita æquatio per eam diviſibilis exiſtat.

Ut ${}^{2}b\,xx + abx + {}^{2}aab - {}^{2}bcc \propto 0$ div. per $+{}^{2}b$, fit $xx + \frac{1}{2}ax + \begin{matrix} aa \\ -cc \end{matrix} \propto 0$,

itemq; $\frac{{}^{2}bb}{a+c}xx + \frac{bba}{a+c}x + \begin{matrix} {}^{2}abb \\ -{}^{2}cbb \end{matrix} \propto 0$ div. per $+\frac{{}^{2}bb}{a+c}$, fit $xx + \frac{1}{2}ax + \begin{matrix} aa \\ -cc \end{matrix} \propto 0$.

Si igitur hoc quotiens cum præcedenti non conveniſſet, etiam Propoſita æquatio per $xx + \frac{1}{2}ax + \begin{matrix} aa \\ -cc \end{matrix} \propto 0$ diviſibilis non fuiſſet.

Quoniam autem conveniunt, & nullæ ampliùs quantitates in Propoſita æquatione ſuperſunt, in quibus litera b reperitur, inquiro tandem, num omnes reliquæ etiam per $xx + \frac{1}{2}ax + \begin{matrix} aa \\ -cc \end{matrix} \propto 0$ dividi poſſint. Hinc cum reliquæ quantitates, in quibus b non reperitur, ſint $x^3 * + \begin{matrix} \frac{3}{4}aax \\ -cc \end{matrix} \begin{matrix} -\frac{1}{2}a^3 \\ +\frac{1}{2}acc \end{matrix}$, ipſæque per $xx + \frac{1}{2}ax + \begin{matrix} aa \\ -cc \end{matrix}$ dividi queant, ac oriatur $x - \frac{1}{2}a$; idcirco & Propoſita æquatio per $xx + \frac{1}{2}ax + \begin{matrix} aa \\ -cc \end{matrix} \propto 0$ dividi poterit. Quæ aliàs, ut manifeſtum eſt, per illam non diviſibilis fuiſſet, ſi ultima hæc diviſio fieri non potuiſſet; Quotiens verò eſt $x - \frac{1}{2}a + \frac{{}^{2}bb}{a+c} + {}^{2}b \propto 0$.

IV. *REGULA*,

Quæ modum docet reducendi omnem Æquationem, quæ produci poteſt ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una literam aliquam *comprehendit, quæ in altera non continetur; quæq;* litera *in aliquo termino tot dimenſiones habet, quot in nullo alio.*

Suppono omnes Propoſitæ æquationis quantitates, in quibus *eadem litera* reperitur, quæque ſimul ſic dividi poſ-

di poſſunt, ut illa *litera* evaneſcat, ∞ o. Atque hoc in *ſingulis literis* facio, verùm *non uno duntaxat modo*, ſicut in præcedenti 3^{tia} Regula, ſed *modis omnibus*, *quibus id fieri poteſt.* Et ſi Propoſita Æquatio ex duabus ejuſmodi dictis æquationibus produci poterit, erit etiam diviſibilis per aliquam harum Fictarum Æquationum, in quibus dictæ *literæ* ſunt ſublatæ.

Quoniam autem hæc Regula omnino eadem facienda præſcribit, quæ præcedens 3^{tia}; hoc tantùm excepto, quòd illic in ſingulis diverſis literis duntaxat *uno modo*, uti dictum eſt, hîc *modis omnibus* ſit tentandum; ſufficit uno exemplo rem declarare.

Proponatur itaque hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 - ax^3 & + \frac{1}{2}aaxx & - \frac{1}{4}aabx & - \frac{1}{8}aabb & \infty\ 0. \\ \quad - \frac{1}{2}b & + 1\frac{1}{2}ab & - \frac{1}{4}abb & - \frac{1}{4}ab^3 & \\ & - \frac{1}{4}bb & & & \end{array}$$

Exordiens à litera a, prout unam habet dimenſionem, obtineo $-ax^3 + 1\frac{1}{2}abxx - \frac{1}{4}abbx - \frac{1}{4}ab^3 \infty\ 0$, ſeu $-x^3 + 1\frac{1}{2}bxx - \frac{1}{4}bbx - \frac{1}{4}b^3 \infty\ 0$. Cujus ope Propoſita æquatio dividi nequit (quod ipſum in hoc exemplo vel hinc apparet, quòd hic ultimus terminus $-\frac{1}{4}b^3$, ultimum terminum Propoſitæ æquationis non abſque literali fractione dividat). Jam, non quidem ad aliam literam tranſeo, quemadmodum in præcedenti Regula, ſed tamdiu conſiderabo eandem a, quamdiu adhuc aliæ quantitates in æquatione extant, in quibus illa plurium aut pauciorum dimenſionum reperitur. Atque ideo cum ipſa a hîc adhuc 2 dimenſionum reperiatur, ſuppono ſimiliter quantitates omnes, in quibus 2 dimenſiones habet, ∞ 0: nimirum, $\frac{1}{2}aaxx - \frac{1}{4}aabx - \frac{1}{8}aabb \infty\ 0$, ſeu $xx - \frac{1}{2}bx - \frac{1}{4}bb \infty\ 0$, quæ Propoſitam æquationem dividere poteſt. Quod ſi ſecus eveniſſet, ad aliam literam tranſiiſſem, quandoquidem omnes quantitates, in quibus a continetur, ſolummodo dividi poſſunt per a, vel aa. Quocirca facto periculo in ſingulis literis, & omnibus modis, ſi comperiatur, diviſionem æquationis Propoſitæ per nullam Fictarum ſuccedere, certum eſt, neque Propoſitam æquationem, ex duabus ejuſmodi aliis, quales ſupra determinavi, produci poſſe.

V. *REGULA*,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, quæ produci poteſt ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una literam aliquam *comprehendit, quæ in altera non continetur.*

Supponatur aliqua litera ∞ o; inveſtigeturque num æquatio, quæ hinc reſultat, habeat cum Propoſita communem diviſorem. Si non habeat, ſupponatur iterum alia litera ∞ o, inveſtigeturque num iſta Reſultans habeat communem diviſorem: atque ſic porrò, donec aut communis reperiatur diviſor, aut nulla ampliùs litera ſuperſit, quæ non ſuppoſita ſit ∞ o. Et ſi non inveniatur communis diviſor, ſignum erit, æquationem Propoſitam, ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una literam aliquam comprehendit, quæ in altera non continetur, produci non poſſe.

Ex. gratiâ, ſi proponatur hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^5 * & +4abx^3 & +30b^3\,xx & +34ab^3x & +20ab^4 \infty 0, \\ & +bb & -10abb & +7a^4 & +10a^4b \\ & +\frac{a^4}{bb} & -\frac{2a^4}{b} & & \end{array}$$

ſupponaturque litera $a \infty 0$, reſultabit inde $x^5 * + bbx^3 + 30bbbxx \infty 0$, quæ cum Propoſita communem habet diviſorem, nempe $xx - 3bx + 10bb \infty 0$. Quod, ſi aliter eveniſſet, aliam literam, nimirum b, poſuiſſem ∞ o. & ſi inde Reſultans æquatio etiam non habuiſſet communem diviſorem, concluſiſſem æquationem Propoſitam, quoniam tantùm duas iſtas a & b diverſas habet literas, non reſultare poſſe ex multiplicatione duarum aliarum, &c.

Res eodem modo ſe habet in æquationibus, quæ irrationales quantitates includunt, ita ut non opùs ſit alia exempla adjungere.

Digitized by Google

SEQUENTES 6ta, 7ma, ET 8va REGULÆ SE EXTENDUNT AD OMNES ÆQUATIONES, QUÆ EX MULTIPLICATIONE DUARUM ALIARUM PRODUCI POSSUNT, IN QUARUM UNA IRRATIONALIS QUANTITAS INCLUDITUR, QUÆ IN ALTERA NON CONTINETUR.

VI. *REGULA*,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, quæ produci poteſt ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una irrationalem aliquam quantitatem *comprehendit, quæ in altera non continetur; quæq;* quantitas *non eundem dimenſionum numerum in diverſis Terminis habet.*

Suppono, &c.

VII. *REGULA*,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, quæ produci poteſt ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una irrationalem aliquam quantitatem *comprehendit, quæ in altera non continetur; quæq;* quantitas *in aliquo Termino tot habet dimenſiones, quot in nullo alio.*

Suppono, &c.

VIII. *REGULA*,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, quæ produci poteſt ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una irrationalem aliquam quantitatem *comprehendit, quæ in altera non continetur.*

Supponatur, &c.

Quoniam inter hanc 6tam & 3tiam Regulam, & inter 7mam & 4tam, nec non inter 8vam & 5tam haud magna diſparitas exiſtit, & tantùm pro *litera* poni debet *irrationalis quantitas*; erunt hæ Regulæ per

Digitized by Google

læ per illas jam explicatæ. Si enim pro unaquaque diverſa quantitate irrationali duntaxat diverſam literam concipias aut ponas, evadent hæ cum illis planè eædem. Atque idcirco hæc verba in 6ta Regula: *quæq; quantitas æquè multarum dimenſionum in diverſis terminis non exiſtit*; & hæc in 7ma: *quæq; quantitas in aliquo termino talem dimenſionum numerum habet, qualem in nullo alio*; itemque quid ſit *quantitas alia irrationalis*, nullâ explicatione indigent.

Et Corollarii loco hic annotari poſſet, hanc 8vam Regulam etiam comprehendere Reductionem omnis æquationis, quæ produci poteſt ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una eſt *rationalis*, hoc eſt, *in qua nullum eſt ſignum radicale*, & altera irrationalis.

Quia verò hæc 5ta & 8va Regula præſupponunt inventionem communis duarum æquationum diviſoris, adjungam hic, quo ego utor,

Modum, inveniendi maximum, duarum (vel plurium) ſive æquationum ſive quantitatum, diviſorem communem.

Proponatur, exempli causâ, inveniendus maximus communis diviſor duarum ſequentium æquationum vel quantitatum, (conſidero enim quantitates haud ſecus atque æquationes, ſupponendo ſc: illas $\propto 0$: cum ſuppoſitio hæc, ad inveniendum earum communem diviſorem, nullum errorem inferre poſſit.)

$$d^3c - acdd + {}^2aabc - {}^2abcd \propto 0, \ \& \ d^4c - bbcdd + caabb - caadd \propto 0.$$

Primò itaque inquiro, num aliqua litera vel numerus reperiatur, cujus ope ſinguli utriuſque æquationis termini dividi queant. Hoc enim ſi contingat, oportet priùs ejuſmodi diviſionem inſtituere, ut hic per literam c, fiuntque

$$d^3 - add + {}^2aab - {}^2abd \propto 0, \ \& \ d^4 - bbdd + aabb - aadd \propto 0.$$

Deinde ad libitum ſumatur aliqua litera, quæ in utraque harum æquationum reperiatur, ut d, a, vel b. Atque conſiderando ipſam, puta d, tanquam incognitam quantitatem, redigatur utraque in ordinem, habebiturque

1ma Æquatio	2da Æquatio
$d^3 - add - {}^2abd + {}^2aab \propto 0.$	$d^4 * \begin{matrix} -bb \\ -aa \end{matrix} dd * + aabb \propto 0.$

Porrò valor ipſius d^3, per 1mam æquationem inventus, ſubſtituatur

tuatur ubique in locum ipſius d^3 ſecundæ æquationis : invenieturque

$$d^4 \infty ad^3 + 2abdd - 2aabd \infty bbdd + aadd - aabb$$

ſeu

$$\begin{array}{l} aadd + 2aabd - 2a^3b \\ \quad - 2aabd + 2abdd \end{array}$$

Hoc eſt, $aabb - 2a^3b + 2abdd - bbdd \infty 0$

$$\& \ dd \infty \frac{2a^3b - aabb}{2ab - bb} \text{ ſeu } aa; \ \& \ d \infty a, \text{ ſeu } d - a \infty 0.$$

Si jam hujus dd valor ſubſtituatur in ipſius locum in 1ma æquatione, habebitur $aad - a^3 - 2abd + 2aab \infty 0$.

Denique ſubſtituatur ipſius d valor a in ejus locum in hac ultima, obtinebitur $a^3 - a^3 - 2aab + 2aab \infty 0$.

In hac igitur cum termini omnes ſe mutuò deſtruant, indicio eſt tam æquationem $d^3 - add - 2abd + 2aab \infty 0$, quàm $d^4 * \begin{array}{l} -bb \\ -aa \end{array} dd * + aabb \infty 0$ eſſe diviſibilem per $d - a \infty 0$, & $d - a$ utriuſque maximum communem diviſorem exiſtere. Atque adeò, cum duæ Propoſitæ æquationes (vel quantitates) priùs per c ſint diviſæ, manifeſtum eſt earundem maximum communem diviſorem fore $\overline{d - a}$ in c, ſeu $dc - ac$.

Quòd ſi autem aliam literam quàm d ceu incognitam quantitatem conſideremus, licebit ſimiliter illius ope eoſdem ſemper diviſores invenire. Exempli gratiâ, ſi a ut incognita quantitas conſideretur, obtinebitur pro

1ma Æq.	2da Æq.
$aa \begin{array}{l} -d \\ -\frac{dd}{2b} \end{array} a + \frac{d^3}{2b} \infty 0$	$aa - \frac{bbdd + d^4}{bb - dd} \infty 0.$
	vel $aa - dd \infty 0$, ſeu $aa \infty dd$.
	vel $a - d \infty 0$, ſeu $a \infty d$.

Subrogetur jam dd valor ipſius aa, per 2dam æquationem inventus, in locum aa primæ æquationis, & invenietur pro ipſa

$$dd \begin{array}{l} -d \\ -\frac{dd}{2b} \end{array} a + \frac{d^3}{2b} \infty 0.$$

Denuo

Denuo in hac ultima in locum ipſius a ſubrogetur ejus valor d, obtinebitur $dd - dd + \frac{d^3}{2b} \infty\, 0$.

$$- \frac{ddd}{2b}$$

In hac igitur cum rurſus termini omnes ſe mutuò tollant, argumentum eſt, utramque æquationem, ut ante, &c.

Eadem eſt ratio, quæcunque tandem litera pro incognita quantitate ſumatur.

Si verò accidiſſet, ut nec per ſubrogationem valoris ipſius d^3, nec ipſius dd, nec denique ipſius d, termini omnes ſe mutuò deſtruxiſſent, argumentum fuiſſet, quòd duæ illæ æquationes

$$d^3 - add - 2abd + 2aab \infty\, 0, \quad \& \quad d^4 * \begin{matrix} -bbdd \\ -aa \end{matrix} * + aabb \infty\, 0$$

nullum communem diviſorem habuiſſent, & quòd duarum Propoſitarum æquationum, quæ priùs per c fuerunt diviſæ, nullus communis diviſor præter c extitiſſet. Excepto tantùm, ubi diviſio fieri poteſt per ejuſmodi quantitates, quæ ſimul poſſunt fieri $\infty\, 0$, atque in cauſa eſſe, quòd valor ejus literæ, quæ tanquam incognita quantitas conſideratur, per iſtam æquationem inveniri non poſſit.

Exempli gratiâ, ſi in Propoſitis æquationibus literam b, ut incognitam quantitatem conſideraſſem, obtinuiſſem

pro 1mâ $\quad b \infty \frac{d^3 - add}{2ad - 2aa}$ ſeu $\frac{dd}{2a}$, & pro 2dâ $\quad bb \infty \frac{d^4 - aadd}{dd - aa}$ ſeu dd vel $b \infty d$.

Ubi videmus, valores ipſius b, nempe $\frac{dd}{2a} \infty\, d$, ſe invicem non tollere, ideoque concludendum eſſet, has duas æquationes non habere communem diviſorem, ſi nempe ejuſmodi quantitates non reperirentur, quæ, dum $\infty\, 0$ ponuntur, efficiunt, ut valor ipſius b inveniri nequeat. Quemadmodum ſi ponatur $d - a \infty\, 0$, non poterit valor ipſius b per 1mam æquationem inveniri: quippe tum d^3 erit $\infty\, add$.

Priuſquam itaque concludatur, non dari duarum ſive æquationum ſive quantitatum communem aliquem diviſorem: 1mo obſervandum venit, num ejuſmodi quantitates in æquatione reperiantur, quæ in cauſa eſſe poſſunt, quòd valor incognitæ literæ, ſeu

ſeu inſtar incognitæ conſideratæ, per iſtam æquationem inveniri nequeat. 2do ſi reperiantur, num utramque æquationem dividant, quemadmodum in hoc exemplo, ubi reperitur $d - a \infty 0$, cujus ope utraque æquatio dividitur, quod, ſubrogando a in locum d, uno intuitu videre eſt. At verò ſi aliter eveniſſet, concluſiſſem, non dari, &c.

Unum adhuc exemplum adjungam.

Proponamus inveniendum eſſe maximum communem diviſorem harum duarum æquationum ſive quantitatum

1ma Æq. 2da Æq.

$$12a^4 + 11aaxx + x^4 - 4ax^3 - 20a^3x \infty 0, \ \& \ 12aaxx - 3ax^3 + 24a^4 - 16a^3x + x^4 \infty 0.$$

Quoniam autem hæ non diviſibiles ſunt per aliquam literam nec per numerum, conſidero literam aliquam, ad libitum ſumendam, tanquam incognitam quantitatem, puta x, atque operationem porrò inſtituo, ut ſequitur

per 1mam invenitur $x^4 \infty \quad 4ax^3 - 12aaxx + 20a^3x - 12a^4$

add. $\quad -3ax^3 + 12aaxx - 16a^3x + 24a^4$

fit pro 2da æquatione $\quad ax^3 + aaxx + 4a^3x + 12a^4 \infty 0$

div. per a. $\quad x^3 \infty -axx - 4aax - 12a^3$.

Subſtituatur jam hic valor ipſius x^3 in ejus locum in alterutra æquatione, utpote primâ (quamvis autem in hoc exemplo parum interſit, poteſt tamen in multis caſibus magnum eſſe diſcrimen, tunc enim oportet, brevitatis causâ, eligere eam, per quam operatio facillimè procedit; quemadmodum vulgò, cùm duæ ſunt, dimenſionibus differentes, ea, quæ pauciores habet, eligenda venit), obtinebiturque $xx \infty ax - 6aa$.

Subſtituatur rurſus hic valor ipſius xx ubique in ejus locum in una præcedentium æquationum, ſumendo, brevitatis causâ, præcedentem 3 dimenſionum, invenietur

2da Æquatio

$$\left.\begin{array}{lr} x^3 \infty axx - 6aax \text{ ſeu} & \begin{array}{l} + aax \\ - 6aax \end{array} - 6a^3 \\ + axx \infty & + aax - 6a^3 \\ + 4aax + 12a^3 \infty & + 4aax + 12a^3 \end{array}\right\} \infty 0$$

In qua videmus terminos omnes ſe invicem tollere, quod arguit, haſce Propoſitas æquationes ſive quantitates diviſibiles eſſe

per $xx - ax + 6aa$; quæ ideo maximus eſt earum communis diviſor.

Porrò manifeſtum eſt, ſi quis *omnes duarum vel plurium ſive Æquationum ſive Quantitatum communes diviſores* invenire velit, tantùm inveniendos eſſe *diviſores omnes Maximi earum communis diviſoris.*

Præterea etiam liquet, non tantùm in multis caſibus, per primam & ſecundam Regulam (uti annotatum eſt) uno intuitu videri poſſe, duas Æquationes vel Quantitates non habere communem aliquem diviſorem; verùm etiam Regulas omnes, de Reductione æquationum agentes, ad inveniendos omnes ipſarum communes diviſores inſervire poſſe.

IX. *REGULA*,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, ſive literalem, ſive numeralem, quæ per aliam, cujus ſolummodo unus terminus datus eſt, dividi poteſt.

Oſtendam hoc in uno aut altero tantùm exemplo, quoniam generalis modus ex iis deprehendi ſatis poterit.

Proponatur itaque æquatio $x^5 - 4x^4 + 4x^3 + 1\frac{1}{2}xx - 7x - 3 \infty 0$, deturque illam dividi poſſe per aliam duarum dimenſionum, cujus ultimus Terminus ſit -2. Eſto autem illa $xx + yx - 2 \infty 0$, ſeu, $xx \infty - yx + 2$. Hunc valorem ipſius xx ubique ſubſtituo in ejus locum, aliamque æquationem loco Propoſitæ obtineo, in qua x tantùm unius dimenſionis reperitur: nimirum,

$$y^4 + 4y^3 + 10yy + 14\tfrac{1}{2}y + 5 \text{ in } x, - 2y^3 - 8yy - 16y - 16 \infty 0.$$

quemadmodum ex ſequenti operatione videre eſt.

$$xx \infty -yx+2$$

$$\text{ergo } x^4 \infty yyxx - 4yx + 4 \text{ ſeu } \begin{array}{l} -y^3x + 2yy \\ -{}^4y\;x + 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
x^5 \infty -y^3xx + 2yyx & \text{ſeu} & +y^4x - 2y^3 \\
\quad -4yxx + 4x & & +{}^2yyx \\
 & & +{}^4yyx - 8y \\
 & & +4x \\
-4x^4 \infty & & +{}^4y^3x - 16 \\
 & & +{}^{16}yx - 8yy \\
+4x^3 \infty -4yxx + 8x & \text{ſeu} & +{}^4yyx - 8y \\
 & & +{}^8x \\
+1\tfrac{1}{2}xx \infty & & -1\tfrac{1}{2}yx + 3 \\
-7x - 3 \infty & & -7x - 3 \\
\hline
 & \text{ſumma} & +y^4x - 2y^3 \\
 & & +4y^3 - 8yy \infty 0. \\
 & & +{}^{10}yy - 16y \\
 & & +14\tfrac{1}{2}y - 16 \\
 & & +5
\end{array}$$

Deinde conſidero unumquemque terminum ſeparatum æquationis hujus deductæ ∞ o, & cum hîc duo tantùm ſint termini, habebo inde haſce duas æquationes

$$\overset{\text{I.}}{y^4 + 4y^3 + 10yy + 14\tfrac{1}{2}y + 5 \infty 0}, \;\& \overset{\text{II.}}{-2y^3 - 8yy - 16y - 16 \infty 0}$$

$$\text{ſeu} \quad y^3 + 4yy + 8y + 8 \infty 0.$$

Quarum quidem æquationum, ſi juxta præcedentem methodum quæratur maximus communis diviſor, invenietur pro ipſo $y + 2 \infty e$; ita ut Propoſita æquatio, cum y ſit $\infty -2$, diviſibilis ſit per $xx - 2x - 2 \infty 0$.

Eödem modo, proponatur hæc æquatio $\begin{array}{l} x^4 - {}^2ax^3 + {}^2aaxx - {}^2a^3x + a^4 \infty 0, \\ \qquad\qquad\quad -cc \end{array}$ deturque ipſam dividi poſſe per æquationem duarum dimenſionum, cujus ultimus terminus ſit $+aa$. Eſto autem æquatio illa $xx + yx + aa \infty 0$, adeoque $xx \infty -yx - aa$. Hinc, ſubrogato hoc valore in locum xx, obtinebitur loco Propoſitæ æquationis alia, in qua x unius tantùm erit dimenſionis, nempe $\begin{array}{l} -y^3 \quad x - aayy \infty 0. \\ -{}^2ayy \;\; -{}^2a^3y \\ +ccy \;\;\; +aacc \end{array}$

 Cujus

Cujus ſi unuſquiſque ſeparatus terminus rurſus conſideretur $\infty\ 0$, habebimus has duas æquationes.

$$\begin{array}{ccc} \text{I.} & & \text{II.} \\ -y^3 - {}^2ayy + ccy \infty 0, & \& & -aayy - {}^2a^3y + aacc \infty 0 \\ \text{ſeu} & & \text{ſeu} \\ -yy - {}^2ay + cc \infty 0, & & -yy - {}^2ay + cc \infty 0. \end{array}$$

Cum igitur harum communis menſura ſeu diviſor ſit $-yy - {}^2ay + cc \infty 0$, quæro hinc valorem ipſius y; invenioque $y \infty -a \;8\; \sqrt{aa+cc}$, ac proinde æquationem Propoſitam eſſe diviſibilem per $xx - a \;8\; \sqrt{aa+cc}$ in x, $+ aa \infty 0$.

Similiter, ſi detur, hanc æquationem

$$\begin{array}{llll} x^5 * & +bbx^3 & + {}^3abbxx * & + {}^2ab^4 \infty 0 \\ & +aa & - {}^2a^3 & \end{array}$$

eſſe diviſibilem per aliam 3 dimenſionum, cujus tertius terminus ſit $+ {}^2aax$: pono pro ipſa $x^3 + yxx + {}^2aax + z \infty 0$, ſeu $x^3 \infty -yxx - {}^2aax - z$. Quo valore ubique in locum x^3 in Propoſita æquatione ſubrogato, obtinebitur

$$\begin{array}{llll} -z & xx + yzx & + aaz & \infty 0. \\ + {}^3aay & + {}^2a^4 & - yyz & \\ - y^3 & - {}^2aayy & - bbz & \\ - bby & - {}^2aabb & + {}^2ab^4 & \\ + {}^3abb & & & \\ - {}^2a^3 & & & \end{array}$$

Quoniam autem hæc æquatio 3 habet ſeparatos terminos, habebuntur inde hæ 3 æquationes

$$\overset{1^{ma}}{-z + {}^3aay - y^3 - bby + {}^3abb - {}^2a^3 \infty 0,}$$

$$\overset{2^{da}}{yz + {}^2a^4 - {}^2aayy - {}^2aabb \infty 0,} \quad \overset{3^{tia}}{aaz - yyz - bbz + {}^2ab^4 \infty 0.}$$

Hinc per 1^{mam} ſublatâ z, quæ eſt $\infty\ 3aay - y^3 - bby + 3abb - {}^2a^3$, invenietur pro 2da:

$$\begin{array}{lllll} -y^4 * & + aayy & + 3abby & - 2aabb & \infty 0, \\ & - bb & - 2a^3 & + 2a^4 & \end{array}$$

& pro 3^{tia}:

$$\begin{array}{llllll} +y^5 * & - {}^4aay^3 & + {}^2a^3yy & + {}^3a^4y & + {}^5a^3bb & \infty 0. \\ & + {}^2bb & - {}^3abb & - {}^4aabb & - {}^2a^5 & \\ & & & + b^4 & - ab^4 & \end{array}$$

Quarum duarum maxima communis menſura per ſuperiorem metho-

methodum eſt $y - a \infty 0$, ideoque $y \infty a$; cumque z ſit $\infty 3aay - y^3 - bby + {}^3abb - {}^2a^3$, erit inde z etiam $\infty + {}^2abb$. Æquatio autem, per quam Propoſita dividi poteſt, poſita erat $x^3 + yxx + {}^2aax + z \infty 0$. Quocirca ſi in hac ſubrogentur valores quantitatum incognitarum y & z, invenietur pro ipſa $x^3 + axx + {}^2aax + {}^2abb \infty 0$.

Atque ita de aliis omnibus Propoſitis æquationibus, ſive rationalibus ſive irrationalibus, & vel aliquam vel nullam fractionem habentibus; atque etiam ſive ultimus Terminus, ſive aliquis alius, quem libuerit, æquationis, per quam Propoſitæ dividi queunt, datus fuerit, ſive alicui quantitati (ut in his exemplis), ſive nihilo æqualis ſit; cujus quidem generis nullum exemplum affero, cum operatio haudquaquam diverſa exiſtat. Id tantùm addam, hæc omnia etiam ex comparatione terminorum duarum ejuſdem formæ æquationum inveniri poſſe.

10ma, ET 11ma REGULÆ SE EXTENDUNT AD OMNEM ÆQUATIONEM, SIVE IN EA IRRATIONALES QUANTITATES ET FRACTIONES, SIVE NULLÆ REPERIANTUR, EXCEPTIS TANTUM ILLIS ÆQUATIONIBUS, IN QUIBUS SIGNA RADICALIA SUNT, QUÆ INCOGNITAM QUANTITATEM INCLUDUNT.

Cum autem hæ duæ Regulæ Methodum requirant, qua omnia ſigna radicalia, quæ incognitam quantitatem includunt, ſi in æquatione Propoſita talia fortè fuerint, primùm tollantur; ſequentes verò Regulæ, quibus omnia ſigna ſine diſcrimine primùm auferantur: præmittam

Modum tollendi ſigna radicalia ex qualibet æquatione Propoſita.

Proponatur, verbi gratiâ, æquatio $n \infty e + g + b + k + m$, &c. in qua 1°. quælibet litera quantitatem deſignet, ſigno radicali $\sqrt{Q}$ adfectam. Multiplicetur utraque pars quadratè, & evaneſcet ſignum quantitatis n. Quoniam autem reliquæ literæ e, g, b, k, m, &c. aut unam aut duas dimenſiones habebunt, ſignumque radicale, in quantum duas habent, evaneſcet; manifeſtum eſt, ob-

 tineri

tineri poſſe æquationem, in qua e æquatur aliis terminis, in quibus e non comprehenditur. Quæ æquatio ſi rurſus eodem modo in ſe ducatur quadratè, evaneſcet pariter ſignum radicale ipſius e; & quoniam in hac ultima æquatione tunc reliquæ literæ habebunt aut 1, aut 2, aut 3, aut 4 dimenſiones, ac ipſæ in quantum ex paribus dimenſionibus conſtant nullum ſignum radicale habent, & quantùm ex imparibus conſtant ratione tollendi ſigni radicalis ſolummodo conſiderandæ ſunt tanquam unâ duntaxat dimenſione conſtantes, cum duæ ſigno radicali ſemper carent: manifeſtum eſt rurſus inveniri poſſe æquationem, in qua g ſit æqualis aliquot terminis, in quibus g non comprehenditur. Quâ æquatione denuo quadratâ, ſublatum item erit ſignum radicale ipſius g. Atque ita facile eſt intelligere, quâlibet quadratione unum ſignum radicale tolli.

Majoris perſpicuitatis ergo addatur ſequens operatio, exiſtente $n \infty e + g + h + k$, ubi quadrando utramque partem æquationis prodit æquatio $nn \infty ee + gg + hh + kk + 2eg + 2eh + 2ek + 2gh + 2gk + 2hk$. Brevitatis autem causâ, pro $\frac{nn - ee - gg - hh - kk}{2}$ ſcribatur pp; cum hæ quantitates ſigno radicali careant; & fit $pp \infty eg + eh + ek + gh + gk + hk$, ſive $e \infty \frac{pp - gh - gk - hk}{g + h + k}$. Unde quadrando rurſus utramque partem invenitur:

$$ee \infty \frac{p^4 + gghh + ggkk + hhkk - 2ppgh - 2ppgk - 2pphk + 2gghk + 2ghhk + 2ghkk}{gg + hh + kk + 2gh + 2gk + 2hk},$$

ſeu

$$p^4 + gghh + ggkk + hhkk - 2ppgh - 2ppgk - 2pphk + 2gghk + 2ghhk + 2ghkk - \overline{gg - hh - kk - 2gh - 2gk - 2hk} \text{ in } ee \infty 0.$$

Supponatur, ut ante, brevitatis causâ,

$$\begin{aligned} p^4 + gghh + ggkk + hhkk - \overline{gg - hh - kk} \text{ in } ee &\infty q^4 \\ + 2kk - 2pp - 2ee &\infty rr \\ + 2hh - 2pp - 2ee &\infty ss \\ + 2gg - 2pp - 2ee &\infty tt, \end{aligned}$$

erit-

eritque $\overline{q^4 + rrgh + ssgk + tthk} \propto 0$

$$\frac{q^4 + tthk}{rrh + ssk} \propto -g$$

$$\frac{q^8 + t^4hhkk + {}^2q^4tthk}{r^4hh + s^4kk + {}^2rrsshk} \propto gg$$

$\overline{q^8 + t^4hhkk + {}^2q^4tthk - r^4hh - s^4kk - {}^2rrsshk} \text{ in } gg \propto 0.$

Supponatur rurſus, brevitatis cauſâ,

$q^8 + t^4hhkk - r^4hhgg - s^4kkgg \propto v^8,$

& ${}^2q^4tt - {}^2rrssgg \propto w^6$:

fietque $\overline{v^8 + w^6hk} \propto 0$

$\overline{v^8 \propto - w^6hk}$

& invenietur $v^{16} \propto w^{12}hhkk$. Quæ æquatio ab omnibus ſignis radicalibus liberata eſt.

Deinde ponatur unaquæque litera æquationis ſuperioris $n \propto e + g + h$, &c. deſignare quantitatem ſigno radicali $\sqrt{C}$. adfectam. In hac igitur ſi loco quadratæ multiplicationis utraque pars multiplicetur cubicè, evaneſcet ſignum radicale ipſius n, & unaquæque reliquarum literarum e, g, h, &c. acquiret 1, 2, aut 3 dimenſiones. In quantum autem tres dimenſiones habent, in tantum carent etiam ſigno radicali, adeò ut hâc ratione obtineri queat æquatio, in qua e non niſi 1 aut 2 dimenſiones habere poteſt. Quocirca multiplicando omnes hoſce terminos per e, obtinebitur æquatio, in qua e præter 1, 2, & 3 dimenſiones habere nequit. In quantum autem 3 habet, in tantum quoque ſignum radicale, uti dictum eſt, evaneſcit; ac proinde ipſa e in hac æquatione etiam non niſi 1 & 2 dimenſiones retinere poterit. Hinc ſi ope hujus æquationis quæratur valor ipſius ee, iſque in locum ee præcedentis ſubſtituatur, obtinebitur æquatio in qua e unam tantùm dimenſionem habebit, atque ideo inveniri poterit e æqualis aliquot terminis, in quibus ipſa non comprehenditur. Quæ æquatio, ſi deinde cubetur, dabit aliam, in quâ ſimiliter ſignum radicale ipſius e prorſus evaneſcet. vel poteſt rurſum per e multiplicari; & valor ee de novo inveniri, quo iterum, ut antea, poſito loco ee, habes valorem ipſius e alio adhuc modo; ideoque duo hi valores invicem comparati, æquationem dabunt, in quâ $\sqrt{C}^{am}$. ipſius

ipſius e non reperies. Atque ſic omnia alia ſigna radicalia ex æquatione tolli poſſunt; quod facillimè perſpicitur, ſi tantùm advertamus, quòd, verbi gratiâ, $g, gg, g^4, g^5, g^7, g^8, g^{10}, g^{11}, g^{13}, g^{14}$, &c. ſolummodo habendæ ſint pro g, gg, cum g^3 ſignum radicale deponat. Quæ ut magis perſpicua evadant, ſequentem operationem adjicere viſum fuit.

Sit ex. gr. $n \infty e + g$

$$n^3 \infty e^3 + 3eeg + 3egg + g^3$$

$$n^3 - e^3 - g^3 \infty 3eeg + 3egg.$$

Eſto jam, brevitatis causâ, $n^3 - e^3 - g^3 \infty f^3$, quoniam ipſæ Aſymmetriâ carent, fietque $f^3 \infty 3eeg + 3egg$

$$f^3e \infty 3e^3g + 3eegg$$

$$\& \frac{f^3e - 3e^3g}{g} \infty 3eeg.$$

Invento valore ipſius $3eeg$ in ejus locum in æquatione præcedente ſubrogato, habebitur:

$$f^3 \infty \frac{f^3e - 3e^3g}{g} + 3egg$$

$$f^3g \infty f^3e - 3e^3g + 3eg^3$$

$$f^3g + 3e^3g \infty f^3e + 3eg^3$$

$$\frac{f^3g + 3e^3g}{f^3 + 3g^3} \infty e.$$

Denique ponatur, brevitatis causâ, $f^3 + 3e^3 \infty p^3$, & $f^3 + 3g^3 \infty q^3$, cum ſingulæ ſignum radicale deponant,

eritque $\frac{p^3g}{q^3} \infty e$

& $\frac{p^9g^3}{q^9} \infty e^3$. Quæ æquatio ab Aſymmetria libera eſt. Vel hoc modo: multiplicetur $\frac{p^3g}{q^3} \infty e$ per e, erit $\frac{p^3ge}{q^3} \infty ee$; & quoniam inventa eſt $f^3 \infty 3gee + 3gge$, ſeu, $\frac{f^3 - 3gge}{3g} \infty ee$

erit $\frac{p^3ge}{q^3} \infty \frac{f^3 - 3gge}{3g}$

& $3ggp^3e \infty q^3f^3 - 3q^3gge$

ergo $e \infty \frac{q^3f^3}{3ggp^3 + 3q^3gg} \infty \frac{p^3g}{q^3}$

& $q^6f^3 \infty 3g^3p^6 + 3g^3p^3q^3$. Quæ æquatio itidem ab omni ſigno radicali libera eſt.

Pari

Pari ratione tolli quoque poſſunt ſigna quævis altiora, ſive illa ejuſdem, ſive diverſæ dimenſionis ſint. Sed notandum eſt, quòd ſigna hæc, ſive ipſa cognitis, ſive incognitis quantitatibus præfigantur, per hunc modum ſemper quidem tolli poſſint, ſed eum ſæpiſſime non eſſe breviſſimum, quando ſcilicet ſigna radicalia ad quantitates cognitas pertinent; quemadmodum pag. 75 Geometriæ cernere licet, ubi conſtat, quædam ſigna tolli poſſe multiplicando radicem æquationis per certam aliquam quantitatem, quo opere ipſa in aliam æquationem tranſmutatur, æquè multas dimenſiones habentem.

Dantur præterea adhuc alia compendia, quorum ſupra allatum exemplum ſpecimen erit: hæc enim æquatio $f3 \propto 3gee + 3gge$ diviſa per n ab una parte, & per $e + g$ (quæ æqualis eſt n,) ab altera parte, dat $\frac{f3}{n} \propto 3ge$, cujus partes cubicè multiplicatæ dabunt $\frac{f9}{n3} \propto 27g^3 e3$, æquationem, in qua nullum ſignum radicale invenitur: Sed quoniam propoſui tantummodo hic generalem modum indicare, quo ſemper omnia ſigna radicalia tolli queant, & non compendia, quibus in multis caſibus faciliùs eò pervenire poſſes, monſtrare; ideo huic rei finem imponam, & ad Regulas Reductionum revertar.

X. REGULA,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem, ſive literalem, ſive numeralem, cujus incognita quantitas, (vel alia litera, quæ tanquam incognita conſiderari poteſt) duos vel plures æquales habet valores.

Primò ſi in Propoſita æquatione duæ æquales radices exiſtant, multiplico eam per Arithmeticam Progreſſionem pro libitu aſſumptam: nimirum, primum terminum æquationis per primum terminum progreſſionis, ſecundum terminum æquationis per ſecundum terminum progreſſionis, & ſic deinceps; & Productum, quod inde fit, erit $\propto$ o. Deinde, cum ſic duas habeam æquationes,

quæro, per Methodum ſuperiùs explicatam, maximum earum communem diviſorem ; atque hujus ope æquationem Propoſitam toties divido, quoties id fieri poteſt.

Exempli gratiâ, proponatur hæc æquatio $x^3 - 4xx + 5x - 2 \infty 0$, in qua duæ ſunt æquales radices. Multiplico ergo ipſam per Arithmeticam Progreſſionem qualemcunque, hoc eſt, cujus incrementum vel decrementum ſit vel 1, vel 2, vel 3, vel alius quilibet numerus; & cujus primus terminus ſit vel 0, vel +, vel — quàm 0: Ita ut ſemper ejus ope talis terminus æquationis tolli poſſit, qualem quis voluerit, colloeando tantùm ſub eo 0.

Ut ſi, exempli causâ, ultimum ejus terminum auferre velim, multiplicatio fieri poteſt ipſius $x^3 - 4xx + 5x - 2 \infty 0$

per hanc progreſſionem $3. \quad 2. \quad 1. \quad 0.$

fietque $3x^3 - 8xx + 5x \; * \; \infty 0.$

Maximus autem communis diviſor hujus & Propoſitæ æquationis eſt $x - 1 \infty 0$, per quam Propoſita bis dividi poteſt ; ita ut ejuſdem radices ſint 1, 1, & 2.

Sic ſi cupiam primum æquationis terminum auferre, multiplicatio inſtitui poteſt ipſius $x^3 - 4xx + 5x - 2 \infty 0$

per hanc progreſſionem $0. \quad 1. \quad 2. \quad 3.$

& fit $* \; - 4xx + 10x - 6 \infty 0.$

Cujus quidem ac Propoſitæ æquationis maximus communis diviſor, ut antea, eſt $x - 1 \infty 0$.

Similiter ſi ſecundum terminum tollere lubeat, multiplicatio fieri poteſt, hoc pacto: $x^3 - 4xx + 5x - 2 \infty 0$

$+1. \quad 0. - 1. - 2$

& prodibit $x^3 \; * \; - 5x + 4 \infty 0.$

Cujus item & Propoſitæ maximus communis diviſor eſt $x - 1 \infty 0$.

Ubi notandum, non neceſſarium eſſe, ſemper uti Progreſſione cujus exceſſus ſit 1, quanquam ea communiter ſit optima.

Cæterùm notandum, inter omnes has diverſas operationes, quamvis eundem communem diviſorem maximum exhibeant, tamen alias aliis ſæpe eſſe præferendas, quandoquidem unius termini deſtructione ſæpenumero multò faciliùs ad finem pervenitur

quàm

quàm alterius. Neque etiam tenemur hunc diviſorem immediatè ex Propoſita æquatione & aliqua hujuſmodi Progreſſione genita inveſtigare: cum duæ ex his eligi poſſint, quarum beneficio eum invenire liceat. Ut ſumendo, verbi gratiâ, $3xx - 8x + 5 \infty 0$ & $-4xx + 10x - 6 \infty 0$, vel $3xx - 8x + 5 \infty 0$ & $x^3 * - 5x + 4 \infty 0$, vel $-4xx + 10x - 6 \infty 0$ & $x^3 * - 5x + 4 \infty 0$. Et ſæpe etiam longè compendioſius eſt, duo hujuſmodi producta ſibi eligere, ac deinde illorum communem diviſorem quærere, quàm uti uno aliquo producto & æquatione Propoſitâ. Quæ quidem omnia uſus hujus Regulæ abundè docebit.

Quemadmodum autem in hoc exemplo, ita in quovis alio Propoſito procedo; cum perinde ſit, ſive æquatio numerica, ſive literalis fuerit, & ſive fractiones aut ſurdas quantitates includat, ſive non; modò incognita quantitas inter ſurdas non contineatur: ità ut ſuperfluum ſit plura exempla hac de re afferre. Quocirca ad alteram hujus Regulæ partem tranſeo.

2dò. Si in Propoſita æquatione 3 æquales radices fuerint, multiplico illam per Arithmeticam Progreſſionem, ut antea; eritque Productum $\infty 0$: Hoc Productum rurſus multiplico per Arithmeticam Progreſſionem; eritque hoc ſecundum Productum etiam $\infty 0$. Si æquatio Propoſita 4 radices æquales habeat, ter multiplico; ſi 5, quater; & ita ſemper obtinebuntur tot æquationes, quot radices æquales in æquatione Propoſita continentur.

Exempli gratiâ, detur hæc æquatio $x^4 * - 6xx + 8x - 3 \infty 0$, habens 3 æquales radices.

Primò multiplico eam per 0. 1. 2. 3. 4

& fit $- 12xx + 24x - 12 \infty 0$.

Hoc productum iterum multiplico per 0. 1. 2

& provenit $24x - 24 \infty 0$.

eritque communis diviſor $x - 1 \infty 0$.

Ita ut Propoſita æquatio habeat has 4 radices 1, 1, 1, & -3. Et ſic de aliis omnibus.

Quod verò uſum hujus Methodi concernit, is tantus eſt, in inveniendis Tangentibus, determinandis Maximis & Minimis, & quibuſvis extremis, ut, quamvis ſe ad alia non extenderet, immenſus tamen dici poſſet. Etenim reductis talibus Problematis ad Æquationem, in qua hæc ſola conditio ad ejus determinationem adhuc requiritur, ut incognita quantitas (aut alia quævis litera, quæ ut incognita conſideratur) ad duas æquales radices determinetur: poterit Quæſitum beneficio hujus Methodi quàm facillimè inveniri. quippe nihil aliud opùs eſt, quàm æquationem dicto modo per Arithmeticam Progreſſionem multiplicare: cum duæ hæ æquationes tunc omnes Problematis conditiones ſint comprehenſuræ, ita ut ipſæ tantùm reſolvendæ reſtent. Et notandum eſt, hoc ſæpe beneficio ſolius productæ æquationis, nullo, aut exiguo admodum labore, præſtari poſſe; quod patet in omnibus illis exemplis, quæ de inveniendis tangentibus pagin. 40, 41, & 42 à Domino des Cartes in ſua Geometria ſunt allata, in quibus v & $ſ$ incognitæ exiſtunt & y quidem cognita, ſed quæ ut incognita conſideratur: omnes enim illorum Problematum conditiones æquationibus erunt comprehenſæ, ſi illæ ipſæ æquationes ſic determinentur, ut dicta quantitas y duas æquales radices obtineat.

Primum dictorum exemplorum eſt $yy \frac{+qr-2qv}{q-r} y \frac{+qvv-qss}{q-r} \infty 0$

Multiplico per meam Methodum per 2. 1. 0

$$\text{fit } 2yy + \frac{qr-2qv}{q-r} y \infty 0$$

$$\text{ſeu } 2qy - 2ry + qr \infty 2qv$$

$$\& \; y - \frac{ry}{q} + \tfrac{1}{2} r \infty v.$$

2dum exemplum eſt

$$\begin{array}{llllllll} y^6 - 2by^5 & -2cdy^4 & +4bcdy^3 & -2bbcdyy & -2bccddy & +bbccdd & \infty 0 \\ & +bb & -2ddv & +ccdd & & & \\ & +dd & & -ddſſ & & & \\ & & & +ddvv & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lllllll} \text{Mult. per } +4, & +3, & +2, & +1, & 0, & -1, & -2 \end{array}$$

eritque productum

$$\begin{array}{llllll} 4y^6 - 6by^5 & -4cdy^4 & +4bcdy^3 & * & +2bccddy & -2bbccdd \infty 0 \\ & +2bb & -2ddv & & & \\ & +2dd & & & & \end{array}$$

Div j-

Dividendo jam per $2ddy^3$ & transferendo v ad alteram partem, obtinebitur $\frac{2y^3}{dd} - \frac{3byy}{dd} - \frac{2cy}{d} + \frac{2bc}{d} + \frac{bcc}{yy} - \frac{bbcc}{y^3} \infty v.$

$$+\frac{bby}{dd}$$

$$+y$$

3tium autem exemplum ejuſdem eſt naturæ cum 1mo.

Ubi patet, in omnibus hiſce exemplis Quæſitum ex ſola Producta æquatione uno intuitu inveniri, y enim cognita eſt, atque v, quæ erat incognita ac ſola quærebatur, jam etiam innotuit.

At verò ſæpè etiam accidit, ut Quæſitum ex ſola hac Producta æquatione inveniri nequeat; quemadmodum contingit ſi valorem quantitatis incognitæ $ſ$ inveſtigare velimus. Quippe tunc valor ipſius v in prima æquatione in ejus locum ſubrogandus eſt, vel potiùs in alia æquatione, per aliam Progreſſionem productâ, cujus beneficio ex illa prima terminus aliquis pro lubitu (excepto eo, qui per 1mam Progreſſionem eſt ſublatus) tolli poteſt,

Exempli gratiâ, in 1mo exemplo multiplicatum fuit per 2, 1, 0; ac inde inventum $v \infty y - \frac{ry}{q} + \frac{1}{2}r$; Jam ſi multiplicetur

$$yy + \frac{qr - 2qv}{q-r}y + \frac{qvv - qss}{q-r} \infty 0$$

per $+1$, 0, -1:

obtinetur $yy \quad * \quad \frac{-qvv + qss}{q-r} \infty 0$

mult. per $q - r$.

div. per q. $\quad qyy - ryy \quad * \quad -qvv + qss \infty 0$

$$ss \infty -yy + \frac{ryy}{q} + vv$$

fit $s \infty \sqrt{-yy + \frac{ryy}{q} + vv}$.

Quocirca ſi in hac æquatione in locum vv ſubrogetur ejus valor, innoteſcet inde etiam quantitas s.

Eodem modo, multiplicando in 2do exemplo per hanc Progreſſionem 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, inveniri poteſt valor quantitatis s. Ubi ſi ſimiliter in locum vv, ejus valor ſubſtituatur, quantitas s inde innoteſcet.

Quòd ſi verò contingat, æquationem, per quam v quæritur, eſſe talem, ut valor ipſius v per eandem æquationem ſolam ſine

ipſius s incluſione obtineri non poſſit; quemadmodum hic valor ipſius s abſque incluſione ipſius v ex producta æquatione inveniri nequit; poteſt tamen ſemper, quotcunque etiam dimenſiones quælibet incognita quantitas habeat, tandem inveniri æquatio (operando haud ſecus ac ſi illarum communis diviſor, ut ſupra oſtenſum fuit, quæreretur), in qua duntaxat una incognita quantitas includitur, cujus radices deinceps ſunt inveniendæ.

Exempli gratiâ, ſi habeatur hæc æquatio

$$\begin{array}{l} y^4 * - 6zzyy - 12z^3y + 9z^4 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 9aazz \infty 0, \end{array}$$

in qua y & z ſint incognitæ, & y ad z æquales radices determinari debeat: operationem inſtituo, ut ſequitur.

$$\begin{array}{lccccccc}
 & y^4 & * & -6zzyy & -12z^3y & +9z^4 & \infty 0 \\
 & & & & & -9aazz & \\
\text{Mult. per} & 0, & 1, & 2, & 3, & 4 & \\ \hline
\text{fit} & & & -12zzyy & -36z^3y & +36z^4 & \infty 0 \\
 & & & & & -36aazz & \\ \hline
\text{div. per } 12zz. & & & -yy & -3zy & +3zz & \infty 0 \\
 & & & & & -3aa & \\ \hline
 & & & yy \infty & -3zy & +3zz. & \\
 & & & & & -3aa &
\end{array}$$

Similiter multiplicetur Propoſita

$$\begin{array}{lccccccc}
 & y^4 & * & -6zzyy & -12z^3y & +9z^4 & \infty 0 \\
 & & & & & -9aazz & \\
\text{per} & 4, & 3, & 2, & 1, & 0 & \\ \hline
\text{fit} & 4y^4 & * & -12zzyy & -12z^3y & * & \infty 0 \\ \hline
\text{div. per } 4y. & y^3 & * & -3zzy & -3z^3 & \infty 0. &
\end{array}$$

Subſtituendo jam valorem ipſius yy, ſupra inventum, in ejus locum, habebitur

$$\begin{array}{lll}
y^3 \infty -3zyy + 3zzy & \text{ſeu} & +9zzy - 9z^3 \\
\qquad\qquad\quad -3aay & & +3zzy + 9aaz \\
 & & -3aay \\
-3zzy - 3z^3 \infty & \ldots & -3zzy - 3z^3 \\ \hline
 & \text{ſumma} & +9zzy - 12z^3 \quad \infty 0 \\
 & & -3aay + 9aaz \\ \hline
 & & y \infty \frac{4z^3 - 3aaz}{3zz - aa}.
\end{array}$$

Quo-

Quocirca ſubſtituendo rurſus hunc valorem ubique in locum y in hac æquatione $yy \infty -3zy \begin{array}{l} +3zz \\ -3aa \end{array}$, exurget inde alia æquatio, in quâ nulla incognita præterquam ſola z reperitur, quæque per eam porrò inveniri poteſt.

Denique, quicquid hîc de duabus æqualibus radicibus dixi, eodem etiam modo de 3 aut pluribus æqualibus eſt intelligendum. Si enim æquatio habeatur, quæ omnes conditiones Problematis includat, exceptâ hac ſolâ, quòd incognita quantitas, vel quæ ut incognita conſideratur, ad 3 vel plures æquales radices adhuc ſit determinanda: oportet ipſam primùm multiplicare per Arithmeticam Progreſſionem, & hoc productum rurſus eodem modo, & ſic deinceps, donec totidem æquationes habeantur; quot æquales radices. ut ſupra dictum atque explicatum fuit. Quo peracto, tantùm æquationes eodem modo reſolvendæ ſunt, ut in ſuperiori exemplo oſtenſum eſt, donec una tandem obtineatur æquatio, in qua non niſi una incognita quantitas reperiatur. Et demum notandum, infinita Problemata, quæ multis planè artificioſa ac ingenioſa dicuntur, ad talem æquationem, in qua ſolummodo una hujuſmodi determinatio adhuc implenda eſt, quàm facillimè reduci & deinde per hanc Methodum ſolvi poſſe.

XI. *REGULA*,

Quæ modum docet reducendi omnes æquationes, ſive literales, ſive numerales, quæ produci poſſunt ex multiplicatione duarum aliarum, in quarum alterutra unus pluréſve termini deficiunt.

Brevitatis causâ quantitatem cognitam 2^{di} termini, adfectam ſuis ſignis + & —, vocabo p; 3^{tii} q; 4^{ti} r; 5^{ti} $ſ$; atque ſic deinceps: & $-p$, $-q$, $-ſ$, &c. eaſdem quantitates deſignabunt, ſed contrariis ſignis adfectas.

Ex. gr. in hac æquatione $x^4 \begin{array}{l} -{}^2ax^3 \\ +{}^3b \end{array} -{}^4bbxx \begin{array}{l} +{}^6abbx \\ +{}^2aab \end{array} -{}^4a^4 \infty 0$,

erit $-{}^2a+{}^3b \infty p$; $-{}^4bb \infty q$; $+{}^6abb+{}^2aab \infty r$; $-{}^4a^4 \infty ſ$; & $+{}^2a-{}^3b \infty -p$; $+{}^4bb \infty -q$; &c.

1ma Pars.

Si aliquà æquatio, 6 aut pauciores dimenſiones habens, produci poſſit ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera ſit unius dimenſionis, altera verò uno pluribuſve terminis careat; erit ejus Formula aliqua ex ſequentibus, & poterit dividi vel per unamquamque æquationem ſibi adjunctam, vel per aliquam earum.

Per *unamquamque*, ubi hæ æquationes ſeu Diviſores copulantur per voculam *&*; per *aliquam* verò, ubi disjunguntur per voculam *vel*.

$x^3, pxx, qx, r \propto 0$ . . . per $x + p \propto 0$, & $x + \frac{r}{q} \propto 0$.

$x^4, px^3, qxx, rx, s \propto 0$ per $x + p \propto 0$, *vel* $x + \frac{s}{r} \propto 0$.

$x^4, px^3, *, rx, s \propto 0$ per $x + p \propto 0$, & $x + \frac{s}{r} \propto 0$.

$x^4, px^3, qxx, *, s \propto 0$ per $x + p \propto 0$, & $x \pm \sqrt{-\frac{s}{q}} \propto 0$.

$x^4, *, qxx, rx, s \propto 0$ per $x + \frac{s}{r} \propto 0$, & $x \pm \sqrt{-q} \propto 0$.

$x^5, px^4, qx^3, rxx, sx, t \propto 0$ per $x + p \propto 0$, *vel* $x + \frac{t}{s} \propto 0$,
vel $x + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \propto 0$.

$x^5, px^4, qx^3, *, sx, t \propto 0$ per $x + p \propto 0$, *vel* $x + \frac{t}{s} \propto 0$.

$x^5, px^4, *, rxx, sx, t \propto 0$ per $x + p \propto 0$, *vel* $x + \frac{t}{s} \propto 0$.

$x^5, px^4, qx^3, rxx, *, t \propto 0$ per $x + p \propto 0$, *vel* $x \pm \sqrt{-\frac{t}{r}} \propto 0$.

$x^5, *, qx^3, rxx, sx, t \propto 0$ per $x + \frac{t}{s} \propto 0$, *vel* $x \pm \sqrt{-q} \propto 0$.

$x^5, px^4, *, *, sx, t \propto 0$ per $x + p \propto 0$, & $x + \frac{t}{s} \propto 0$.

$x^5, px^4, *, rxx, *, t \propto 0$ per $x + p \propto 0$, & $x \pm \sqrt{-\frac{t}{r}} \propto 0$.

$x^5, *, qx^3, *, sx, t \infty 0$ per $x + \frac{t}{s} \infty 0$, & $x \pm \sqrt{-q} \infty 0$.

$x^5, px^4, qx^3, *, *, t \infty 0$ per $x + p \infty 0$, & $x + \sqrt{C.\frac{t}{q}} \infty 0$.

$x^5, *, *, rxx, sx, t \infty 0$ per $x + \frac{t}{s} \infty 0$, & $x + \sqrt{C.r} \infty 0$.

$x^5, *, qx^3, rxx, *, t \infty 0$ per $x \pm \sqrt{-q} \infty 0$, & $x \pm \sqrt{-\frac{t}{r}} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, sxx, tx, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, *vel* $x + \frac{v}{t} \infty 0$,
vel $x + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty 0$,
vel $x + \frac{t}{2s} \pm \sqrt{\frac{tt}{4ss} - \frac{v}{s}} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, *, sxx, tx, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, *vel* $x + \frac{v}{t} \infty 0$,
vel $x + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, *, tx, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, *vel* $x + \frac{v}{t} \infty 0$,
vel $x + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, sxx, *, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, *vel* $x \pm \sqrt{-\frac{v}{s}} \infty 0$,
vel $x + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, *, *, tx, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, *vel* $x + \frac{v}{t} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, *, sxx, *, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, *vel* $x \pm \sqrt{-\frac{v}{s}} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, *, *, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, *vel* per utramque harum duarum
$x + \sqrt{C.\frac{v}{r}} \infty 0$,
$x + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty 0$.

$x^6, *, qx^4, rx^3, sxx, tx, v \infty 0$ per $x + \frac{v}{t} \infty 0$, *vel* $x \pm \sqrt{-q} \infty 0$,
vel $x + \frac{t}{2s} \pm \sqrt{\frac{tt}{4ss} - \frac{v}{s}} \infty 0$.

$x^6, *, qx^4, rx^3, *, tx, v \infty 0$ per $x + \frac{v}{t} \infty 0$, *vel* $x \pm \sqrt{-q} \infty 0$.

$x^6, *, qx^4, rx^3, sxx, *, v \infty 0$ per $x \pm \sqrt{-q} \infty 0$, *vel* $x \pm \sqrt{-\frac{v}{s}} \infty 0$.

$x^6, *, *, rx^3, sxx, tx, v \infty 0$ per $x + \frac{v}{s} \infty 0$, *vel* $x + \sqrt{C.\, r} \infty 0$.

$x^6, px^5, *, rx^3, sxx, *, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, *vel* $x \pm \sqrt{-\frac{v}{s}} \infty 0$.

$x^6, px^5, *, rx^3, sxx, tx, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, *vel* $x + \frac{v}{t} \infty 0$,

vel $x + \frac{t}{2s} \pm \sqrt{\frac{tt}{4ss} - \frac{v}{s}} \infty 0$.

$x^6, *, qx^4, *, sxx, tx, v \infty 0$ per $x + \frac{v}{t} \infty 0$, *vel* $x \pm \sqrt{-q} \infty 0$.

$x^6, px^5, *, *, sxx, tx, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, *vel* $x + \frac{v}{t} \infty 0$.

$x^6, px^5, *, rx^3, *, tx, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, *vel* $x + \frac{v}{t} \infty 0$.

$x^6, px^5, qx^4, *, *, *, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, & $x - \frac{v}{p^3 q} \infty 0$,

& $x \pm \sqrt{-\frac{v}{ppq}} \infty 0$,

& $x \pm \sqrt{\sqrt{-\frac{v}{q}}} \infty 0$.

$x^6, *, qx^4, rx^3, *, *, v \infty 0$ per $x \pm \sqrt{-q} \infty 0$, & $x - \frac{v}{qr} \infty 0$,

& $x + \sqrt{C.\, \frac{v}{r}} \infty 0$.

$x^6, *, *, rx^3, sxx, *, v \infty 0$ per $x - \frac{rs}{v} \infty 0$, & $x \pm \sqrt{-\frac{v}{s}} \infty 0$,

& $x + \sqrt{C.\, r} \infty 0$.

$x^6, *, *, *, sxx, tx, v \infty 0$ per $x + \frac{v}{t} \infty 0$, & $x - \frac{st^3}{v^3} \infty 0$,

& $x \pm \frac{t}{v} \sqrt{-s} \infty 0$,

& $x - \sqrt{C.\, \frac{st}{v}} \infty 0$,

& $x \pm \sqrt{\sqrt{-s}} \infty 0$.

$x^6, px^5, *, rx^3, *, *, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, & $x + \sqrt{C.\, \frac{v}{r}} \infty 0$,

& $x + \frac{v}{ppr} \infty 0$.

$x^6, *, qx^4, *, sxx, *, v \infty 0$ per $x \pm \sqrt{-q} \infty 0$, & $x \pm \sqrt{-\frac{v}{s}} \infty 0$.

$x^6, *, *, rx^3, *, tx, v \infty 0$ per $x + \frac{v}{t} \infty 0$, & $x + \sqrt{C.\, r} \infty 0$.

$x^6, px^5, *, *, sxx, *, v \infty 0$ per $x + p \infty 0$, & $x \pm \sqrt{-\frac{v}{s}} \infty 0$.

x^6,

$x^6, *, qx^4, *, *, tx, v \propto 0$ per $x + \frac{v}{t} \propto 0$, & $x \pm \sqrt{-q} \propto 0$.

$x^6, px^5, *, *, *, tx, v \propto 0$ per $x + p \propto 0$, & $x + \frac{v}{t} \propto 0$.

2da *Pars.*

Si aliqua æquatio, 6 aut pauciores dimenſiones habens, produci poſſit ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera ſit duarum vel plurium dimenſionum, ac duorum tantùm terminorum; erit ejus Formula aliqua ex ſequentibus, & poterit dividi per unamquamque æquationem ſibi adjunctam.

1^{mò}. *Per* $xx \pm$ *quantitate aliquâ cognitâ* $\propto 0$.

$x^3, pxx, qx, r \propto 0$ per $xx + q \propto 0$, ($x + p \propto 0$.)

$x^4, px^3, qxx, rx, s \propto 0$ per $xx + \frac{r}{p} \propto 0$, & $xx + \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq - s} \propto 0$.

$x^4, px^3, *, rx, s \propto 0$ per $xx + \frac{r}{p} \propto 0$, & $xx \pm \sqrt{-s} \propto 0$.

$x^4, *, qxx, *, s \propto 0$ per $xx + \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - s} \propto 0$, & $xx + \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - s} \propto 0$.

$x^4, *, *, *, s \propto 0$ per $xx + \sqrt{-s} \propto 0$, & $xx - \sqrt{-s} \propto 0$.

$x^5, px^4, qx^3, rxx, sx, t \propto 0$ per $xx + \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq - s} \propto 0$, & $xx + \frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{s}{p}} \propto 0$.

$x^5, px^4, qx^3, rxx, *, t \propto 0$ per $xx + q \propto 0$, & $xx + \frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{t}{p}} \propto 0$.

$x^5, px^4, qx^3, *, *, t \propto 0$ per $xx + q \propto 0$, & $xx \pm \sqrt{-\frac{t}{p}} \propto 0$.

$x^5, *, qx^3, rxx, *, t \propto 0$ per $xx + q \propto 0$, & $xx + \frac{t}{r} \propto 0$.

$x^5, *, *, rxx, sx, t \propto 0$ per $xx + \frac{t}{r} \propto 0$, & $xx \pm \sqrt{-s} \propto 0$.

$x^5, *, qx^3, rxx, sx, t \infty o$ per $xx + \frac{s}{r} \infty o$, & $xx + \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq - s} \infty o$.

$x^5, px^4, *, *, sx, t \infty o$ per $xx \pm \sqrt{-s} \infty o$, & $xx \pm \sqrt{-\frac{s}{p}} \infty o$.

$x^5, px^4, *, rxx, sx, t \infty o$ per $xx \pm \sqrt{-s} \infty o$, & $xx + \frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{s}{p}} \infty o$.

$x^5, px^4, qx^3, *, sx, t \infty o$ per $xx \pm \sqrt{-\frac{s}{p}} \infty o$, & $xx + \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq - s} \infty o$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, sxx, tx, v \infty o$ per $xx + \frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{s}{p}} \infty o$.

$x^6, px^5, *, rx^3, sxx, tx, v \infty o$ per $xx + \frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{s}{p}} \infty o$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, *, tx, v \infty o$ per $xx + \frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{s}{p}} \infty o$.

$x^6, px^5, *, rx^3, *, tx, v \infty o$ per $xx + \frac{r}{2p} \pm \sqrt{\frac{rr}{4pp} - \frac{s}{p}} \infty o$, & $xx + \sqrt{C.\,v} \infty o$.

$x^6, px^5, *, rx^3, sxx, *, v \infty o$ per $xx + \frac{r}{p} \infty o$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, *, *, v \infty o$ per $xx + \frac{r}{p} \infty o$.

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, sxx, *, v \infty o$ per $xx + \frac{r}{p} \infty o$.

$x^6, px^5, *, rx^3, *, *, v \infty o$ per $xx + \frac{r}{p} \infty o$, & $xx + \sqrt{C.\,v} \infty o$.

$x^6, *, qx^4, rx^3, sxx, tx, v \infty o$ per $xx + \frac{s}{r} \infty o$.

$x^6, *, *, rx^3, sxx, tx, v \infty o$ per $xx + \frac{s}{r} \infty o$.

$x^6, *, qx^4, rx^3, *, tx, v \infty o$ per $xx + \frac{s}{r} \infty o$.

$x^6, *, *, rx^3, *, tx, v \infty o$ per $xx + \frac{s}{r} \infty o$, & $xx + \sqrt{C.\,v} \infty o$.

$x^6, px^5, qx^4, *, sxx, tx, v \infty o$ per $xx \pm \sqrt{-\frac{s}{p}} \infty o$.

x^6

$x^6, px^5, qx^4, *, *, tx, v \propto 0$ per $xx \pm \sqrt{-\frac{t}{p}} \propto 0.$

$x^6, px^5, *, *, sxx, tx, v \propto 0$ per $xx \pm \sqrt{-\frac{t}{p}} \propto 0.$

$x^6, px^5, *, *, *, tx, v \propto 0$ per $xx \pm \sqrt{-\frac{t}{p}} \propto 0$, & $xx + \sqrt{C.\, v} \propto 0.$

$x^6, *, qx^4, *, sxx, *, v \propto 0$ per $xx + y \propto 0$, exiſtente $y^3 - qyy + sy - v \propto 0.$

$x^6, *, *, *, sxx, *, v \propto 0$ per $xx + y \propto 0$, exiſtente $y^3 * + sy - v \propto 0.$

$x^6, *, qx^4, *, *, *, v \propto 0$ per $xx + y \propto 0$, exiſtente $y^3 - qyy * - v \propto 0.$

$x^6, *, *, *, *, *, v \propto 0$ per $xx + \sqrt{C.\, v} \propto 0.$

2dò. *Per* $x^3 \pm$ *quantitate aliquâ cognitâ* $\propto 0.$

$x^4, px^3, *, rx, s \propto 0$ per $x^3 + r \propto 0$, & $x^3 + \frac{s}{p} \propto 0$ (& $x + p \propto 0$)

$x^5, px^4, qx^3, rxx, sx, t \propto 0$ per $x^3 + r \propto 0$, $x^3 + \frac{s}{p} \propto 0$, & x3 $+ \frac{t}{q} \propto 0.$

$x^5, *, qx^3, rxx, *, t \propto 0$ per $x^3 + r \propto 0$, & $x^3 + \frac{t}{q} \propto 0$, (& $xx + q \propto 0$.)

$x^6, px^5, qx^4, rx^3, sxx, tx, v \propto 0$ per $x^3 + \frac{s}{p} \propto 0$, $x^3 + \frac{t}{q} \propto 0$, & $x^3 + \frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr - v} \propto 0.$

$x^6, px^5, qx^4, *, sxx, tx, v \propto 0$ per $x^3 + \frac{s}{p} \propto 0$, $x^3 + \frac{t}{q} \propto 0$, & $x^3 \pm \sqrt{-v} \propto 0.$

$x^6, px^5, *, *, sxx, *, v \propto 0$ per $x^3 + \frac{s}{p} \propto 0$, & $x^3 \pm \sqrt{-v} \propto 0.$

$x^6, px^5, *, rx^3, sxx, *, v \propto 0$ per $x^3 + \frac{s}{p} \propto 0$, & $x^3 + \frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr - v} \propto 0.$

Digitized by Google

$x^6, *, qx^4, *, *, tx, v \propto o$ per $x^3 + \frac{t}{q} \propto o$, & $x^3 \pm \sqrt{-v} \propto o$.

$x^6, *, qx^4, rx^3, *, tx, v \propto o$ per $x^3 + \frac{t}{q} \propto o$, & $x^3 + \frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr - v} \propto o$.

$x^6, *, *, rx^3, *, *, v \propto o$ per $x^3 + \frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - v} \propto o$, & $x^3 + \frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr - v} \propto o$.

$x^6, *, *, *, *, *, v \propto o$ per $x^3 + \sqrt{-v} \propto o$, & $x^3 - \sqrt{-v} \propto o$.

3[tio]. *Per* $x^4 \pm$ *quantitate aliquâ cognitâ* $\propto o$.

$x^5, px^4, *, *, sx, t \propto o$ per $x^4 + s \propto o$, & $x^4 + \frac{t}{p} \propto o$, (& $x + p \propto o$.)

$x^6, px^5, qx^4, *, sxx, tx, v \propto o$ per $x^4 + s \propto o$, $x^4 + \frac{t}{p}$, & $x^4 + \frac{v}{q} \propto o$.

$x^6, *, qx^4, *, sxx, *, v \propto o$ per $x^4 + s \propto o$, & $x^4 + \frac{v}{q} \propto o$ (& $xx + q \propto o$,)

4[to]. *Per* $x^5 \pm$ *quantitate aliquâ cognitâ* $\propto o$.

$x^6, px^5, *, *, *, tx, v \propto o$ per $x^5 + t \propto o$, & $x^5 + \frac{v}{p} \propto o$, (& $x + p \propto o$.)

3[tia] *Pars.*

Si aliqua æquatio 5 dimenſionum produci poſſit ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera habeat duas dimenſiones, & nullum terminum $\propto o$, altera verò aliquem terminum $\propto o$; erit ejus Formula aliqua ex ſequentibus, & poterit dividi vel per unamquamque æquationem ſibi adjunctam, vel per aliquam earum.

Per *unamquamque*, ubi vocula &; per *aliquam*, ubi *vel* invenitur: ut antea.

Quan-

Quantitatem cognitam 2di termini æquationum ſequentium quadratarum, adfectam ſuis ſignis + & —, brevitatis cauſâ, vocabo y, & ultimum terminum z.

$x^5, px^4, qx^3, rxx, sx, t \infty 0$ per $xx + px + \frac{1}{2}q - \frac{r}{2p}$ 8 $\sqrt{\frac{1}{2}q - \frac{r}{2p}\,\square^{tc} + \frac{t}{p}} \infty 0,$

vel per $xx, + \frac{1}{2}p + \frac{t}{2s}$ 8 $\sqrt{\frac{1}{2}p + \frac{t}{2s}\,\square^{tc} - q}$ in $x, + \frac{yt}{s} \infty 0,$

vel per $x^3 + r \infty 0.$

$x^5, px^4, *, rxx, sx, t \infty 0$ per $xx + px - \frac{r}{2p}$ 8 $\sqrt{\frac{rr}{4pp} + \frac{t}{p}} \infty 0,$

vel per $xx, + p + \frac{t}{s}$ in $x, + \frac{yt}{s} \infty 0.$

$x^5, px^4, qx^3, *, sx, t \infty 0$ per $xx + px + \frac{1}{2}q$ 8 $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{t}{p}} \infty 0,$

vel per $xx + \frac{zs}{t}x + \frac{1}{2}q$ 8 $\sqrt{\frac{1}{4}qq + s} \infty 0.$

$x^5, px^4, *, *, sx, t \infty 0$ per $xx + px$ 8 $\sqrt{\frac{t}{p}} \infty 0,$

vel per utramque harum duarum $\begin{cases} xx, + p + \frac{t}{s} \text{ in } x, + \frac{zt}{s} \infty 0, \\ xx, \ 8 \ \frac{s}{t}\sqrt{s} \text{ in } x, \ 8 \ \sqrt{s} \infty 0. \end{cases}$

$x^5, px^4, qx^3, rxx, *, t \infty 0$ per $xx + px + \frac{1}{2}q - \frac{r}{2p}$ 8 $\sqrt{\frac{1}{2}q - \frac{r}{2p}\,\square^{tc} + \frac{t}{p}} \infty 0,$

& per $xx + px + \frac{t}{2r}$ 8 $\sqrt{\frac{tt}{4rr} - \frac{ppt}{r}} \infty 0.$

$x^5, px^4, *, rxx, *, t \infty 0$ per $xx + px + \frac{1}{2}pp$ 8 $\sqrt{\frac{1}{4}p^4 + pr} \infty 0,$

& per $xx + px + \sqrt{C.\,pt} \infty 0,$

& per $xx + px - \frac{r}{2p}$ 8 $\sqrt{\frac{rr}{4pp} + \frac{t}{p}} \infty 0.$

$x^5, px^4, qx^3, *, *, t \infty 0$ per $xx + px + pp \infty 0,$

& per $xx + px + \frac{1}{2}q$ 8 $\sqrt{\frac{1}{4}qq + \frac{t}{p}} \infty 0.$

$x^5, px^4, *, *, *, t \infty 0$ per $xx + px + pp \infty 0,$

& per $xx + px$ 8 $\sqrt{\frac{t}{p}} \infty 0.$

$x^5, *, qx^3, rxx, sx, t \infty 0$ per $xx, + \frac{t}{2s}$ 8 $\sqrt{\frac{tt}{4ss} - q}$ in $x, + \frac{yt}{s} \infty 0.$

$x^5,$

$x^5, *, *, rxx, sx, t \propto 0$ per $xx + \frac{t}{s}x + \frac{tt}{ss} \propto 0.$

$x^5, *, qx^3, *, sx, t \propto 0$ per $xx + \frac{3t}{s}x + \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + s} \propto 0,$

& per $xx, \pm \sqrt{\frac{s}{2}}$ in $x, + \frac{1}{2}q \pm \sqrt{\frac{1}{4}qq + s} \propto 0,$

& per $xx, + \frac{t}{2s} \pm \sqrt{\frac{tt}{4ss} - q}$ in $x, + \frac{3s}{t} \propto 0.$

& per $xx + x\sqrt{C.\frac{tt}{s}} + \sqrt{C.\frac{tt}{s}} \propto 0.$

$x^5, *, *, *, sx, t \propto 0$ per $xx, \pm \frac{t}{s}\sqrt{s}$ in $x, \pm \sqrt{s} \propto 0,$

& per $xx, \pm \sqrt{\sqrt{s}}$ in $x, \pm \sqrt{s} \propto 0,$

& per $xx + \frac{t}{s}x + \frac{tt}{ss} \propto 0,$

& per $xx, + \sqrt{C.\frac{tts}{s}}$ in $x, + \sqrt{C.\frac{tt}{s}} \propto 0,$

& per $xx, + \sqrt{ss.t}$ in $x, + \frac{tt}{ss} \propto 0.$

Ad 1mam & 3tiam Partem annotandum venit, ſi non conſtet an Propoſita æquatio ex duabus aliis, requiſitas conditiones habentibus, produci poſſit, quòd id facillimo negotio ut plurimum experiri liceat: quotieſcunque enim diviſores, qui per voculam & copulantur, inter ſe non ſecundùm omnes terminos conveniant, concludendum eſt, Propoſitam æquationem ita produci non poſſe, adeò ut eo in caſu diviſio irrita foret. Exempli gratiâ, ſi Proponatur æquatio $x^6, *, *, *, -xx\sqrt{3} - 2\frac{1}{2}x + 10\frac{1}{8} \propto 0$, quæ hujus eſt formulæ $x^6, *, *, *, sxx, tx, v \propto 0$, ea diviſibilis erit ſecundùm 1mam Partem, per $x + \frac{v}{t} \propto 0$, & per $x \pm \sqrt{\sqrt{-s}} \propto 0$; & per $x \pm \frac{t}{v}\sqrt{-s} \propto 0$; & per $x - \sqrt{C.\frac{tt}{v}} \propto 0$; & per $x - \frac{tt3}{v3} \propto 0$, ſi produci poſſit *ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera ſit unius dimenſionis, altera verò uno pluribúſve terminis careat.* Ut autem ſciatur, utrum hoc fieri queat, non opùs eſt id diviſione per aliquem ex diviſoribus explorare, cum hîc duo diviſores reperiantur inter ſe non convenientes: nimirum, $x + \frac{v}{t} \propto 0$, & $x \pm \sqrt{\sqrt{-s}} \propto 0$, nam $\frac{v}{t}$ rationalem, & $\sqrt{\sqrt{-s}}$ irrationalem numerum deſignat. Atque cum indiviſibilitas etiam

ſæpe

ſæpe uno intuitu ex variis ſignis conſtet, ut, ex. gr. ſi loco $-\sqrt{3}$ habuiſſemus $+\sqrt{3}$, quo caſu $\sqrt{Q.}$ ex $-s$ extrahi non potuiſſet; Poterimus interdum operoſas aliquot multiplicationes & diviſiones, quæ alioquin eſſent faciendæ, inſuper habere. Majoris perſpicuitatis gratiâ alterum exemplum addam. Diviſores æquationis $x^5, *, *, *, sx, t \propto 0$ ſunt, ſecundùm 3tiam Partem, $xx \pm \frac{t}{s}\sqrt{s}$ in x, $\pm \sqrt{t} \propto 0$; $xx \pm \sqrt{\sqrt{s}}$ in x, $\pm \sqrt{t} \propto 0$; $xx + \frac{t}{s}x + \frac{tt}{ss} \propto 0$; $xx + \sqrt{C.}\frac{tt}{s}$ in $x + \sqrt{C.}\frac{tt}{s} \propto 0$; & $xx + \sqrt{ſs.t}$ in $x + \frac{tt}{ss} \propto 0$; ſi jam comperiatur $\pm \frac{t}{s}\sqrt{s}$ non eſſe $\propto \sqrt{\sqrt{s}}$, vel $\propto \frac{t}{s}$, vel $\propto \sqrt{C.}\frac{tt}{s}$, vel $\propto \sqrt{ſs.t}$, quæ ſunt quantitates cognitæ 2di termini; vel ultimos terminos $\pm \sqrt{t}$, & $+\frac{tt}{ss}$, &c. non inter ſe convenire; indicio eſſet æquationem Propoſitam produci non poſſe *ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera habet duas dimenſiones, & nullum terminum* $\propto 0$, *altera verò aliquem terminum* $\propto 0$.

4ta *Pars.*

Si æquatio aliqua 6 dimenſionum produci poſſit ex multiplicatione duarum aliarum, quarum altera habeat duas dimenſiones, & nullum terminum $\propto 0$; altera verò unum, pluréſve terminos $\propto 0$; erit ea diviſibilis per $xx + yx + z \propto 0$, cujus y & z valores per ſequentes æquationes ac ſequenti modo ſunt inveniendi.

Æquationem Propoſitam, ſive in ea aliquis terminus deficiat, ſive non, ſic deſignabo: $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + sxx + tx + v \propto 0$; ubi p denotat quantitatem cognitam 2di termini, vel 0, ſi is deficiat; q quantitatem cognitam 3tii termini, vel 0, ſi is deſit; r 4ti termini, &c.

A $$zz - {}^{2}qz + ppq \infty 0 \qquad zz - \frac{s}{p}z + {}^{2}v \infty 0 \qquad y \infty p$$
$$\begin{array}{llll} -pp & -rp & \qquad & -s \\ +\frac{r}{p} & +s & & +rp \\ & -\frac{t}{p} & & -ppq \\ \hline & 2 & & -\frac{r}{q} + pp \end{array}$$

B $$y^3 - pyy + qy - r \infty 0 \qquad yy - \frac{qs}{v}y + \frac{s4}{v3} \infty 0 \qquad z \infty \frac{yv}{s}$$
$$\begin{array}{llll} -\frac{2v}{s} & +\frac{pv}{s} & \qquad -p & +\frac{rs}{v} \\ & & & +\frac{rss}{vv} \\ & & & -\frac{sst}{v3} \\ \hline & & & 2 \end{array}$$

C $$y^4 - \frac{q}{p}y^3 + {}^{3}qyy - \frac{s}{p}y + \frac{t}{p} \infty 0 \qquad y^4 - \frac{t}{s}y^3 + ppyy - {}^{2}pqy + qq \infty 0$$
$$\begin{array}{llll} -{}^{2}p & +pp & -{}^{2}pq & +qq \\ & & -\frac{qq}{p} & -\frac{rq}{p} \\ & & +r & \end{array} \qquad \begin{array}{llll} -{}^{2}p & +\frac{tp}{s} & -\frac{tq}{s} & -\frac{rq}{s} \\ & +{}^{2}q & +\frac{vp}{s} & \end{array}$$
$$-\frac{t}{s}y^3 + \frac{tp}{s}yy - \frac{tq}{s}y - \frac{vq}{s} \infty 0 \qquad z \infty -py + yy + q$$
$$\begin{array}{llll} +\frac{q}{p} & -q & +\frac{vp}{s} & -\frac{t}{p} \\ & & +\frac{s}{p} & +\frac{rq}{p} \\ & & +\frac{qq}{p} & \\ & & -r & \end{array}$$

D $$+qy^3 * + sy - t \infty 0 \qquad + sy^4 - ty^3 + {}^{2}qsyy - tqy + qqs \infty 0$$
$$\begin{array}{ll} +qq & +rq \end{array} \qquad\qquad -vq$$
$$z \infty yy + q$$

c	f	g
$y \infty p$	$y \infty p$	$y \infty \frac{t}{s}$
$z \infty q$	$z \infty q - \frac{r}{p} \infty \frac{vp}{s}$	$z \infty \frac{v}{s}$.

Quan-

Quando nulli termini in æquatione Propoſita ſunt ∞ o, illa dividi poterit per aliquam harum A, B, C, e, f, g.

Quando eſt p ∞ o	... per aliquam harum	B, D, g
q	— — —	A, B, C, f, g
r	— — —	A, B, C, e
$ſ$	— — —	A, B, C, e, f
t	— — —	A, C, e
p, q	— — —	B, D, g
p, r	— — —	B, D
$p, ſ$	— — —	B, D
p, t	— — —	D
q, r	— — —	A, B, C
$q, ſ$	— — —	A, B, C, f
q, t	— — —	A, C
$r, ſ$	— — —	A, B, C
r, t	— — —	A, C
$ſ, t$	— — —	A, C, e
p, q, r	— — —	B, D
$p, q, ſ$	— — —	B
$p, r, ſ$	— — —	B, D
p, r, t	— — —	D
$q, r, ſ$	— — —	A, B, C
q, r, t	— — —	A, C
$q, ſ, t$	— — —	A
$r, ſ, t$	— — —	A, C
$p, q, r, ſ$	— — —	B
$p, q, ſ, t$	—	erit $y^6 ** + r y^3 ** + v$ ∞ o, & z ∞ yy.
$q, r, ſ, t$	— — —	A
$p, q, r, ſ, t$	—	erit $y^6 ***** + v$ ∞ o, & z ∞ yy.

1. Pro A, vel B, vel C aſſumere licet, vel unam æquationum juxta poſitarum, quam libuerit, quærendo ejus tantùm ope valorem ipſius y, vel z; vel duas eandem quantitatem incognitam habentes, quærendoque, ut ſuperiùs oſtenſum eſt, earum communem diviſorem, qui, aut unius, aut plurium futurus eſt dimenſionum. ſi unius, habebitur quæſitus valor ipſius y vel z; ſi plurium, eundem ex hoc communi diviſore inveſtigare oportet.

2. Si primò per capitales ſive majuſculas A, B, C, D explorare velimus, reliquæ e, f, g non ſunt neceſſariæ; ſed non vice verſá.

Exempli gratiâ, proponatur

$$\underset{}{x^6} + \underset{p}{2x^5} - \underset{q}{3x^4} + \underset{r}{7x^3} - \underset{s}{3xx} - \underset{t}{13x} - \underset{v}{5} \infty 0.$$

Cum nullus terminus hic deficiat, examinanda eſt æquatio per A, B, C, e, f, g. & quidem per omnes, ſi à minuſculis g, f, e incipiamus, ſi autem à capitalibus, erunt minuſculæ inſuper habendæ. Incipiamus igitur à capitalibus, ac primùm ab A, pro qua itaque ſumere licet æquationem

$$zz \begin{array}{l} -2q \\ -pp \\ +\frac{r}{p} \end{array} z \; \frac{\begin{array}{l} +ppq \\ -rp \\ +s \\ -\frac{t}{p} \end{array}}{z} \infty 0,$$

vel

$$zz - \frac{\begin{array}{l} \frac{t}{p} \\ -s \\ +rp \\ -ppq \end{array}}{\frac{r}{p} + pp} z + 2v \infty 0,$$

vel utramque.

Si primam ſumamus, obtinebitur pro ipſa (quoniam $p \infty 2$, $q \infty -3$, $r \infty 7$, $s \infty -3$, $t \infty -13$, & $v \infty -5$) $2zz + 5\frac{1}{2}z - 22\frac{1}{2} \infty 0$; ſin alteram, obtinebitur $7\frac{1}{2}zz + 35\frac{1}{2}z - 10 \infty 0$, quarum communis diviſor eſt $z + 5 \infty 0$. Quoniam autem

$y \infty p$

$y \propto p \propto 2$, dividendum eſt per $xx + yx + z \propto 0 \propto xx + 2x - 5 \propto 0$, invenieturque pro quotiente $x^4 * + 2xx + 3x + 1 \propto 0$. Et manifeſtum eſt, nos etiam alterutra tantùm duarum illarum æquationum uti potuiſſe. Facilior itaque via eligenda erit: non enim ſemper illa per communem diviſorem brevior eſt, neque ſemper longior; verùm hanc habet prærogativam, quæ ſanè non parva eſt, quòd inutiles radices abſcindat. Quemadmodum ſequenti exemplo clariùs patebit.

Eſto æquatio Propoſita $x^6 * - 2x^4 + 3x^3 - 3xx - 5x - 1 \propto 0$. Quoniam hìc p eſt $\propto 0$, reductio tentanda erit per B, D, g. Incipiendo à B, invenietur pro 1mâ $\begin{array}{l} y^3 - p\,yy + q\,y - r \propto 0, \\ \qquad - \frac{2r}{s} \quad + \frac{tr}{s} \end{array}$

hæc æquatio $y^3 - \frac{2}{3}yy - 2y - 3 \propto 0$; & pro 2dâ $\begin{array}{l} yy - \frac{qt}{v}y + \frac{t^4}{v^3} \propto 0, \\ \qquad\quad -p \quad + \frac{rt}{v} \\ \qquad\quad + \frac{rtt}{vv} \\ \qquad\quad - \frac{t^3 s}{v^3} \\ \hline \qquad\qquad 2 \end{array}$

hæc $yy + 230\,y - 305 \propto 0$: eſt enim in hoc èxemplo $q \propto -2$, $r \propto 3$, $s \propto -3$, $t \propto -5$, & $v \propto -1$. Unde, quærendo earum communem diviſorem, comperietur nullum dari, ac proinde diviſionem per B fieri non poſſe. Hinc tranſeo ad D, ubi pro 1mâ æquatione $\begin{array}{l} qy^3 * + s\,y - t \propto 0 \\ \qquad\quad + qq + rq \end{array}$ invenio $-2y^3 * + 1\,y - 1 \propto 0$,

& pro 2dâ $\begin{array}{l} sy^4 - ty^3 + 2qsyy - tqy + qqs \propto 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - rq \end{array}$ invenio

$-3y^4 + 5y^3 + 12yy - 10y - 14 \propto 0$. Quarum æquationum diviſor communis eſt $y + 1 \propto 0$; adeoque $z \propto yy + q \propto -1$; ita ut diviſio ſit facienda per $xx + yx + z \propto 0 \propto xx - 1x - 1$, eritque quotiens $x^4 + 1x^3 * + 4x + 1 \propto 0$.

Ubi notandum, modum hunc quærendi communem diviſorem in altioribus præſertim æquationibus permagni eſſe uſus, non autem tanti uſus, cùm æquationes, quarum diviſor communis inveſtigandus eſt, ſolummodo ſunt 2 dimenſionum, aut etiam trium, quoniam tum diviſores faciles ſunt inventu. Ut in

Digitized by Google

æquatione ſuperiori $-2y^3 * + 1y - 1 \infty 0$, ubi protinus apparet y eſſe $\infty -1$, adeoque ſi ipſa dividatur per $y + 1 \infty 0$, obtinebitur $-2yy + 2y - 1 \infty 0$. Cujus radices quoniam ſunt impoſſibiles, ſolùm ſupereſt $y \infty -1$; adeò ut diviſio æquationis Propoſitæ tentanda ſit per $xx - 1x - 1 \infty 0$.

Sic & ſi habeatur æquatio $x^6 + 2x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2xx + 1x + 1 \infty 0$, comperietur ejus diviſionem fieri poſſe beneficio æquationum juxta B, ubi pro una invenitur $2yy - 5y + 3 \infty 0$, & pro altera $y^3 - 4yy + 5y - 2 \infty 0$, & pro communi diviſore $y - 1 \infty 0$. Et quoniam z eſt $\infty \frac{yy}{s} \infty 1$, erit $xx + yx + z \infty 0 \infty xx + 1x + 1 \infty 0$. Per quam igitur ſi Propoſita æquatio dividatur, fiet pro quotiente $x^4 + 1x^3 + 1xx * + 1 \infty 0$.

Si autem detur æquatio $x^6 + 2x^5 + 2x^4 * + 1xx + 14x + 2 \infty 0$, in qua r eſt 0, oportet ipſam examinare per A, B, & C. Incipiendo autem ab A, loco æquationis

$$zz - \begin{array}{l} 2q \\ -pp \\ +\frac{r}{p} \\ \end{array} z + \begin{array}{l} ppq \\ -rp \\ +s \\ -\frac{s}{p} \end{array} \infty 0 \quad \overline{2}$$

invenitur $zz - 4z + 1 \infty 0$; & loco æquationis

$$zz - \frac{s}{p}z + \begin{array}{l} 2v \\ -s \\ +rp \\ -ppq \\ \hline \frac{r}{p} + pp \end{array} \infty 0$$

invenitur eadem $zz - 4z + 1 \infty 0$. Ex qua, quia utriuſque communis diviſor eſt, radices invenire oportet, quæ ſunt $z \infty 2 + \sqrt{3}$, & $z \infty 2 - \sqrt{3}$. Unde cum y ſit ∞p, hoc eſt, 2, pro $xx + yx + z \infty 0$ obtinebuntur hæ duæ $xx + 2x + 2 + \sqrt{3} \infty 0$, & $xx + 2x + 2 - \sqrt{3} \infty 0$. Per quas igitur ſi Propoſita æquatio diviſa fuerit, comperietur ipſam produci poſſe multiplicatione harum trium $xx + 2x + 2 + \sqrt{3} \infty 0$, $xx + 2x + 2 - \sqrt{3} \infty 0$, & $xx - 2x + 2 \infty 0$.

5ta Pars.

Si æquatio aliqua 6 dimenſionum produci poſſit multiplicatione duarum aliarum, quæ ſingulæ 3 dimenſiones habeant, in quarum alterutra unus pluréſve termini ſint $\propto 0$; erit ipſa diviſibilis vel per æquationem tantùm 2 terminorum, juxta 2dam partem, vel per æquationem $x^3 + yxx + zx + \mathfrak{w} \propto 0$, in qua tantùm alterutra y vel z eſt $\propto 0$; quarumque y, vel z, & $\mathfrak{w}$ valores inveniuntur per ſequentes æquationes.

Æquationem Propoſitam, ſive in ea aliquis terminus deficiat, ſive non, ſic deſignabo: $x^6 + px^5 + qx^4 + rx^3 + ſxx + tx + v \propto 0$; ubi p denotat quantitatem cognitam 2di termini, vel 0, ſi is deficiat; q quantitatem cognitam 3tii termini, vel 0, ſi is deſit; r quarti termini, &c.

$$\begin{array}{llll} \text{A}\;\; 2z^3 & -3q\,zz & -rpz & -ſq \propto 0 \\ & +pp & +2ſ & +tp \\ & & +qq & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} +qqzz & +4ſqz & -4ſſ \propto 0 \\ +p^4 & -3pqr & -4ppv \\ -4ſ & -2ppſ & +4pſr \\ +2pr & +2tp & +ſqq \\ & -q^3 & -ptq \\ & -rp^3 & -ſqpp \\ & +qqpp & +tp^3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \mathfrak{w} \propto \frac{ſ \pm zz - qz}{p} \\ \\ y \propto 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} \text{B}\;\; y^4 & -\frac{qt}{v}y^3 & +\frac{pqt}{v}yy & -\frac{ſt}{v}y & -qq \propto 0 \\ & -p & +qp-\frac{tt}{v} & & \\ & & -\frac{qqt}{v}+\frac{rtq}{v} & & \end{array} \qquad \begin{array}{lllll} y^4 & -2py^3 & +qyy & -ry & +pr \propto 0. \\ & +\frac{2v}{t} & +pp & -pq & -ſ \\ & & -\frac{3pv}{t} & +\frac{2qv}{t} & -\frac{pqv}{t} \\ & & & +\frac{ppv}{t} & \end{array}$$

$$\mathfrak{w} \propto \frac{t}{q - py + yy}$$

$$z \propto 0.$$

$$\begin{array}{llll} \text{C} & zz - qz + ſ \propto 0 & \mathfrak{w}\mathfrak{w} - r\mathfrak{w} + v \propto 0. & y \propto 0. \\ \text{D} & yy - py + q \propto 0 & \mathfrak{w}\mathfrak{w} - r\mathfrak{w} + v \propto 0. & z \propto 0. \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{e} & z \propto q & \mathfrak{w} \propto \frac{ſ}{p} & y \propto 0. \\ \text{f} & y \propto p & \mathfrak{w} \propto \frac{t}{q} & z \propto 0. \end{array}$$

Quan-

Quando nulli termini in æquatione Propoſita ſunt ∞ o, illa dividi poterit per aliquam harum A, B, e, f.

Quando eſt *p* ∞ o	...	per aliquam	harum	C, B
q	—	—	—	A, B
r	—	—	—	A, B, e, f
ſ	—	—	—	A, B
t	—	—	—	A, D
p, *q*	—	—	—	C, B
p, *r*	—	—	—	C, B
p, *ſ*	—	—	—	B
p, *t*	—	—	—	C, D
q, *r*	—	—	—	A, B
q, *ſ*	—	—	—	A, B
q, *t*	—	—	—	A
r, *ſ*	—	—	—	A, B
r, *t*	—	—	—	A, D
ſ, *t*	—	—	—	A, D
p, *q*, *r*	—	—	—	C, B
p, *q*, *ſ*	—	—	—	B
p, *q*, *t*	—	—	—	C
p, *r*, *ſ*	—	—	—	B
p, *r*, *t*	—	—	—	C, D
p, *ſ*, *t*	—	—	—	D
q, *r*, *ſ*	—	—	—	A, B
q, *r*, *t*	—	—	—	A
q, *ſ*, *t*	—	—	—	A
r, *ſ*, *t*		—	—	A, D
p, *q*, *r*, *ſ*		—	—	B
q, *r*, *ſ*, *t*		—	—	A.

1. Pro A vel B aſſumere licet vel unam æquationum juxta poſitarum, quam libuerit, quærendo ejus tantùm ope valorem ipſius *y*, vel *z*; vel duas, eandem incogni-

cognitam quantitatem habentes, quærendoque per earum communem diviſorem valores ipſius y vel z, eodem modo quo in Parte 4ta dictum eſt.

2. Si primò per capitales A, B, C, D examen fiat, tum examen per reliquas e & f ſuperfluum habendum eſt, ſed non vice versâ.

Exempli gratiâ, proponatur hæc æquatio

$$x^6 + 1x^5 + 4x^4 + 8x^3 + 5xx + 11x + 6 \infty 0.$$

Quoniam nulli termini deſunt, Reductio erit tentanda per A, B, e, f; incipiendoque à minuſculis, ac primùm ab e, habebitur $z \infty q \infty 4$, & $\mathfrak{w} \infty \frac{s}{p} \infty 5$, adeoque pro $x^3 + yxx + zx + \mathfrak{w} \infty 0$, fiet $x^3 * + 4x + 5 \infty 0$. Cum verò Propoſita æquatio per hanc dividi nequeat, tranſeo ad f, obtineoque $y \infty p \infty 1$; $\mathfrak{w} \infty \frac{s}{q} \infty \frac{11}{4}$; $z \infty 0$; & in locum $x^3 + yxx + zx + \mathfrak{w} \infty 0$ obtineo $x^3 + 1xx * + \frac{11}{4} \infty 0$. Et cum Propoſita per hanc quoque non diviſibilis exiſtat, tranſeo ad A, & pro

$$\begin{array}{llll} 2z^3 & -3qzz & -rpz & -sq \infty 0 \\ & +pp & +2s & +rp \\ & & +qq & \end{array}$$

obtineo $2z^3 - 11zz + 18z - 9 \infty 0$, cujus radices ſunt $+3$, $+1$, & $+1\frac{1}{2}$. Quia autem omnes hæ radices ſunt rationales, ac æquatio Propoſita fractis numeris caret, non poterit nobis hæc ultima radix inſervire. Unde explorandum tantùm reſtat per $z \infty 3$, & $z \infty 1$. Sumendo autem $z \infty 1$, reperitur diviſionem fieri non poſſe, ac idcirco ſi ſumatur $z \infty 3$, fiet $\mathfrak{w} \infty \frac{s + zz - qz}{p} \infty 2$. Quoniam verò y eſt $\infty 0$, pro $x^3 + yxx + zx + \mathfrak{w} \infty 0$ obtinebitur $x^3 * + 3x + 2 \infty 0$, per quam ſi diviſio Propoſitæ tentetur, comperietur ipſam fieri poſſe, atque oriri $x^3 + 1xx + 1x + 3 \infty 0$. Sed loco 1mæ æquationis juxta A ſumere potuiſſemus 2dam, unâ dimenſione depreſſiorem, pro qua obtinuiſſemus $13zz - 60z + 63 \infty 0$. Quæ unam tantùm radicem rationalem abſolutam admittit, quæ, ut ſupra, eſt $+3$.

Et notandum, quòd, inventis duabus æquationibus, (quæ ſemper, ſi per communem diviſorem Quæſitum obtinere velimus, inveniri debent;) quæri poteſt radix alterutrius æquationis, ſi nempe ea facilis ſit inventu, atque explorari, num & altera æqua-

tio dictam radicem admittat: Quo ſæpe non nihil laboris abſcindi poteſt.

Priuſquam huic XI Regulæ finem imponam, adjungam, quòd, eodem modo, quo hæ Regulæ inventæ ſunt, & reliquæ altiorum æquationum inveniri poſſint; uti & multæ, ne dicam infinitæ aliæ ad æquationes 6, & pauciorum dimenſionum, quarum aliquot ex facilioribus indicare volui, prætermittens nonnullas, non quidem admodum difficiles, ſed quæ determinationem aliquam involvebant. Ut in 1ma Parte, ubi æquationi $x^6, px^5, qx^4, *\, sxx, tx, v \infty 0$, loco diviſoris $x + \frac{1}{2}p \; 8 \; \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty 0$, adjungere potuiſſem diviſorem $x - \frac{v - qs}{ps - t} \infty 0$: quem, cum determinationem involvat, (ſiquidem $x + 3 \infty 0$, diviſor æquationis $x^6 + 5x^5 + 6x^4 * + 5xx + 25x + 30 \infty 0$, per illum inveniri nequit:) omittendum duxi, præferendo ei alterum $x + \frac{1}{2}p \; 8 \; \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty 0$, qui determinationi nulli obnoxius eſt.

Denique, uſus hujus XI Regulæ ſe longè lateque extendit, quod nemo facilè negaverit, qui modò viderit, non neceſſe eſſe, vel fractiones, vel cognitas quantitates ſurdas priùs ex æquatione tolli; & quot modis una eademque æquatio, præſertim valde compoſita, & multarum dimenſionum, ex multiplicatione duarum aliarum produci queat; tumque inter omnes illas ex quibus produci poſſit, tantùm unam requiri, in qua unus pluréſve termini deficiant, ut reductio per has Regulas inveniatur.

SEQUENTES 12, 13, 14, 15 REGULÆ SE EXTENDUNT AD ÆQUATIONES, IN QUIBUS NEC SIGNA RADICALIA, NEC LITERALES FRACTIONES INVENIUNTUR.

XII. *REGULA*,

Si in æquatione Propoſita reperiatur litera cognita, *quæ in ultimo Termino non contineatur*; ſi illa non niſi ſemel in æquatione extet, vel ſemel tantùm reperiatur ſecundùm eundem dimenſionum numerum, (ut in Æquatione

$$\begin{array}{llllll} x^4 & -2ax^3 & +aaxx & -2abbx & +aabb & \infty 0, \\ & -2c & +bb & -2acc & & \\ & & +4ac & & & \\ & & -dd & & & \end{array}$$

in

in qua dd ſemel duntaxat reperitur, duas habens dimenſiones) æquatio ſemper indiviſibilis erit per x, aut xx, &c. + vel — quantitate quâvis cognitâ atque rationali.

XIII. *REGULA.*

Si pluries in æquatione Propoſita reperiatur litera cognita, *quæ in ultimo termino non contineatur*; ſi illa ubique eodem ſigno + vel — ſit adfecta, ac per incognitam quantitatem, impares ubique aut ubique pares dimenſiones habentem, multiplicata: æquatio illa ſemper indiviſibilis erit per x, x^3, x^5 &c. + vel —, vel per xx, x^4, x^6 &c. — quantitate quâvis cognitâ atque rationali. ut hæc Æquatio

$$\begin{array}{l} x^4 + 4cx^3 - ddxx + 4bbcx + b^4 \infty 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 2bbd \end{array}$$

in quâ c bis *tantùm* reperitur adfecta ſigno +, ac multiplicata per x unius & trium dimenſionum. aut hæc

$$\begin{array}{l} x^6 - ax^5 + cfx^4 - c^3 x^3 - c^4 xx - ddccax + c^3d^3 \infty 0, \\ \quad + b \quad\;\; - dd \quad - add \quad + ddff \quad + d^3bb \end{array}$$

ubi a ter invenitur adfecta ubique ſigno —; aut b bis ſigno +; ac ducta utraque in x, ubique habentem dimenſiones impares: aut in quâ etiam f bis reperitur adfecta ſigno +, ac ducta in x, ubique pares dimenſiones habentem.

XIV. *REGULA.*

Si in æquatione Propoſita reperiatur litera cognita, *quæ in nullo alio quàm in ultimo termino contineatur*; ſi ejus dimenſionum numerus ſit minor numero dimenſionum incognitæ quantitatis, ad ſummum conſiderato, (ut in hac

$$\begin{array}{l} x^6 - bbx^4 + b^3c\; xx + bcd^4 \infty 0, \\ \qquad\qquad\;\; - bbcc \quad + 2bd^5 \end{array}$$

in qua

d tan-

d tantùm in ultimo termino continetur, habens ad ſummum 5, & x plures, nimirum 6 dimenſiones) certum eſt illam æquationem per $x +$ vel $-$ quantitate quâvis rationali atque cognitâ eſſe indiviſibilem; Si ejus dimenſionum numerus ſit minor ſemiſſe numeri dimenſionum incognitæ quantitatis, ad ſummum conſiderati, (ut in eodem exemplo, ſi loco ultimi termini $bcd^4 + 2bd^5$ ponatur $bc^3dd + 2b^5d$) certum eſt illam æquationem per $xx +$ vel $-$ quantitate quâvis rationali atque cognitâ indiviſibilem exiſtere. Si ejus dimenſionum numerus ſit minor triente numeri dimenſionum incognitæ quantitatis, ad ſummum conſiderati, certum eſt illam æquationem per $x^3 +$ vel $-$ &c. non poſſe dividi. atque ita porrò in infinitum.

XV *REGULA.*

Si in æquatione Propoſita litera cognita reperiatur, quæ in ultimo termino non continetur, *atque ea diviſibilis ſit per x, xx, x³, &c. + vel — aliquâ quantitate rationali & cognitâ; facile erit beneficio alterius æquationis dictum diviſorem invenire.*

Ut in hac æquatione

$$\begin{array}{llll} x^5 - fx^4 + bf & x^3 - 16bcdxx & + \frac{1}{2}bbcfx & - 8ccdbb \infty 0 \\ & +1\frac{1}{2}bc \quad - \frac{1}{2}bcf & + \frac{1}{2}bbcc & \end{array}$$

in quâ f in ultimo termino non continetur, *opùs tantùm eſt, ut omnes quantitates, in quibus f æquè multas habet dimenſiones nihilo æquales ponantur, atque porrò inveſtigetur utriuſque, inventæ ſcilicet atque Propoſitæ æquationis, communis diviſor.* Quocirca poſito $-fx^4 + bfx^3 - \frac{1}{2}bcfxx + \frac{1}{2}bbcfx \infty 0$, ſeu $-x^3 + bxx - \frac{1}{2}bcx + \frac{1}{2}bbc \infty 0$, invenitur, ſecundùm Methodum ante deſcriptam, pro earum communi diviſore $xx + \frac{1}{2}bc \infty 0$.

Sic

Sic etiam ſi proponatur hæc æquatio

$$\begin{array}{lllll} x^4 & -ax^3 & +aaxx & +c^3x & -bc^3 \propto 0 \\ & -b & +ab & -baa & +c^4 \\ & +c & -ac & +aac & \end{array}$$

in qua a in ultimo termino non continetur; poſito $\begin{array}{l} -ax^3 + abxx \propto 0, \\ \quad\;\, -ac \end{array}$ erit $x - b + c \propto 0$.

Diviſio itaque tentanda eſt per $x - b + c \propto 0$; quoniam nullus præter hunc communis diviſor haberi poteſt. Eundem Diviſorem obtinuiſſemus ſi quantitates omnes ubi a eſt duarum dimenſionum poſuiſſemus $\propto 0$. Notandum eſt in his 12, 13, 14 & 15 Regulis, non opùs eſſe, ut literales Fractiones ſemper priùs ex æquationibus auferantur: Nam ſi contingat, his Fractionibus ſublatis, literam, de qua ibi agitur, nihilominus tamen in ultimo Termino tantùm inveniri, quemadmodum in Regula 14 requiritur; vel illâ ablatione factâ in ultimo Termino non inveniri, quod in tribus aliis requiritur; ablatio talium Fractionum neceſſaria non eſt.

SEQUENTES 16, 17, 18, 19, ET 20 REGULÆ SE EXTENDUNT AD ÆQUATIONES, UBI NEC SIGNA RADICALIA, NEC FRACTIONES LITERALES VEL NUMERALES INVENIUNTUR.

Hucuſque perinde eſt, an Propoſitæ æquationis omnia membra, ſive terminorum partes ſeparatæ per ſignum + vel — junctæ eundem habeant dimenſionum numerum vel ſecus: In his ſequentibus verò 16, 17, 18, 19, & 20 Regulis conſiderabo, brevitatis causâ, ejuſmodi tantùm æquationes, quarum omnia Membra habent eundem numerum dimenſionum; poteſt enim omnis æquatio, hanc conditionem non habens, facilè in talem permutari, ut cuique notum eſt.

Quomodo omnia radicalia ſigna ex æquatione tolli poſſint, jam antea oſtendi. Quomodo verò omnes Fractiones tolli queant, nihil difficultatis habet, & ſatis à Dno des Cartes monſtratum eſt in Fractionibus numeralibus, quod etiam eodem modo in literalibus locum habet. Sed cum in his Regulis ſequentibus diviſores rationales ultimi Termini neceſſariò ſciri debeant, præmittam

Modum inveniendi omnes rationales Diviſores ultimi Termini ſurdis & fractionibus carentis.

Ultimus Terminus æquationis Propoſitæ aut ex *uno* aut ex *pluribus Membris* ſeu quantitatibus, per + & — junctis conſtabit. Si *unius tantùm Membri* ſit, notum eſt quâ ratione ipſius diviſores inveniantur. Quòd ſi autem ex *pluribus Membris* conſtiterit, ſæpenumero difficile eſt eos omnes reperire. Hinc ad eos inveniendos, conſidero ſeorſim ultimum Terminum æquationis Propoſitæ, ſupponendo ipſum $\propto 0$, atque pro lubitu eligo aliquam ex literis, quam pro incognita quantitate hujus fictæ æquationis habeo, cujus reſpectu fictam æquationem illam in ordinem redigo.

Exempli gratiâ, ex ultimo Termino hujus æquationis,

$$\begin{array}{llll} x^4 - 4ax^3 & + 2ccxx & - 4acc\,x & + c^4 \quad \propto 0 \\ & + 7aa & - 4aac & - 4a^4 \\ & + 2ac & - 6a^3 & + 8a3c \\ & & & + 2ac3 \\ & & & + 3aacc \end{array}$$

ſumendo literam c pro incognita quantitate, invenio æquationem hanc $c^4 + 2ac^3 + 3aacc + 8a^3c - 4a^4 \propto 0$.

Deinde inquiro per antecedentes vel ſequentes Regulas utrum hæc Ficta per aliam rationalem dividi poſſit; Si enim hoc fieri nequeat, manifeſtum eſt ultimum Terminum æquationis Propoſitæ nullos quoque diviſores rationales admittere (niſi unitatem atque ipſum ultimum Terminum integrum inter diviſores numerare velimus; ſed hi in æquationibus literalibus, ubi omnia membra eundem dimenſionum numerum habent, nullius uſus ſunt); Quòd ſi verò dividi poſſit, oportet rurſus eodem modo quærere diviſores hujus diviſoris & quotientis, atque ita evidens erit, quo pacto omnes rationales æquationes, quæ hanc Fictam

ctam æquationem dividere poſſunt, inveniri queant, quæ quidem æquationes tunc futuræ ſunt quæſiti diviſores ultimi Termini æquationis Propoſitæ.

Per præcedentes autem uti & per ſequentes Regulas omnes diviſores hujus Fictæ æquationis, non cognitis ejus diviſoribus ultimi Termini, ut plurimùm facillimo negotio inveniri poterunt; imo perpaucæ æquationes occurrunt, quarum diviſores ultimi Termini non per ſequentem 21 Regulam, & dicto modo inveniri poſſent. Quoniam verò aliquando tales dantur, quarum diviſores nec per hanc 21 Reg. nec per aliquam præcedentium obtineri queant; ulteriùs videndum eſt, num Fictæ æquationis ultimus Terminus, *unum an plura membra* habeat. Si enim *unum tantùm membrum* habuerit, quemadmodum in hoc exemplo, in quo ultimus Terminus eſt $- 4 a^4$, notum eſt quo pacto ejuſdem diviſores inveſtigare liceat, poſſuntque deinde eorum ope per ſequentes Regulas inveniri æquationes omnes rationales, per quas hæc Ficta diviſibilis erit, atque ita habebuntur etiam omnes diviſores ultimi Termini æquationis Propoſitæ, qui requirebantur.

Quòd ſi verò ultimus Terminus Fictæ æquationis *plurium membrorum* fuerit, tum rurſus eundem, ut ante, ſupponerem ∞ o, ac iterùm agerem, quemadmodum jam dictum eſt, donec inveniatur æquatio, vel cujus rationales diviſores per aliquam præcedentium, ſive per 21 Regulam facillimè inveniuntur; vel cujus ultimus Terminus tantùm *unius membri* exiſtit. & ad alterutrum obtinendum parum temporis requiritur; & alterutro invento, Quæſitum obtineri poteſt, quoniam tunc per ſequentes Regulas inveniri poſſunt æquationes omnes, ultimam hanc Fictam dividentes; atque ita inventis omnibus diviſoribus ultimi Termini proximè ante-

antecedentis Fictæ æquationis poſſunt denuo per eaſdem Regulas, ope horum diviſorum ultimi Termini, inveniri æquationes omnes, quæ huic proximè antecedentem Fictam dividere queunt, ſicque ulteriùs aſcendendo obtinebuntur tandem diviſores omnes, quicunque fuerint, ultimi Termini Propoſitæ æquationis, qui inveniendi proponebantur.

Exempli gratiâ, ſi proponantur inveniendi diviſores omnes ultimi Termini hujus æquationis

$$\begin{array}{llll} x^4 * -14aaxx & +32aacx & +a^4 & \propto 0, \\ \quad +4ac & +4acd & -10aacc & \\ \quad +2cc & -16add & -2accd & \\ \quad +4dd & & +4aadd & \\ \quad +dc & & +4ac^3 & \\ & & +4a^3c & \\ & & +dcaa & \\ & & +24acdd & \\ & & +4ccdd & \\ & & +4cd^3 & \\ & & +c^4 & \\ & & +dc^3 & \end{array}$$

nimirum ope Regularum ſequentium, æquationes omnes rationales, per quas aliqua Propoſita dividi poteſt, detegentium beneficio diviſorum ultimi Termini: ſuppono ejus ultimum Terminum $\propto$ o, atque unam ex ipſius literis conſidero ceu incognitam quantitatem, ut puta a, obtineoque æquationem in ordinem redactam,

$$\begin{array}{llll} a^4 + 4ca^3 - 10ccaa & -2ccda & +4ccdd & \propto 0. \\ \qquad\quad +4dd & +4c^3 & +4cd^3 & \\ \qquad\quad +dc & +24cdd & +c^4 & \\ & & +dc^3 & \end{array}$$

Quoniam autem hujus ultimus terminus etiam plura membra habet, ſuppono ipſum rurſus, ut ante, $\propto$ o, ſumendoque c pro incognita quantitate, obtineo inde hanc æquationem

$$c^4 + dc^3 + 4ddcc + 4d^3c \propto 0.$$

Quæ diviſa per c dat $c^3 + dcc + 4ddc + 4d^3 \propto 0$, quæ eſt æquatio in qua ultimus Terminus $4d^3$ tantùm *unum Membrum* habet.

habet. Conſtat autem quo pacto diviſores hujus ultimi termini inveniantur, qui, poſtquam cogniti erunt, inſervire poterunt, ut eorundem ope per ſequentes Regulas quærantur æquationes omnes rationales, hanc ultimam Fictam $c^3 + dcc + 4ddc + 4d^3 \infty 0$ dividentes, ac proinde etiam æquationes, quæ $c^4 + dc^3 + 4ddcc + 4d^3c \infty 0$ dividere poſſunt, quæ quidem eſt ultimus Terminus Fictæ æquationis proximè præcedentis

$$\begin{array}{lllll} a^4 + 4ca^3 & -10ccaa & -2ccda & +4ccdd \infty 0. \\ & +4dd & +4c^3 & +4cd^3 \\ & +dc & +24cdd & +c^4 \\ & & & +dc^3 \end{array}$$

Inventis verò diviſoribus omnibus ultimi hujus æquationis Termini, poſſunt denuo per eaſdem Regulas inveniri omnes æquationes rationales hanc ipſam dividentes; quibus cognitis inventum eſt, quod quærebatur, cum æquatio hæc Ficta ultimus ſit Propoſitæ æquationis Terminus.

Hinc liquet per ſolam ſequentem XVII Regulam ſemper omnes diviſores ultimi Termini inveniri poſſe: ſed, quoniam per præcedentes uti & per reliquas ſequentes Regulas ſæpe primo intuitu cernitur tales diviſores non dari, ſi non dentur, & ii qui dantur ſæpe minori labore inveniuntur, poterunt & hæ Regulæ magno cum fructu adhiberi.

XVI *REGULA*,

Quæ modum docet inveniendi omnes æquationes rationales, duos tantùm Terminos habentes, quibus æquatio quævis rationalis & Fractione carens, ſive literalis ſive numeralis ſit, dividi poſſit.

Fiat alia æquatio pro libitu ex duabus aut pluribus quantitatibus, aut etiam terminis Propoſitæ æquationis; atque juxta hanc ſuppoſitionem inveniatur valor ipſius x; vel ſumatur tantùm aliquis valor pro x, ut libet. Deinde ſubſtituto hoc valore Ficto ipſius x, vel eo quem ex æquatione Ficta invenimus, ubique in locum ipſius x æquationis Propoſitæ: Si termini ſe mutuò de-

Digitized by Google

ſtruere reperiantur, erit Propoſita æquatio diviſibilis per x — hoc Ficto valore ∞ o; ſi autem hi termini ſe mutuò non deſtruant, quærantur diviſores aggregati horum omnium terminorum (quod quidem aggregatum, ut ab ultimo termino æquationis diſtinguatur, in poſterum vocabo *Terminum Fictum*); atque ab unoquoque diviſore unius dimenſionis auferatur valor Fictus ipſius x, at ab unoquoque diviſore duarum dimenſionum auferatur ejuſdem valoris quadratum, & ſic deinceps. Quo peracto, videndum erit num aliqua horum reliquorum conſentiant cum diviſoribus ultimi Termini æquationis Propoſitæ; ſi enim nulla eorum cum iis conſentiant, indicio eſt æquationem Propoſitam per aliam duos tantùm Terminos habentem, ſeu per x, aut xx, &c. + vel — quantitate quâvis cognitâ atque rationali non eſſe diviſibilem: Si verò aliqua conſentiant, oportet, facto unoquoque conſentiente + x earundem dimenſionum, ∞ o, explorare per quam harum æquationum æquatio Propoſita dividi poſſit; ſi enim per nullam ipſarum diviſibilis ſit, erit quoque Propoſita per x, aut xx, &c. + vel — quâvis quantitate cognitâ atque rationali indiviſibilis. Quæ quidem omnia ſequenti exemplo clariora evadent.

Ut ad inveſtigandos diviſores, ſi qui ſint, hujus æquationis $x^3 - 21axx \begin{array}{l} -bb \\ +20aa \end{array} x + 20abb \infty 0$, ſuppono $x^3 \infty 21axx$, vel $bbx \infty 20abb$, vel ad libitum quemlibet pro x valorem aſſumo, utputa a vel b: ſed aſſumamus $x^3 \infty 21axx$, ſive $x \infty 21a$. Deinde ſubrogando $21a$ ubique in locum x in æquatione Propoſita $x^3 - 21axx \begin{array}{l} -bb \\ +20aa \end{array} x + 20abb \infty 0$ (rejiciendo brevitatis causâ terminos, ex quibus æquatio Ficta eſt conflata, cum ipſi, dum nihilo ſunt æquales poſiti, neceſſariò evaneſcant) obtineo pro terminorum omnium aggregato $- 21abb + 21,$
$20a^3$

$20a^3 + 20abb$, vel $-abb + 21, 20a^3$, quod quidem aggregatum voco *Fictum Terminum*, cujus diviſores hi quatuor exiſtunt $+a$, & $-a$; $-bb + 21, 20aa$, & $+bb - 21, 20aa$. Porrò ſubducto hoc Ficto valore $21a$ ab utroque priorum; & ab utroque duorum ſequentium ejusdem valoris quadrato, (quoniam ipſi duarum ſunt dimenſionum;) relinquentur $-20a$, $-22a$; $-bb - 21aa$, $bb - 41, 21aa$. Quo peracto, ſi videatur num aliqua horum Reliquorum conſentiant cum diviſoribus ultimi Termini $+20abb$ æquationis Propoſitæ, comperietur ſolummodo $-20a$ conſentire. Quocirca ad $-20a$ additâ x unius dimenſionis, ſiquidem $-20a$ unius tantùm dimenſionis exiſtit, explorandum duntaxat reſtat num æquatio Propoſita dividi poſſit per $x - 20a$. quod, ſi non contingat, erit ea per x, aut xx, $+$ vel $-$ quâvis aliâ quantitate cognitâ atque rationali indiviſibilis, quemadmodum quoque ſi nulli diviſores congruentes reperti fuiſſent. at verò hæc æquatio dividi poterit per $x - 20a$, orieturque pro quotiente $xx - ax - bb \propto 0$.

Hic autem quædam conſideranda veniunt, quæ breviter ſaltem indicabo.

1. Per hanc viam omnes æquationes duorum terminorum, quibus æquatio Propoſita dividi poſſit, eâdem operâ inveniuntur.

2. In formanda nova æquatione, aut cùm ipſi x affingitur aliquis valor, obſervandum eſt, eum brevitatis causâ ita fingi poſſe, ut ipſo in locum x ſubrogato reſultet inde tale quantitatum aggregatum ſeu *Fictus Terminus*, cujus diviſores faciles ſint inventu, ac pauci numero. id quod communiter levi negotio obtineri poteſt.

3. Sæpenumero ſupervacaneum eſt, ut omnes diviſores ultimi Termini æquationis Propoſitæ quærantur; ut in ſuperiore exemplo videre eſt, ubi quæ reſtabant Reliqua, ex diviſoribus Ficti Termini & ex aſſumpto valore ipſius x & xx facta, hæc erant quatuor $-20a$, $-22a$, $-bb - 21aa$, $+bb - 41, 21aa$, quorum duo poſteriora non poſſunt congruere cum diviſoribus ultimi Termini $20abb$ æquationis Propoſitæ, *cum duo Membra habeant, atque hic terminus tantùm unum.* deinde apparet etiam, quòd $22a$ diviſor eſſe non poſſit ipſius $20abb$, *quoniam numerus 22 major eſt numero 20*; atque eapropter conſiderare tantùm oportet

 -20

— 20 *a*, ita ut ſolummodo inquirendum ſit num ultimus Terminus 20 *abb* diviſibilis ſit per — 20 *a*. Poſſumus quoque eodem modo, quando diviſores ultimi Termini æquationis Propoſitæ cogniti ſunt, invenire diviſores omnes *Ficti Termini*, qui nobis inſervire queunt, reliquis qui inutiles ſunt prætermiſſis. Quin imò in multis caſibus, præſertim cùm æquatio indiviſibilis eſt, parcere poſſumus labori, qui in quærendis diviſoribus tam ultimi Termini æquationis Propoſitæ quàm *Ficti Termini* eſſet impendendus, ſi modò ipſos inter ſe comparaverimus, quod modicâ experientiâ longè clariùs, quàm multis verbis pateſcet.

4. Si fortè contingat ut diviſores Congruentes multis adhuc numero exiſtant, ita ut etiamnum nimis laborioſum foret omnibus iſtis diviſoribus diviſionem æquationis Propoſitæ tentare, poterimus aliam æquationem fingendo aut ipſi *x* alium valorem aſſignando rurſus operari, &c, ut ante, *Reliqua* (quæ ſingulis diviſoribus hujus ultimi Ficti termini, — ultimò ipſius *x*, aut *xx*, &c. fictis valoribus ſunt æqualia, quemadmodum in Regula fuit dictum,) cum jam inventis Congruentibus comparare, & iterum congruentes, ſi qui ſint, eligere; ſi verò nulli reperiantur, argumentum eſt æquationem per *x*, aut *xx*, &c. + vel — quâvis quantitate cognitâ atque rationali eſſe indiviſibilem. Et ſi adhuc nimis multi fuerint, eodem modo denuo quidam reſcindi poſſunt. Sed hoc raro accidit in æquationibus literalibus.

5. Si æquatio Propoſita Fractionibus carens ſit diviſibilis per aliam æquationem rationalem, duos tantùm Terminos habentem, non opùs eſt, ad inveniendum hunc diviſorem, omnia ſigna radicalia ex Propoſita æquatione auferre, ſed ea ſolummodo, quæ in ultimo Termino reperiuntur.

Poteſt etiam hæc Regula XVI *dividi in duas partes, hoc modo:*

Inquire primùm num Propoſita æquatio ſit diviſibilis per aliam in qua unus pluréſve termini deſunt, ſecundùm XI Regulam; Si non ſit, tantùm ſecundùm jam deſcriptam XVI Regulam inquirendum eſt, num ſit diviſibilis per *x* + vel — aliquo diviſore ultimi Termini,

mini, omiſſis omnibus reliquis diviſoribus duarum pluriúmve dimenſionum.

XVII *REGULA*,

Quæ docet modum inveniendi omnes æquationes rationales, quibus æquatio quævis rationalis & Fractione carens, ſive literalis, ſive numeralis ſit, dividi poſſit.

Æquatio talis erit diviſibilis per aliam rationalem fractione carentem, in qua vel unus pluréſve termini deficiunt, vel nullus. Primò itaque inquirendum eſt per XI Regulam, num per rationalem fractione carentem, in qua unus pluréſve termini deficiant, dividi poſſit; ſi comperiatur id fieri non poſſe, erit ea diviſibilis per æquationem nullo termino carentem, & quidem unius dimenſionis, ſi Propoſita ſit 3 dimenſionum; vel per aliquam unius vel duarum dimenſionum, ſi Propoſita ſit 4 vel 5 dimenſionum; vel per aliquam 1, 2, 3, ſi Propoſita ſit 6 vel 7 dimenſionum; vel per aliquam 1, 2, 3 vel 4 dimenſionum, ſi Propoſita habeat 8 vel 9 dimenſiones; & ſic in infinitum.

Modum verò inquirendi an ea diviſibilis ſit per æquationem ſimplicem ſive unius dimenſionis, antea oſtendi: unde ſolummodo reſtat, quo modo reliqui diviſores, ſeu æquationes duarum, trium, &c. dimenſionum inveniri queant.

Et ſciendum, me quantitatem cognitam 2di termini, adfectam ſuis ſignis + & — vocare *p*; 3tii termini *q*; 4ti *r*; 5ti *ſ*; 6ti *t*; 7mi *v*; at diviſorem ultimi termini, ſimiliter ſignis ſuis adfectum, *b*.

REGULA PRO ÆQUATIONIBUS 4or DIMENSIONUM.

Si æquatio Propoſita diviſibilis ſit per æquationem

 ratio-

rationalem, plures quàm unam dimenſionem habentem, in qua nullus terminus deficiat; erit ea diviſibilis per

$$xx + \frac{r-hp}{\frac{s}{h}-h}x + h \infty 0.$$

Excepto tantùm, cùm $\frac{s}{h}$ eſt $\infty\, h$, ac ſimul $r \infty hp$, id eſt, $h \infty 8 \sqrt{s}$, & $h \infty \frac{r}{p}$, tunc enim diviſibilis erit per

$$xx + \tfrac{1}{2}p\, 8 \sqrt{\tfrac{1}{4}pp + 2h - q} \text{ in } x, + h \infty 0.$$

1. Et cum æquatio Propoſita ſit liberata ab omnibus fractis & ſurdis quantitatibus, atque dividi queat per æquationem rationalem: ſequitur, $\frac{r-hp}{\frac{s}{h}-h}$ debere integram eſſe quantitatem rationalem. Patet etiam $ſ$ nunquam eſſe poſſe $\infty\, hh$, niſi $ſ$ quadratum fuerit, ac r per p dividi poſſit.

2. Sufficiet etiam illos ſolùm diviſores ultimi Termini qui ipſius √ Q^am. non excedunt conſiderare, nimirum, ſi æquatio ſit numeralis; ſed ſi ſit literalis, opùs tantùm erit diviſoribus uti duarum dimenſionum, atque ex his ſemper alterutro tantùm duorum talium, quorum productum conſtituat ultimum Terminum.

Exempli gratiâ, ſi proponatur hæc æquatio numeralis $x^4 - 3x^3 + 12xx - 30x - 200 \infty 0$, quæ dividi poteſt per aliquam rationalem; & ſi compertum ſit ipſam indiviſibilem eſſe per x, + vel — aliquo diviſore ultimi Termini, ut & per æquationem 2 dimenſionum, in qua aliquis terminus deficit; dividi poterit per hanc $xx + \frac{r-hp}{\frac{s}{h}-h}x + h \infty 0$.

Quia igitur hîc p eſt $\infty -3$

q, quâ non indigemus, prætereo.

$r \quad \infty -30$

$ſ \quad \infty -200$,

hinc

hinc erit $xx + \frac{r - hp}{\frac{s}{h} - h}x + h \infty xx + \frac{-30 + 3h}{\frac{-200}{h} - h}x + h \infty 0$.

Sunt autem Diviſores ultimi Termini radicem Quadratam non excedentes; ſeu valores ipſius b, $\infty + 1$ vel -1

$+2$ -2

$+4$ -4

$+5$ -5

$+8$ -8

$+10$ -10.

Unde ſumendo $b \infty + 1$, erit $\frac{-30 + 3b}{-\frac{200}{b} - b}$, fractio, ſimiliterque ſi ſumatur $b \infty - 1$; $\infty + 2$; $\infty - 2$; $\infty + 4$; $\infty - 4$, & $\infty + 5$. At ſi ſumatur $b \infty - 5$, obtinebitur -1, ac proinde tentanda erit diviſio per $xx - 1x - 5 \infty 0$. Quoniam autem per hanc fieri nequit, tranſeo ad alium valorem ipſius b, puta $+8$. Sed cum ſic rurſus prædicta quantitas fractio evaderet; ut & quando pro b aſſumitur -8, tranſeo ad $b \infty + 10$. Quia verò r fit ∞bp, ac idcirco $xx + b \infty 0$, non poterit ſimiliter hic valor nobis inſervire; ita ut nobis ſolùm reſtet $b \infty - 10$. Unde obtinetur æquatio $xx - 2x - 10 \infty 0$, per quam Propoſita dividi poteſt.

Eodem modo, ſi proponatur æquatio literalis

$$x^4 * \begin{matrix} -bb \\ +2ab \end{matrix} xx \begin{matrix} +4abb \\ -a^3 \\ -4b^3 \\ +aab \end{matrix} x \begin{matrix} -4b^4 \\ +2aabb \end{matrix} \infty 0,$$

Quoniam p eſt $\infty 0$

r $\infty 4abb - a^3 - 4b^3 + aab$

$ſ$ $\infty 2aabb - 4b^4$,

erit $xx + \frac{r - hp}{\frac{s}{h} - h}x + h \infty xx + \frac{4abb - a^3 - 4b^3 + aab}{\frac{2aabb - 4b^4}{h} - h}x + h \infty 0$.

Diviſores ultimi Termini, duas habentes dimenſiones, ſeu valores ipſius b, ſunt $+bb$, & $-4bb + 2aa$,

$-bb$, $+4bb - 2aa$,

$+2bb$, $-2bb + aa$,

$-2bb$, $+2bb - aa$.

Quorum tantùm prioribus 4 indigemus, nimirum, $+bb$, $-bb$, $+2bb$,

$+2bb$, $-2bb$: quoniam reliqui per hos multiplicati ultimum Terminum producunt.

Sumendo autem $b \infty + bb$, 2dus terminus erit fractio. Hinc tranſeundo ad $b \infty + 2bb$, obtinebitur æquatio $xx \frac{+b}{-a} x + 2bb \infty 0$. Per quam Propoſita dividi poteſt, invenitur enim pro quotiente hæc $xx \frac{+a}{-b} x \frac{-2bb}{+aa} \infty 0$.

REGULA PRO ÆQUATIONIBUS 5que DIMENSIONUM.

Si æquatio Propoſita 5 dimenſionum diviſibilis ſit per æquationem rationalem, plures quàm unam dimenſionem habentem, in qua nullus terminus deſit; poterit ipſa dividi per æquationem hanc

$$xx - \frac{\frac{s}{h}}{2h} + \tfrac{1}{2}p \; 8 \; \sqrt{-\frac{\frac{s}{h}}{2b} + \tfrac{1}{2}p \; \square^{tc}. - q + b + \frac{s}{h}} \text{ in } x, + b \infty 0.$$

Et cum æquàtio hæc debeat eſſe rationalis quæ nullas admittat fractiones; ſequitur 2dum terminum debere eſſe integram quantitatem rationalem.

Exemplum.

Proponatur hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^5 ** + 8aab\,xx & + 2ab^3 & x - b^5 & \infty 0. \\ -63a^3 & +16a^3b & +a^4b & \\ +8abb & +15aabb & -ab^4 & \\ -b^3 & -b^4 & +a^3bb & \\ & -4a^4 & & \end{array}$$

Poſtquam conſtat, æquationem hanc dividi non poſſe per ullam aliam, 2 aut 3 dimenſiones habentem, in qua unus aut plures termini deficiunt, nec per x 8 aliquo diviſore ultimi termini; erit illa diviſibilis per ſuperiorem

$$xx - \frac{\frac{s}{h}}{2h} + \tfrac{1}{2}p \; 8 \; \sqrt{-\frac{\frac{s}{h}}{2h} + \tfrac{1}{2}p \; \square^{tc}. - q + b + \frac{s}{h}} \text{ in } x, + b \infty 0.$$

Quan-

Quantitates cognitæ ſunt $p \infty 0$

$q \infty 0$

r nullius hic eſt uſus.

$s \infty 2ab^3 + 16a^3b + 15aabb - b^4 - 4a^4$

$t \infty -b^5 + a^4b - ab^4 + a^3bb$,

& diviſores ultimi Termini, duas dimenſiones habentes, ſeu valores ipſius b ſunt $\infty\ ab + bb$, vel $-ab - bb$, vel $bb - aa$, vel $-bb + aa$

vel $ab - bb$, vel $-ab + bb$

vel $aa + ab + bb$, vel $-aa - ab - bb$:

hinc ſi b ſumatur $\infty\ ab + bb$, obtinebitur

$$xx - \frac{\frac{s}{h}}{2b} + \frac{1}{2}p \pm \sqrt{-\frac{\frac{s}{h}}{2b} + \frac{1}{2}p\ \square^{tc.} - q + b + \frac{s}{h}} \text{ in } x, + b$$

æquale $xx - 4ax + \begin{matrix} ab \\ +bb \end{matrix} \infty 0$. Per quam ſi tentetur utrum Propoſita dividi queat, invenietur diviſionem fieri poſſe, atque pro quotiente oriri $x^3 + 4axx \begin{matrix} \\ -ab \\ -bb \end{matrix} + 16aax - b^3 \begin{matrix} \\ +a^3 \\ \ \end{matrix} \infty 0$.

REGULA PRO ÆQUATIONIBUS 6 DIMENSIONUM.

Si æquatio Propoſita 6 dimenſionum diviſibilis ſit per æquationem rationalem, plures quàm unam dimenſionem habentem, in qua nullus terminus deſit; erit ipſa diviſibilis vel per æquationem 2 dimenſionum, vel per aliquam 3 dimenſionum. Si diviſibilis ſit per æquationem rationalem 2 dimenſionum, poterit dividi per æquationem $xx + yx + h \infty 0$,

$$\text{exiſtente } y \infty \frac{ph - \frac{s}{h}}{2h - \frac{\frac{2v}{h}}{h}} \pm \sqrt{\frac{ph - \frac{s}{h}}{2h - \frac{\frac{2v}{h}}{h}}\ \square^{tc.} \frac{+s - \frac{v}{h} + hh - qh}{h - \frac{\frac{v}{h}}{h}}}.$$

Si diviſibilis ſit per æquationem rationalem 3 dimenſionum, erit diviſibilis

 per

per æquationem $x^3 + y\,xx + z\,x + h \infty 0$,
exiſtente

$$y^3 \frac{-\frac{pv}{h} - 2ph}{\frac{v}{h}+h}\, yy \frac{+pph - 2t}{\frac{v}{h}+h}\, y \frac{\overline{-\frac{v}{h}+h} \text{ in } r, \overline{-qh+t} \text{ in } p}{\frac{v}{h}+h} \infty 0,$$

$$\qquad\qquad + qy \qquad\qquad\qquad \frac{v}{h} - h$$

$$\& \; z \infty \frac{y^3 - pyy + qy + \frac{v}{h} + h - r}{2y - p}.$$

Porrò ob eandem rationem atque in præcedentibus Regulis ſequitur y & z debere eſſe integras quantitates rationales.

Atque in hoc ultimo caſu, ubi diviſio per $x^3 + yxx + zx + h \infty 0$ tentanda eſt, opùs tantùm eſt uti diviſoribus ultimi Termini qui ejus radicem quadratam non excedunt, nimirum quando æquatio numeralis eſt; at ipsâ literali exiſtente, ſufficit uti diviſoribus 3 dimenſionum, atque ex his duntaxat alterutro duorum talium, quorum productum ultimum Terminum efficit, haud ſecus ac id in præcedenti Regula pro æquationibus 4^{or} dimenſionum quoque annotatum fuit. Quæ porrò animadverſio locum etiam obtinet in omnibus æquationibus parium dimenſionum, quas dividere tentamus per aliam dimidium præcedentium dimenſionum numerum habentem.

DETERMINATIO 1^{mi} *CASUS.*

Cùm $2h - \frac{\frac{2v}{h}}{h}$ eſt $\infty 0$, hoc eſt, $h^3 \infty v$, & $h \infty \sqrt{C.\,v}$: erit $y \infty \frac{-s + q\sqrt{C.\,v}}{p\sqrt{C.\,v} - \frac{s}{\sqrt{C.\,v}}}$.

Cùm

Cùm $2h - \frac{\frac{2v}{b}}{h}$ eſt $\infty\, 0$, ac ſimul $p\sqrt{C.v} - \frac{t}{\sqrt{C.v}} \infty\, 0$, & $-ſ + q\sqrt{C.v} \infty\, 0$, hoc eſt, $b \infty \sqrt{C.v}$, $h \infty \sqrt{\frac{t}{p}}$, & $h \infty \frac{ſ}{q}$: erit $y^3 - pyy \begin{matrix} + \frac{ſ}{\sqrt{C.v}} \\ - 3\sqrt{C.v} \end{matrix} y \begin{matrix} + 2p\sqrt{C.v} \\ - r \end{matrix} \infty\, 0$.

DETERMINATIO 2ᵈⁱ CASUS.

Cùm $\frac{v}{b} + h$ eſt $\infty\, 0$, erit $yy \begin{matrix} - p \\ + \frac{2t}{ph} \end{matrix} y - \frac{2r}{p} + q - \frac{s}{b} \infty\, 0$.

Cùm p eſt $\infty\, 0$, ac ſimul $\frac{v}{b} + h \infty\, 0$, erit $y \infty \frac{rb}{t}$.

Cùm s eſt $\infty\, 0$, & $r \infty\, 0$, ac ſimul $p \infty\, 0$, & $\frac{v}{b} + h \infty\, 0$, erit $y^4 * + 2qyy - 8hy \begin{matrix} - 4ſ \\ + qq \end{matrix} \infty\, 0$.

Cùm $2y$ eſt $\infty\, p$, & $y^3 - pyy + qy + \frac{v}{h} + b - r \infty\, 0$, erit $z \infty \frac{t + hyy - qh}{\frac{v}{b} - b}$.

Sed cùm determinationes illæ manent, ac ſimul $\frac{v}{b} - b$ eſt $\infty\, 0$, & $t + hyy - qh \infty\, 0$, erit $z \infty \frac{t}{2\sqrt{v}}\ 8 \sqrt{\frac{tt}{4v} - ſ + p\sqrt{v}}$.

Denique in omnibus determinationibus advertendum eſt, quòd, ſi reperiatur $2h - \frac{\frac{2v}{b}}{h} \infty\, 0$, & $p\sqrt{C.v} - \frac{t}{\sqrt{C.v}} \infty\, 0$, ſed $-ſ + q\sqrt{C.v}$ non ſimul eſſe $\infty\, 0$; ut & ſi reperiatur $\frac{v}{b} + h \infty\, 0$, $p \infty\, 0$, & $t \infty\, 0$, ſed r non ſimul $\infty\, 0$; itemque ſi reperiatur $2y \infty\, p$, & $y^3 - pyy + qy + \frac{v}{b} + b - r \infty\, 0$, & $\frac{v}{b} - b \infty\, 0$, ſed $t + hyy - qh$ non ſimul $\infty\, 0$;

 atque

Digitized by Google

atque ſimiliter in Regula pro 4^or dimenſionibus, ſi $\frac{s}{b} - b$ reperiatur $\infty\, 0$, ſed non perinde $r - bp \infty\, 0$: quòd tum inquam valor aſſumptus ipſius b, quò hoc contingit, nobis inſervire non poſſit.

Exempla 1^mi Caſus.

Proponatur inquirendum, an hæc æquatio

$$x^6 - 3x^5 + 7x^4 - 5x^3 + 4xx * + 8 \infty 0$$

dividi poſſit per æquationem rationalem 2 dimenſionum, in qua nulli termini deficiant.

Cum igitur hic p ſit $\infty - 3$
$q \infty 7$
$r \infty - 5$
$s \infty 4$
$t \infty 0$
$v \infty 8$,

$$\text{erit } y \infty \frac{pb - \frac{r}{b}}{2b - \frac{\frac{2v}{b}}{b}} \pm \sqrt{\frac{pb - \frac{r}{b}}{2b - \frac{\frac{2v}{b}}{b}}\,\square^{\text{tè}} \; \frac{+s - \frac{v}{b} + bb - qb}{b - \frac{\frac{v}{b}}{b}}}$$

æqualis

$$\frac{-3b}{2b - \frac{\frac{16}{b}}{b}} \pm \sqrt{\frac{-3b}{2b - \frac{\frac{16}{b}}{b}}\,\square^{\text{tè}} \; \frac{4 - \frac{8}{b} + bb - 7b}{b - \frac{\frac{8}{b}}{b}}}$$

Diviſores autem ultimi Termini, ſeu valores ipſius b ſunt

$+1$, vel -1
$+2$, -2
$+4$, -4
$+8$, -8.

Hinc ſi primò ſumatur $b \infty + 1$, poterit radix ex

$$\frac{-3b}{2b - \frac{\frac{16}{b}}{b}}\,\square^{\text{tè}} \; \frac{4 - \frac{8}{b} + bb - 7b}{b - \frac{\frac{8}{b}}{b}}$$

extrahi, inveniturque $y \infty - 1$, ſed Æquatio propoſita non poterit dividi per $xx - 1x + 1 \infty 0$; ac

ac proinde tranſeo ad $b \infty + 2$, ſed cum ſic b fiat $\infty \sqrt{C.\,v}$, deberet, juxta determinationes ſuperiores, y eſſe $\infty \dfrac{-s + a\sqrt{C.\,v}}{p\sqrt{C.\,v} - \frac{s}{\sqrt{C.\,v}}}$, hoc eſt, $\infty \dfrac{+10}{-6}$. Id quod cum fractio exiſtat, tranſeo ad $b \infty + 4$, atque inde obtineo $y \infty \dfrac{-12}{+7}\ 8\ \frac{2}{7}$, hoc eſt, $y \infty -2$, aut $\infty -\frac{10}{7}$. Quorum quidem non niſi $y \infty -2$ retinendum eſt, adeoque diviſio tentanda per $xx + yx + b \infty xx - 2x + 4 \infty 0$. Hæc autem procedere comperitur, oritur namque pro quotiente $x^4 - 1x^3 + 1xx + 1x + 2 \infty 0$.

Eodem modo, ſi examinare velimus hanc æquationem $x^6 + 1x^5 + 1x^4 - 2x^3 + 2xx + 4x + 8 \infty 0$: quoniam p eſt $\infty 1$, $q \infty 1$, $r \infty -2$, $ſ \infty 2$, $t \infty 4$, & $v \infty 8$, invenitur

$$y \infty \frac{\dfrac{1b - \frac{4}{b}}{b}}{\dfrac{2b - \frac{16}{b}}{b}}\ 8\ \sqrt{\frac{\dfrac{1b - \frac{4}{b}}{b}}{\dfrac{2b - \frac{16}{b}}{b}}\,\square\text{tè.}\ \frac{+2 - \frac{8}{b} + bb - b}{\dfrac{b - \frac{8}{b}}{b}}}.$$

Sumendo autem $b \infty + 1$, non poterit $\sqrt{Q.}$ extrahi; quocirca tranſeo ad $b \infty + 2$, invenioque b fore $\infty \sqrt{C.\,v}$, ac $b \infty \sqrt{\frac{t}{p}}$, ut & $b \infty \frac{ſ}{q}$. Unde fit ut juxta dictam determinationem valorem quæram ipſius y per hanc æquationem

$$\begin{array}{l} y^3 - pyy + \frac{ſ}{\sqrt{C.\,v}}\,y + 2p\sqrt{C.\,v} \\ \qquad\quad -3\sqrt{C.\,v} \;-\; r \end{array} \infty 0,$$

hoc eſt, $y^3 - 1yy - 5y + 6 \infty 0$.

E qua æquatione pro y nullus valor rationalis invenitur præter 2, ac proinde diviſio tentanda relinquitur per $xx + yx + b \infty xx + 2x + 2 \infty 0$. Comperitur autem fieri poſſe, oritur enim pro quotiente $x^4 - 1x^3 + 1xx - 2x + 4 \infty 0$.

Exempla 2^{di} Caſus.

Eſto examinandum, an hæc æquatio

$$x^6 * + 1x^4 + 3x^3 + 6xx + 3x - 4 \infty 0$$

dividi poſſit per æquationem rationalem 3 dimenſionum, in qua nulli termini deficiant,

 Cum

Digitized by Google

Cum hic p ſit ∞ 0
q ∞ 1
r ∞ 3
s ∞ 6
t ∞ 3
v $\infty - 4$,

erit $$y^3 \frac{-\frac{pv}{h} - 2pb}{\frac{v}{h}+b}\; yy \frac{+ppb-2t}{\frac{v}{h}+b}\; y \;\begin{matrix} \\ +qy \end{matrix}\; \frac{\overline{-\frac{v}{h}+b}\text{ in } r,\ \overline{-qb+t}\text{ in } p}{\begin{matrix}\frac{v}{h}+b \\ \frac{v}{h}-b\end{matrix}}$$

æqualis

$$y^{3}*\; \frac{\begin{matrix}+1 \\ -6\end{matrix}}{-\frac{4}{h}+b}\; y\; \frac{\overline{\frac{4}{h}+b}\text{ in } 3}{\begin{matrix}-\frac{4}{h}+b \\ -\frac{4}{h}-b\end{matrix}} \infty 0.$$

Diviſores ultimi Termini, ſeu valores ipſius b, qui ſoli ſunt conſiderandi, ſunt $+1$, vel -1, vel $+2$. Unde ſumendo $b \infty +1$, obtinebitur $y^3 * + 3y - 10 \infty 0$. Sed cum y hujus æquationis nullum valorem rationalem admittat, tranſeo ad alium, nempe $+2$. Cum autem ſic $\frac{v}{h} + b$ fiat ∞ 0, atque etiam p ſit ∞ 0, erit, juxta dictam determinationem, $y \infty \frac{rh}{s}$, hoc eſt, $y \infty 2$. At quoniam pro $z \infty \frac{y^3 - pyy + qy + \frac{v}{h} + b - r}{2y - p}$ invenitur fractio, tranſeo demum ad $b \infty -1$, atque hinc obtineo $y^3 * - 1y * \infty 0$, hoc eſt, $y \infty +1$, & $y \infty -1$. E quibus tandem inveniendus ſupereſt valor ipſius z. Quocirca ſi primùm ſumatur $y \infty +1$, invenietur inde $z \infty 1$, & $x^3 + yxx + zx + b \infty x^3 + 1xx + 1x - 1 \infty 0$. Per quam æquationem Propoſita dividi poteſt, oritur enim pro quotiente $x^3 - 1xx + 1x + 4 \infty 0$. Quòd ſi autem per eam dividi non potuiſſet, ut nec per aliam, ubi y eſt $\infty -1$, æquatio Propoſita dicto modo non diviſibilis fuiſſet, quandoquidem ſic omnes ipſius b valores examini ſubjeciſſemus.

Simi-

Similiter examinaturi hanc æquationem

$$x^6 - 6x^5 + 25x^4 - 36x^3 + 3xx + 16x - 28 \infty 0,$$

in qua p eſt $\infty -6$, $q \infty 25$, $r \infty -36$, $s \infty 3$, $t \infty 16$, $v \infty -28$, & $b \infty +1$ vel -1, aut $+2$ vel -2, aut $+4$ vel -4, (neglectis ſcilicet reliquis diviſoribus, radicem quadratam ultimi termini excedentibus:) inveniemus, faciendo, ut ante, periculum cum unoquoque valore ipſius b, ſi pro b aſſumitur -2, æquationem hanc $y^3 + 5yy + 16\frac{1}{3}y + 31 \infty 0$, in qua y admittit tantummodo unum valorem rationalem, qui integer numerus eſt, nempe -3. Per hunc autem quæro valorem ipſius z. Sed cum hic $2y$ ſit ∞p, & $y^3 - pyy + qy + \frac{v}{b} + b - r \infty 0$, non poſſum eundem per hanc æquationem $z \infty \dfrac{y^3 - pyy + qy + \frac{v}{b} + b - r}{2y - p}$ invenire, quocirca illum quæro per hanc $z \infty \dfrac{t + byy - qb}{\frac{v}{b} - b}$, atque invenio $z \infty 3$, &

$$x^3 + yxx + zx + b \infty x^3 - 3xx + 3x - 2 \infty 0.$$

Per quam igitur examinando an Propoſita dividi queat, comperietur diviſionem fieri poſſe, orieturque pro quotiente $x^3 - 3xx + 13x + 14 \infty 0$. Si verò in hoc ultimo exemplo, ubi $2y$ eſt ∞p, non fuiſſet $y^3 - pyy + qy + \frac{v}{b} + b - r \infty 0$, oportuiſſet tranſire ad alium valorem ipſius b.

Ubi notandum per has Regulas pro æquationibus 4, 5, & 6 dimenſionum non ſolùm ſciri poſſe, an Propoſita aliqua æquatio per aliam rationalem, in qua omnes Termini extant, diviſibilis ſit; ſed etiam utrum ipſa diviſibilis ſit per rationalem, in qua aliquis Terminus deficiat. Verùm cum idem faciliùs cognoſci queat per XI Regulam, hanc iis duntaxat æquationibus, in quibus nulli termini deficiunt, applicare volui.

2. Quoniam autem uſus harum Regularum vel eo major eſt, quo pauciores diviſores ultimus Terminus Propoſitæ æquationis admittit, haud inconſultum fuerit hîc adjungere modum, quo plerumque levi negotio Propoſitam æquationem in aliam tranſmutare licet, in qua ultimus Terminus pauciores habeat dimenſiones, quæque indiviſibilis ſit ſi Propoſita ſit indiviſibilis, at diviſi-

Digitized by Google

viſibilis, ſi Propoſita diviſibilis fuerit, & ex cujus æquationibus ipſam dividentibus facilè quoque inveniri poſſint æquationes, Propoſitam dividentes.

Aſſumpto in hunc finem valore aliquo pro x, ut lubet, eoque ſubrogato ubique in locum x, quærantur diviſores omnes aggregati omnium terminorum; &, ſi diviſores hi non pauciores numero fuerint diviſoribus ultimi Termini æquationis Propoſitæ, ſumatur rurſus alius valor pro x, exploreturque num hinc aggregatum pauciorum diviſorum inveniatur; quod ſi non fiat, denuò pro x alius valor aſſumendus eſt, idque tam diu continuetur, donec inde aggregatum reſultet, quod pauciores diviſores habeat. Quo peracto, ponatur $x \infty z$, $+$ aſſumpto ipſius x valore, hujuſmodi agregatum pauciorum diviſorum ſuggerente, atque hic valor $z +$ &c. ubique in locum x ſubſtituatur, obtinebiturque alia æquatio, in qua z erit incognita quantitas, & ultimus Terminus dictum aggregatum inventum pauciorum diviſorum; ita ut hæc æquatio talis futura ſit, qualis requiritur, nimirum indiviſibilis ſi Propoſita indiviſibilis ſit, at diviſibilis ſi Propoſita diviſibilis fuerit.

Exempli gratiâ, eſto invenienda ejuſmodi æquatio loco hujus

$$x^5 + 2x^4 - 58x^3 - 49xx - 50x - 600 \infty 0.$$

Sumatur $x \infty 1$, fietque

$$\begin{array}{rl} x^5 \infty & +1 \\ +2x^4 \infty & +2 \\ -58x^3 \infty & \ldots -58 \\ -49xx \infty & \ldots -49 \\ -50x \infty & \ldots -50 \\ -600 \infty & \ldots -600, \end{array}$$

& $x^5 + 2x^4 - 58x^3 - 49xx - 50x - 600 \infty + 3 - 757$, hoc eſt, $\infty - 754$. cujus quidem numeri diviſores multò pauciores exiſtunt quàm ipſius -600.

Hinc ponendo $x \infty z + 1$,

erit

$$\begin{array}{lrrrrrr}
\text{erit} & x^5 \propto z^5 & +5z^4 & +10z^3 & +10zz & +5z & +1 \\
& +2x^4 \propto & +2z^4 & +8z^3 & +12zz & +8z & +2 \\
& -58x^3 \propto & & -58z^3 & -174zz & -174z & -58 \\
& -49xx \propto & & & -49zz & -98z & -49 \\
& -50x \propto & & & & -50z & -50 \\
& -600 \propto & & & & & -600. \\
\hline
\end{array}$$

$$\& \; z^5 + 7z^4 - 40z^3 - 201zz - 309z - 754 \propto 0.$$

Quæ æquatio per præcedentes Regulas examinata diviſibilis reperitur per $zz + 3z - 58 \propto 0$, ac proinde cum x ſit $\propto z + 1$, erit $z \propto x - 1$. Unde ſi in locum z ſubrogetur $x - 1$, obtinebitur $zz + 3z - 58 \propto xx + 1x - 60 \propto 0$. per quam itaque Propoſita quoque æquatio diviſibilis erit.

Quòd ſi autem poſt primam poſitionem ipſius $x \propto +1$ obtinuiſſemus aggregatum; quod nobis non inſerviiſſet, id eſt, quod non pauciores aut adhuc nimis multos diviſores admiſiſſet, ponere potuiſſemus $x \propto -1$; quòd ſi verò & hinc quæſitum aggregatum nondum inveniſſemus, ponere poſſemus $x \propto +2$: deinde $x \propto -2$, atque ita porrò; vel etiam poſſemus nonnullos terminos ſupponere $\propto 0$, ſi aliqui fuerint è quibus idonea quantitas pro x inveniri poſſet. Exempli gratiâ, poſſemus in æquatione allata duos priores terminos $x^5 + 2x^4$ ſupponere $\propto 0$, atque ſic invenire $x \propto -2$, quærendo tantùm ulteriùs aggregatum reliquorum Terminorum $- 58x^3 - 49xx - 50x - 600$. Porrò, quod hîc de æquationibus numeralibus diximus, idem quoque locum obtinet in literalibus. Si enim, verbi gratiâ, habeatur æquatio literalis hæc

$$x^5 * - 6abx^3 + 30aabxx - 24a^3bx + 120ab^4 \propto 0,$$
$$+10a^4$$

ponere poſſumus $x \propto +a$, vel $x \propto -a$, vel $x \propto +b$, vel $x \propto -b$, &c. vel etiam ſupponere terminos aliquos $\propto 0$, ut $-6abx^3 \propto +30aabxx$, prout viſum fuerit.

3. Verùm enimvero magnum hîc commodum in literalibus æquationibus elucet: Nam *non tantùm, cùm hoc aggregatum nullos diviſores præter unitatem ac ſe ipſum admittit* (quos quidem diviſores in æquationibus literalibus, ubi omnia cujuſque termini membra eundem dimenſionum numerum habent, quemadmodum in his de quibus agimus, prætermittere ſoleo, cum nulla diviſio per eos fieri poſſit), *manifeſtum eſt, æquationem*

Digitized by Google

nem Propoſitam per aliam rationalem, in qua ſive omnes ſive non omnes termini extant, & ſive unius ſive plurium eſt dimenſionum, penitus eſſe indiviſibilem; Sed præterea etiam liquet, æquationem Propoſitam nunquam fore diviſibilem per æquationem rationalem, cujus dimenſionum numerus non congruit cum dimenſionum numero alicujus ex diviſoribus ultimi Termini vel dicti aggregati. Quocirca ſi æquatione exiſtente 6 dimenſionum diviſores non niſi 1 & 5 dimenſionum fuerint, erit ea indiviſibilis per æquationem 2, 3, & 4 dimenſionum; & ſi diviſores tantùm 2 & 4 dimenſionum fuerint, erit ipſa indiviſibilis per æquationem 1, 3, & 5 dimenſionum, atque ita de omnibus aliis.

Ita ut per hanc conſiderationem non tantùm multi caſus reſecari queant, quando æquatio per aliam rationalem diviſibilis eſt; ſed etiam ſi inquirere velimus, num Propoſita aliqua æquatio rationalis per aliam rationalem diviſibilis ſit, poterit ſæpiſſime parvo admodum labore indiviſibilitas, ſi ea ſit indiviſibilis, cognoſci.

Si enim, exempli causâ, proponatur æquatio

$$x^5 * - 6abx^3 + 30aabxx - 24a^3bx + 120ab^4 \infty 0,$$
$$+10a^4$$

ponaturque $x \infty a$, obtinebitur $x^5 \infty + a^5$

$$\begin{array}{lll} -\ 6abx^3 & \infty \ldots & -\ 6a^4b \\ +\ 30aabxx & \infty & +\ 30a^4b \\ -\ 24a^3bx & \infty \ldots & -\ 24a^4b \\ +\ 10a^4x & \infty & +\ 10a^5 \\ +\ 120ab^4 & \infty & +\ 120ab^4 \end{array}$$

& fit aggregatum $+\ 11a^5 + 120ab^4$.

Cujus diviſores (omiſſis unitate ac ipſo aggregato) tantùm ſunt $+a$, $-a$, $11a^4 + 120b^4$, & $-11a^4 - 120b^4$, unius ſcilicet & 4^or^ dimenſionum: ita ut Propoſita æquatio, ſi per rationalem unius dimenſionis diviſibilis non fuerit, penitus per rationalem futura ſit indiviſibilis. Quoniam autem hic x eſt $\infty z + a$, addi debet a diviſoribus $+a$, & $-a$, ad habendos valores ipſius x, idcirco tantummodo $x - 2a \infty 0$ pro diviſore aſſumi poſſet. Sed

per

per hunc æquatio Propoſita non eſt diviſibilis, quare illa etiam per nullam æquationem rationalem dividi poterit. Quod ſi juxta unam poſitionem non ita accidiſſet, facile fuerit aliam inſtituere, ponendo $x \infty b$, vel $\infty - a$, vel $\infty - b$, &c. Et rarò continget, quin per hanc tranſmutationem æquationis Propoſitæ in aliam aliquod commodum conſequuturi atque operæ plurimum ſublevaturi ſimus.

XVIII *Regula*,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem ſive literalem ſive numeralem, quæ ex multiplicatione duarum aliarum, quarum ultimi Termini ſunt quantitates rationales, fractioneq́; carentes, produci poſſunt.

Hæc Regula parùm à præcedenti differt, niſi quòd ſe latiùs extendat, & per hanc quoque Reductiones ejuſmodi æquationum ſemper inveniri poſſint, quæ ex duabus aliis, ſive rationales, ſive irrationales ſint, produci poſſunt, hoc tantùm excepto, quòd ultimi earum termini ſint quantitates rationales; cum præcedens Regula ſe ſolùm extendat ad æquationes, quæ non niſi ex rationalibus produci poſſunt: ideoque tantùm opùs eſt, ut ſolummodo iiſdem Regulis utamur, omnibus illis particularibus relictis, quæ originem duxerunt ex eo, quòd neceſſe ſit, ut illæ æquationes, ex quibus Propoſita æquatio produci poteſt, ſint rationales, quod hîc non requiritur. Exempli loco ſit prima.

Regula pro Æquationibus 4^or Dimenſionum.

Si æquatio Propoſita diviſibilis ſit per aliam, plures quàm unam dimenſionem habentem, in qua nullus terminus deficiat, & cujus ultimus terminus ſit rationalis; erit ea diviſibilis per

$$xx + \frac{r - bp}{\frac{s}{b} - b} x + b \infty 0.$$

Digitized by Google

Excepto tantùm, cum $\frac{s}{b}$ eſt $\infty\, b$, ac ſimul $r \infty bp$, id eſt, $b \infty \pm \sqrt{s}$, & $b \infty \frac{r}{p}$, tunc enim diviſibilis erit per

$$xx + \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}pp + 2b - q}, \text{ in } x, + b \infty 0.$$

ubi patet s nunquam eſſe poſſe $\infty\, bb$, niſi s quadratum fuerit, ac r per p dividi poſſit.

2. Sufficit etiam illos ſolùm diviſores ultimi termini, qui ipſius radicem quadratam non excedunt, conſiderare, &c.

Exempli gratiâ, examinaturus hanc æquationem

$$x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \infty 0:$$
$$\qquad\qquad - cc$$

quoniam $p \infty -2a$, $q \infty 2aa - cc$, $r \infty -2a^3$, $s \infty a^4$, hinc erit

$$xx + \frac{r - bp}{\frac{s}{b} - b}\, x + b \infty xx \frac{-2a^3 + 2ab}{\frac{a^4}{b} - b}\, x + b \infty 0.$$

Sunt autem diviſores ultimi Termini, ſeu valores ipſius b, $+aa$ & $-aa$. Unde ſumendo $b \infty aa$, obtinebitur $\frac{a^4}{b} - b \infty 0$, ac etiam $-2a^3 + 2ab \infty 0$ (hoc eſt, $\frac{s}{b} \infty b$, & ſimul $r \infty bp$.) ac proinde tentanda erit diviſio per $xx + \frac{1}{2}px \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp + 2b - q}$, x, $+ b \infty 0$, hoc eſt, per $xx - ax + \sqrt{aa + cc}$, x, $+ aa \infty 0$, vel per $xx - ax - \sqrt{aa + cc}$, x, $+ aa \infty 0$: Quæ diviſio per utramque ſuccedit.

Ita etiam ſe res habet in

REGULA PRO ÆQUATIONIBUS 5que DIMENSIONUM.

Si enim æquatio Propoſita 5 dimenſionum diviſibilis ſit per aliam plures quàm unam dimenſionem habentem, in qua nullus terminus deficiat, cujuſque ultimus terminus ſit rationalis; erit ea diviſibilis per

$$xx - \frac{\frac{s}{b}}{2b} + \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{-\frac{\frac{s}{b}}{2b} + \tfrac{1}{2}p\,\square^{tc.} - q + b + {}^{s}}, \text{ in } x, + b \infty 0.$$

Et

Et ſic porrò de cæteris Regulis, tantùm, uti dictum eſt, omnibus illis particularibus relictis, quæ originem duxerunt ex eo, quòd neceſſe ſit, ut illæ æquationes, ex quibus Propoſita æquatio produci poteſt, illic ſint rationales, quod ſolùm hîc non requiritur.

Animadvertendum quoque eſt, hanc Regulam ſe non ſolùm extendere ad æquationes, in quibus nec ſigna radicalia, nec Fractiones inveniuntur, (quemadmodum præcedens illis tantùm quadrat,) ſed quoque ad illas, in quibus & radicalia ſigna & Fractiones reperiuntur, hoc tantùm excepto, quòd non ſint in ultimo Termino, ut antea dictum.

Denique notandum eſt, quòd idem etiam ſequenti modo inveniri poſſit.

Regvla pro æqvationibvs 5 dimensionvm.

Quære communem diviſorem duarum æquationum,

$$\begin{array}{llllll} yy & +\frac{s}{hh}\,y & +q\;\infty\;0, & \&\;yy & -\frac{fh}{s}\,y & \underline{-hhp-t+rh}\;\infty\;0,\\ & -p & -h & & +\frac{hz}{s} & \quad\frac{s}{h}\\ & & -\frac{s}{h} & & & \end{array}$$

& per eum, valorem ipſius y; eritque Propoſita æquatio diviſibilis per $xx+yx+h\;\infty\;0$.

Regvla pro æqvationibvs 6 dimensionvm.

Si Propoſita æquatio diviſibilis eſt per

$$xx+yx+h\;\infty\;0,$$

quæratur communis diviſor duarum æquationum,

$$\begin{array}{llllllll} hyy & -\frac{v}{hh}\,yy & -phy & -f\;\infty\;0, & \&\;y^3 & -pyy & +qy & -r\;\infty\;0,\\ & +\frac{s}{h} & +\frac{v}{h} & & & & -zh & +ph\\ & & -hh & & & & -\frac{v}{hh} & +\frac{s}{h}\\ & & +qh & & & & & \end{array}$$

& per eum, valor ipſius y.

Si Propoſita æquatio eſt diviſibilis per $x^3 + yxx + zx + h \infty 0$, poſſunt per eandem methodum, quâ priores æquationes inventæ ſunt, etiam inveniri duæ aliæ, altera trium, altera 4^or^ dimenſionum, quarum communi diviſore invento, per eum valor incognitæ quantitatis y inveniri poteſt; valor verò ipſius z quæratur eodem modo, quo antea. Eadem eſt ratio in altioribus æquationibus.

Sed ſi nullus inveniatur communis diviſor, aſſumptum valorem ipſius h relinquo, & alium aſſumo. Et ſi omnes termini alterius æquationis ſe invicem tollant, per alteram inveniendus eſt valor ipſius y.

XIX *REGULA*,

Quæ modum docet reducendi omnem æquationem rationalem Fractione & 2do termino carentem, quæ dividi poſſit per aliam cujus 2^dus^ terminus ſit rationalis, &c.

Primùm inquiro per XI Regulam, an Propoſita æquatio diviſibilis ſit per aliam in qua non omnes termini extant; quod ſi fieri nequit, erit diviſibilis per aliam in qua omnes termini extant, quam ſequenti modo invenio. 1mo. Experior num dividi poſſit per $x +$ vel $-$ aliquo diviſore ultimi Termini; ſi neque hoc ſuccedat, facio æquationem ejuſdem formæ, quam multiplicatione deduco ex tot aliis paribus, quot paria ita ſumi queunt, ut productum totidem habeat dimenſiones quot Propoſita æquatio, non annumerando æquationem unius tantùm dimenſionis. Exempli gratiâ, ſi æquatio Propoſita habeat 8 dimenſiones, conſidero duas æquationes, habentes 2 & 6, 3 & 5, 4 & 4 dimenſiones; aut, ſi 9 dimenſiones habeat, duas, quæ 2 & 7, 3 & 6, 4 & 5 dimenſionum fuerint, ex quarum multi-

plica-

plicatione Propoſita poſſet produci. $3^{tiò.}$ Poſt hæc tranſmuto Propoſitam æquationem in aliam, cujus incognita quantitas deſignet quantitatem 2^{di} Termini, unius harum duarum æquationum, quæ, (ſi inæqualium dimenſionum fuerint,) pauciores dimenſiones habeat. $4^{tò.}$ Poſtremò inquiro num inventa æquatio diviſibilis ſit per incognitam quantitatem + vel — aliquo diviſore ultimi ſui Termini. &c.

Sumamus, verbi gratiâ, hanc æquationem 6 dimenſionum,

$$x^6 * + qx^4 + rx^3 + ſxx + tx + v \infty 0,$$

in qua q deſignet quantitatem cognitam tertii termini ſuis ſignis + & — adfectam; r quarti; $ſ$ quinti; t ſexti; & v ipſum ultimum terminum: Et quam ſuppono indiviſibilem per aliam æquationem, in qua unus aut plures Termini deficiunt, ut & per x, + vel — aliquo diviſore ultimi Termini.

Primò itaque inquiro utrum ipſa diviſibilis ſit per æquationem 2 dimenſionum, in qua omnes termini extant, hoc pacto:

$$\begin{array}{lllllll}
x^4 & -yx^3 & +zxx & +kx & +l & & \infty 0 \\
xx & +yx & +w & & & & \infty 0 \\
\hline
x^6 & -yx^5 & +zx^4 & +kx^3 & +l\,xx & & \\
 & +y & -yy & +yz & +yk & +yl\,x & \\
 & & +w & -wy & +wz & +wk & +wl \\
\hline
x^6 & * & +qx^4 & +rx^3 & +ſxx & +t\,x & +v \quad \infty 0.
\end{array}$$

Unde hæ 5 æquationes reſultant

$1^{ma.}$ $z - yy + w \infty q$
$2^{da.}$ $k + yz - wy \infty r$
$3^{tia.}$ $l + yk + wz \infty ſ$
$4^{ta.}$ $yl + wk \infty t$
$5^{ta.}$ $wl \infty v.$

Per 1^{mam} fit $z \infty q + yy - w$, qui valor ſi in locum ipſius z in reliquis æquationibus ſubrogetur, habebitur

pro $2^{dâ.}$ $k + qy + y^3 - 2wy \infty r$
$3^{tiâ.}$ $l + yk + qw + yyw - ww \infty ſ$
$4^{tâ.}$ $yl + wk \infty t$
$5^{tâ.}$ $wl \infty v.$

Per

Per 2dam fit $k \propto r - qy - y^3 + 2wy$, qui valor in locum ipſius k in reliquis æquationibus ſubſtitutus dat

pro 3tiâ. $l + ry - qyy - y^4 + 3wyy + qw - ww \propto ſ$

4tâ. $yl + rw - qwy - y^3w + 2wwy \propto t$

5tâ. $wl \propto v$.

Per 3tiam fit $l \propto ſ - ry + qyy + y^4 - 3wyy - qw + ww$, qui valor in reliquis æquationibus ſubſtitutus dat

pro 4tâ. $ſy - ryy + qy^3 + y^5 - 4wy^3 - 2qwy + 3wwy + rw \propto t$

5tâ. $ſw - ryw + qyyw + y^4w - 3wwyy - qww + w^3 \propto v$.

Per 4tam æquationem invento valore ipſius ww (aut ipſius $3ww$), ſubſtituo ipſum in locum ww (aut $3ww$) in 5ta æquatione, obtineoque 6tam æquationem, in qua w tantùm 1 dimenſionem habet, nimirum:

$$w \propto \frac{5y^8 + 6qy^6 - 4ry^5 + 5ſy^4 + qqy^4 - 5ty^3 - rryy + qſyy - 9vyy - qty + ſty - tr}{14y^6 + 8qy^4 + 5ry^3 + 2qqyy - 6ſyy + qry - 3ty - rr}.$$

Qui valor ſi jam in 4ta æquatione in locum w ſubrogetur, habebitur pro ipſa

$$\begin{array}{lllllllll} y^{15} * + 4qy^{13} - 2ry^{12} & + 6qqy^{11} & + 10ty^{10} & - 2qſy^{9} & + 12qty^{8} & - 3rty^{7} & + 10ſty^{6} \\ & - 2ſ & - 6qr & - 26v & + 6rſ & - 24qv & - 30rv \\ & & & + 4q^3 & - 6qqr & - 7ſſ & + 2qqt \\ & & & & & + 2qqſ & + 4qrſ \\ & & & & & + q^4 & + 2r^3 \\ & & & & & & - 2q^3r \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} - 12tty^5 & + 2qſty^4 & - 5qtty^3 & - 6rttyy & - qqtty & - qrtt \propto 0. \\ + 6qrt & - 6qrv & + 7rſt & + 2r^3ſ & + 3ſtt & + t^3 \\ - 18qqv & - 6rrt & + 3rrv & & + qrſt & + rrſt \\ - 6qſſ & + 8rſſ & + qqrt & & + 3qrrv & - r^3v \\ - 6rrſ & - 2qqrſ & - 4q^3v & & - 9rtv & \\ + 2q^3ſ & + 2qr^3 & + qqſſ & & - r^3t & \\ + 54ſv & - 18tv & + 18qſv & & - rrſſ & \\ & & - 4ſ^3 & & & \\ & & - 2qrrſ & & & \\ & & - r^4 & & & \\ & & - 27vv & & & \end{array}$$

Hæc autem æquatio ea eſt, quæ juxta Regulam erat quærenda, nempe in qua y deſignat quantitatem ſecundi Termini hujus æquationis $xx + yx + w \propto 0$, quæ una eſt duarum, ex quarum multiplicatione Propoſita ſupponitur eſſe producta, quæque pauciores habet dimenſiones.

Nunc verò inquirendum reſtat, num hæc æquatio diviſibilis ſit per $y +$ vel $-$ aliquo diviſore ultimi Termini $- qrtt + t^3 + rrſt - r^3v$; Si enim diviſibilis ſit, erit quoque w cognita, poterit-

teritque Propoſita æquatio dividi per $xx + yx + \mathfrak{w} \infty 0$. Invenitur namque valor ipſius $\mathfrak{w}$ per quartam æquationem

$$sy - ryy + qy^3 + y^5 - 4\mathfrak{w}y^3 - 2q\mathfrak{w}y + 3\mathfrak{w}\mathfrak{w}y + r\mathfrak{w} \infty t$$

$$\mathfrak{w}\mathfrak{w} \infty \begin{array}{l} \frac{4}{3}yy \\ \frac{2}{3}q \\ -\frac{r}{3y} \end{array} \mathfrak{w} + \frac{t}{3y} \; \frac{-s + ry - qyy - y^4}{3}.$$

Vel ipſa inveniri quoque poteſt per 5^{tam}; ut & per 6^{tam}, cùm 5ta per 4^{tam} non eſt diviſibilis.

Quòd ſi jam hæc æquatio 15 dimenſionum non fuerit diviſibilis per $y +$ vel $-$ aliquo diviſore ultimi Termini, poterimus rurſus eodem modo æquationem ejuſdem formæ facere, ſupponendo Propoſitam eſſe productam per multiplicationem duarum aliarum, quæ ſingulæ 3 dimenſiones habeant, inveſtigando æquationem, in quâ incognita quantitas rurſus deſignet quantitatem 2^{di} termini alterutrius harum æquationum. Hæc autem aſcendet ad 20 dimenſiones, ſed ubique parium erit dimenſionum; ita ut hîc diviſio tunc exploranda ſit per incognitæ quantitatis quadratum $+$ vel $-$ aliquo diviſore ultimi Termini.

Haud ſecus ſi Propoſita æquatio ſit 5 aut 4 dimenſionum, atque conſtet ipſam dividi non poſſe per aliam æquationem in qua unus pluréſve Termini deficiant, nec per $x +$ vel $-$ aliquo diviſore ultimi Termini, erit ea diviſibilis per æquationem 2 dimenſionum, in qua omnes Termini extant. Itaque ex hac æquatione 5 dimenſionum

$$x^5 * + qx^3 + rxx + sx + t \infty 0$$

ſi ſolummodo in operatione præcedenti ponamus l & $v \infty 0$, inveniemus

pro $3^{tiâ}$. $ry - qyy - y^4 + 3\mathfrak{w}yy + q\mathfrak{w} - \mathfrak{w}\mathfrak{w} \infty s$,
& pro $4^{tâ}$ $r\mathfrak{w} - q\mathfrak{w}y - y^3\mathfrak{w} + 2\mathfrak{w}\mathfrak{w}y \infty t$.

Per 3^{tiam} autem valor ipſius $\mathfrak{w}\mathfrak{w}$ eſt $\infty ry - qyy - y^4 + 3\mathfrak{w}yy + q\mathfrak{w} - s$, qui valor in locum ipſius $\mathfrak{w}\mathfrak{w}$ ſubſtitutus in 4ta dabit

pro $5^{tâ}$. $\mathfrak{w} \infty \dfrac{-2ryy + 2qy^3 + 2y^5 + 2sy + t}{r + 5y^3 + qy}$.

Porrò ſubrogato hoc valore ubique in locum ipſius $\mathfrak{w}$ in 3^{tia}, obtinebitur

$$\begin{array}{llllllll} y^{10} * + 3q y^8 - r y^7 + 3qq y^6 & - 2qr y^5 & - 2qſ y^4 & + 4ſr y^3 & - 4ſſ yy & - 4ſt y & - tt \infty 0. \\ \quad - 3ſ & + 11t & - rr & + 4qt & + 7rt & + r^3 & - rrſ \\ & & + q^3 & - qqr & + qqſ & + tqq & + tqr \\ & & & & - qrr & & \end{array}$$

Et hæc eſt æquatio quæ inſervit dividendis æquationibus 5 dimenſionum, quæ quærebatur.

Pro æquationibus autem quatuor dimenſionum, utpote $x^4 * + qxx + rx + ſ \infty 0$, concipiendo $k, l, i,$ & $v \infty 0$, invenio

pro $2^{dâ}$. $qy + y^3 - 2wy \infty r$,
& pro $3^{tiâ}$. $qw + yyw - ww \infty ſ$.

Ponendo jam valorem ipſius $w \infty \frac{qy + y^3 - r}{2y}$ in $3^{tiâ}$, obtinebitur

$$\begin{array}{l} y^6 + 2qy^4 + qq\,yy - rr \infty 0. \\ \qquad\qquad\; - 4ſ \end{array}$$

Quæ æquatio erit diviſibilis per yy, + vel − aliquo diviſore ultimi Termini, atque æquatio Propoſita $x^4 * + qxx + rx + ſ \infty 0$ per $xx + yx + w \infty 0$, ut & per $xx - yx + z \infty 0$; hoc eſt,

$$\text{per } xx + yx + \tfrac{1}{2}q + \tfrac{1}{2}yy - \frac{r}{2y} \infty 0,$$

$$\& \; xx - yx + \tfrac{1}{2}q + \tfrac{1}{2}yy + \frac{r}{2y} \infty 0.$$

Ubi notandum, hanc Regulam, quâ omnes reducibiles æquationes Quadrato-quadratæ reduci poſſunt, eſſe planè eandem cum illa, quam D. des Cartes pag. 79, 80, & 81 ſuæ Geometriæ deſcripſit. Nec dubitare poſſim, quin ipſam eodem modo, vel certè non multùm abſimili invenerit; præſertim ſi ea, quæ pagin. 84 in genere de æquationum Reductione docuit, conferantur cum ipſius Methodo ſecantium, & quæ deinceps pag. 49 expoſuit. Adeo ut, judicio meo, ne quidem veriſimile videatur, imprimis ſi concinnam præcedentium cum ſequentibus cohærentiam ſpectemus, ipſum ex ullis aliis authoribus, ut nonnulli opinantur, eam deſumpſiſſe. Quippe pro excellenti, quâ pollebat, animi generoſitate, (ut noviſti & tu & quotquot ejus familiaritate uſi ſunt,) non modò nunquam tantopere animo indulgebat, ſed parvus etiam hic ejus tractatus tam varia profundæ & admirandæ eruditionis ſpecimina ſummique ingenii inventa exhibet,

& quæ

& quæ præ Antiquorum monumentis adeò ſunt generalia, utilia, ac à vulgo remota, ut nemo, qui illum intellexerit atque ipſorum ſcripta cum hujus ſcriptis comparaverit, in haſce cogitationes incidere unquam poſſit; Quemadmodum nemo tam præpoſtero eſt ingenio, ut fulgentem ſolis lucem à micantibus ſtellis derivandam arbitretur. Non tamen hic quicquam Veteribus detractum volo, dum eos micantibus ſtellis aſſimilo; credo enim ſtellas dari, quæ in ſe ſint ipſo etiam ſole majores ac fulgidiores, quanquam non quidem noſtrûm reſpectu, qui terram inhabitamus. Namque inter illos, Archimedes imprimis ac Diophantus, multique alii, qui ſuperiori & hoc noſtro ſæculo vixerunt, viri celebres, magni certè apud me nominis & æſtimationis ſunt, ac ſuis etiam monumentis immortalem in omnes Poſteros nominis gloriam promeritos lubentiſſimè fateor. At majorem poſt illos lucem mundo exortam eſſe, ipſi etiam, ſi reviviſcerent, in noſtro Carteſio non tantùm agnoſcerent, ſed etiam ſibi ex ejus lumine majus lumen accendere ſatagerent, aliosque ut illo potiùs, quàm ſuo uterentur, monerent: quia non modò jucundiùs ſed tutiùs etiam in ſolis lumine vivitur, & per compendioſiores vias ad multò plura objecta pervenitur, eaque multò luculentiùs ac diſtinctiùs quàm in ſtellarum lumine oculis patent. Sed quid nudam veritatem tot verbis palliare conor, idque apud te, qui incomparabilem illum Virum, non tantùm ex ipſius ſcriptis, ſed præſertim ex intima familiaritate, quæ tibi cum eo à multis retrò annis interceſſit, penitus pernoviſti, quemque interea non ſemel maximo cum ſtupore admiratus es, cum videres eum quæſtiones in Matheſi difficillimas è veſtigio tantâ promptitudine reſolvere, ac ſi non difficiliores, quàm omnium facillimæ, ipſi fuiſſent, quæ nihilominus à præſtantiſſimis etiam Mathematicis in ea uſque tempora aut non, aut non niſi maximâ cum perplexitate inveniri potuerant. Et cum te pœniteat, (uti aliquando coram ipſe faſſus es) quòd non omnia, quæ ullo unquam tempore ex ejus ore emanarunt, fideliter chartis mandata cuſtodieris, id mihi ſatis amplum teſtimonium eſt, unde certus ſim, tibi, ut mihi, ne quidem veriſimile fieri poſſe, Illum hanc Reductionis Regulam ex aliorum ſcriptis ad ſe potiùs tranſtuliſſe, quàm ex propriis fundamentis, fœcundiſſimis illis omnium ſcientiarum ſeminariis, eruiſſe atque inveniſſe. Sed de his ſatis.

Jam ad Regulam revertar, & paucis innuam, quòd ex operatione hîc factâ eluceat generalis Methodus tollendi ordine omnes, quæ quidem poſſunt, quantitates incognitas, vel eas quæ ut incognitæ conſiderantur; quod, meo quidem judicio, magni uſus eſt, cum ſæpenumero quæſtiones difficiliores, unam tantùm incognitam quantitatem ſupponendo, aut non reſolvi poſſe, aut multo majori labore, aut certè ad eas reſolvendas alias vias quàm hactenus imitari conſuevimus ineundas eſſe, deprehenderim; quod etiam Carteſium noſtrum non latuiſſe ex pag. 4, aliiſque paſſim locis luculenter conſtat. quod nihilominus haud ita pridem ab inſigni Mathematico in dubium revocari comperi, cujus rei cauſam hanc conjicio, quòd in aliorum ſcriptis magis quàm in hujus verſatus fuerit. Dixi autem hâc Methodo tolli eas quantitates, quæ quidem tolli poſſunt: non enim ſemper omnes poſſunt, neque etiam unâ exceptâ, neque duabus, &c. Nam ſi quæſtio non ſit Theorema, omnes tolli nequeunt; & ſi determinata ſit, omnes unâ exceptâ tolli poſſunt; ſi verò una deficiat conditio, quò minùs determinata exiſtat, omnes tolli queunt duabus exceptis, & ſic deinceps, ut noſti. Neque, quod ſedulò obſervo, etiam ſemper per quamlibet æquationem una quantitas incognita tolli poteſt. Exempli gratiâ, in duabus hiſce æquationibus

$$\begin{array}{llll} x^3 - 3zxx & + bbx & - zzb & \infty\, 0, \\ & + bz & - zbb & \\ & + 2zz & & \end{array}$$

&

$$\begin{array}{llll} x^3 - 4zxx & + zbx & - 2zzb & \infty\, 0, \\ & + 4zz & - 2zbb & \\ & + bb & & \end{array}$$

in quibus x & z duas incognitas quantitates deſignant, poteſt x vel z per neutram ex altera tolli. Quod, ubi accidit, indicio eſt, Problema, è quo hæ duæ æquationes fuerunt deductæ, ſi omnes ejus conditiones includant, non determinatum eſſe, atque unam in eo conditionem, ut prorſus determinatum ſit, deficere. Non rarò etiam licet in reſolvendo aliquo Problemate determinato diverſas invenire æquationes, unam eandemque incognitam quantitatem habentes, idque magno cum emolumento. Sed de his aliàs.

Porrò quomodo eaſdem Regulas aliâ adhuc Methodo inveniam, breviter adjungam.

Sit

Sit æquatio Propoſita, ut ante,

$$x^6 * + qx^4 + rx^3 + ſxx + tx + v \propto 0,$$

& inquiratur num dividi poſſit per æquationem duarum dimenſionum cui nullus terminus deſit, pone per $xx + yx + w \propto 0$. ſi itaque per eam diviſibilis ſit, erit $xx \propto -yx - w$, quo valore ipſius xx, ubique in locum xx ſubrogato, reſultabit æquatio in qua x unam tantùm habebit dimenſionem, nimirum

$$\begin{array}{ll} -3wwyx & -w^3 \\ -y^5 & -wy^4 \\ +4wy^3 & +3wwyy \\ -qy^3 & +qww \\ +2qwy & +rwy \\ -rw & -ſw \\ +yyr & -qwyy \\ -ſy & +v \\ +t & \end{array} \propto 0,$$

Deinde pono ſingulos terminos $\propto 0$, adeò ut tum habeas has duas æquationes,

$$-3wwy - y^5 \&c. \propto 0. \quad \&, \quad -w^3 - wy^4 \&c. \propto 0.$$

eaſdem quæ præcedentes 4ta & 5ta; Ita ut w, eodem quo ibi modo, ablatâ, eandem tandem æquationem nanciſcaris $y^{15} * + 4qy^{13}$, &c. $\propto 0$

Eodem modo ſe res habet in reliquis.

Illud verò notandum eſt, hanc poſitionem $xx - yx - w \propto 0$ ſeu $xx \propto yx + w$ paulò faciliorem reddere operationem, cum in ſubrogatione valoris ipſius xx non opùs ſit ut ſigna mutentur, quod alioqui ſecundùm priorem poſitionem $xx + yx + w \propto 0$ contingit: Itaque hæc pro illa potiùs eſt eligenda. Et quod hanc non elegerim, ideo factum eſt, ut idem effectus utriuſque methodi evidentiùs pateret. Eodem modo, ſi præcedens æquatio inquirenda eſſet, num dividi poſſet per æquationem trium dimenſionum, in qua nullus terminus deficiat, ponerem illam $x^3 \propto yxx + wx + z$, ſed non $x^3 + yxx + wx + z \propto 0$, quemadmodum, ſi aliam Methodum ſequerer, facturus eſſem.

Supervacaneum verò eſt me dicere, has tres præcedentes Regulas æquationum 6, 5, & 4^{or} dimenſionum, (quamvis illæ tanquam exemplum generalis Regulæ in medium allata ſint) ſe extendere ad omnes caſus: nam cum q denotet quantitatem cognitam tertii termini Propoſitæ æquationis, affectam ſuis ſignis $+$ & $-$; manifeſtum eſt in Regulis valorem ipſius q tantùm ſubrogandum eſſe in locum q; vel ſi fortè tertius hic terminus in æquatione deficiat, omnes quantitates per q multiplicatas, cum etiam tum ſint $\propto 0$, delendas eſſe: ita quoque ſe res habet in r, $ſ$, & t. Verbi gratiâ, ſi hæc æquatio 5 dimenſionum $x^5 * * + 6xx - 25x - 39 \propto 0$ diviſibilis eſſet per rationalem duarum dimenſionum, in qua nullus terminus deeſt; Oportet, cum in hac æquatione q ſit $\propto 0$, $r \propto 6$, $ſ \propto -25$, $t \propto -39$, loco hujus $y^{10} * + 3qy^8 - ry^7$ &c. $\propto 0$, ſcribere hanc $y^{10} * * - 6y^7 + 75y^6 - 429y^5 - 36y^4 - 600y^3 - 4138yy - 3684y - 621 \propto 0$. quâ y invenitur $\propto -1$, ideoque $w \propto \frac{-2ryy + 2qy^3 \text{ \&c.}}{r + 5y^3 + qy} \propto -3$; & pro $xx + yx + w \propto 0$, hæc $xx - 1x - 3 \propto 0$, per quam Propoſita æquatio erit diviſibilis. atque ita in reliquis. Adeò ut hinc pateat, ſicut etiam in 17ma aliiſque Regulis, quomodo omnes caſus æquationum æqualium dimenſionum, ſive aliqui termini deſint, ſive non, vel quo tandem modo ſignis $+$ & $-$ affecti ſint, ſub una eademque Regula comprehendi poſſint, adeò ut ſexcenti ejuſmodi caſus ad unum referri & multi labores reſcindi queant. Quod ſatis ſuperque Regula æquationum 4 dimenſionum, cum omnibus caſibus, quos aliqui elaborarunt, comparata, immenſuſque labor, quem illis hoc negotium peperit, demonſtrant; præſertim ſi eâdem ratione omnes caſus æquationum 5 & 6 dimenſionum deſcribere vellent.

Denique notandum, cùm dico, primùm inquirendum eſſe num æquatio Propoſita dividi poſſit per aliam in qua omnes termini non extant, non adeò rigidè illud ſequendum eſſe; non enim id neceſſarium, ſed plerumque breviſſima via eſt ad æquationem Propoſitam reducendam.

XX REGULA,

Qua modum docet reduçendi omnem æquationem rationalem

nalem 4 dimenſionum, fractioneſq; carentem, 2^{dο} verò termino, ſi adſit, manente, ad aliam trium, & hanc iterum, ſi fieri poteſt, ad alias pauciorum dimenſionum.

Poſtquam exploratum eſt æquationem Propoſitam non eſſe diviſibilem per aliam, duos duntaxat terminos habentem, inveniendus eſt valor hujus æquationis

$$\begin{array}{l} y^3 - qyy - 4ſy - ſpp \propto 0. \\ \qquad\;\; + pr \;\; + 4qſ \\ \qquad\qquad\quad - rr \end{array}$$

ubi p deſignat quantitatem cognitam, ſuis ſignis + vel — adfectam 2^{di} termini; q, tertii; r, quarti; $ſ$, quinti. Invento autem valore ipſius y, poterit æquatio Propoſita ejuſdem ope dividi in duas æquationes ſequentes, quæ ſingulæ duas dimenſiones habent, nimirum in

$$xx + \tfrac{1}{2}px + \sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y}\ \text{in}\ x, + \tfrac{1}{2}y + \frac{\tfrac{1}{2}yp - r}{2\sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y}} \propto 0.$$

$$\&\ xx + \tfrac{1}{2}px - \sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y}\ \text{in}\ x, + \tfrac{1}{2}y - \frac{\tfrac{1}{2}yp - r}{2\sqrt{\tfrac{1}{4}pp - q + y}} \propto 0.$$

Quòd ſi verò valor ipſius y non ſit æqualis alicui ex diviſoribus ultimi termini $-ſpp + 4qſ - rr$, non poterit æquatio Propoſita ulteriùs quàm ad tres dimenſiones reduci.

Exempli gratia, ſi reducere velimus æquationem $x^4 - 2x^3 - 2xx - 2x + 1 \propto 0$, quæ per æquationem, duos ſolummodo terminos habentem, eſt indiviſibilis, invenio

$$\begin{array}{l} y^3 - qyy - 4ſy - ſpp \propto y^3 + 2yy * - 16 \propto 0. \\ \qquad\;\; + pr \;\; + 4qſ \\ \qquad\qquad\quad - rr \end{array}$$

(nam $p \propto -2$; $q \propto -2$; $r \propto -2$; $ſ \propto 1$). quæ dividi poteſt per $y - 2 \propto 0$, ita ut loco duarum æquationum habeantur hæ duæ

$$\begin{array}{l} xx - 1x + 1 \propto 0, \\ \quad + \sqrt{5} \end{array} \quad \& \quad \begin{array}{l} xx - 1x + 1 \propto 0. \\ \quad - \sqrt{5} \end{array}$$

Eodem modo ſi habeatur æquatio $x^4 ** - 12x - 5 \propto 0$, obtineo

tinco $y^3 * + 20y - 144 \propto 0$, pro $\begin{array}{l} y^3 - qyy - 4sy - spp \propto 0 \\ \qquad\quad + pr \;\; + 4qs \\ \qquad\qquad\quad - rr \end{array}$

(nam $p \propto 0$, $q \propto 0$, $r \propto -12$, $s \propto -5$.) quæ diviſibilis eſt per $y - 4 \propto 0$, ita ut loco duarum æquationum habeas has duas

$$xx + 2x + 5 \propto 0,$$
$$\& \; xx - 2x - 1 \propto 0.$$

Similiter ſi proponatur æquatio literalis

$\begin{array}{l} x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \propto 0 \\ \qquad\qquad\; - cc \end{array}$, erit $p \propto -2a$;

$q \propto 2aa - cc$; $r \propto -2a^3$; $s \propto a^4$, ideoque in locum æquationis $\begin{array}{l} y^3 - qyy - 4sy - spp \propto 0 \\ \quad + pr \;\; + 4qs \\ \qquad\quad - rr \end{array}$, ſcribenda $\begin{array}{l} y^3 - 2aayy * - 4a^4cc \propto 0, \\ \qquad + cc \end{array}$

quæ dividi poteſt per $y - 2aa \propto 0$, ita ut loco duarum æquationum habeantur hæ duæ

$$xx - ax + x\sqrt{aa + cc}, + aa \propto 0,$$
$$\& \; xx - ax - x\sqrt{aa + cc}, + aa \propto 0.$$

Si verò hæ æquationes per $y +$ vel $-$ aliquo diviſore ultimi Termini non fuiſſent diviſibiles, non potuiſſent etiam æquationes Propoſitæ ulteriùs quàm ad 3 dimenſiones reduci.

XXI REGULA.

Hactenus Regulæ, quas tradidi, reſpexerunt æquationes, in quibus una tantùm incognita quantitas, quam x nominavi, inveniebatur, ut meos conceptus diſtinctiùs exprimerem. Jam uno adhuc verbo adjiciam: *Quòd in Propoſita æquatione quamlibet cognitam pro incognita & vice verſa quamlibet incognitam pro cognita reſpectu Reductionis conſiderare liceat; & quòd ſæpe compendio ſit incognitam tanquam cognitam & unam ex cognitis tanquam incognitam conſiderare & ſic Reductionem inquirere.* Nam primò in omnibus æquationibus, quæ ex duabus rationalibus oriri poſſunt, æquè per quamlibet cognitam, eam tanquam incognitam conſiderando, quàm per incognitam reductio inveniri poteſt, & ſæpe etiam breviùs, ſi ex ſolis irrationalibus produci poſſunt. Dein quòd hoc ſæpe compendio ſit, vel hinc

hinc manifeſtum fit, quia rarò admodum omnes literæ eundem dimenſionum numerum habent, atque adeò, ſi aliquam ex cognitis pro incognita conſideres, ſæpe quoque aliqua æquatio exſurget, quæ pauciorum ſit dimenſionum quàm Propoſita; & adhuc pauciorum, ſi etiam inter ipſas cognitas delectum inſtituas; aut ſaltem reductio hoc vel illo modo facilior evadet.

Conſiderando itaque omnes ſine diſcrimine literas ut cognitas, ejuſmodi ex illis eligere & pro incognita ſupponere integrum erit, quæ ad reductionem facillimè expediendam (per præcedentes Regulas) maximè conducere judicabitur. Et hæc omnium, quas tradidi, Regularum, reſpectu Reductionum, utiliſſima eſt.

Et per eam non tantùm Reductiones ultimarum æquationum, quæ omnes Propoſiti Problematis conditiones includunt, ope Regularum ſupra explicatarum ſæpe compendioſiſſimè invehiuntur, ſed etiam priuſquam ad ultimam deveniatur, quam plurimæ reductiones reſcindi & ſimpliciſſimæ ſæpe æquationes haberi poſſunt. Et quidem operæ pretium foret, rem hanc aliquot exemplis clariorem reddere, ſed ne te atque etiam me diutiùs remorer, unum tantùm & alterum exemplum adjungam.

Quo modo reducere poſſis omnem rationalem æquationem; quæ per aliam rationalem, non cognitis ultimi Termini diviſoribus, dividi queat, remanente etiam, ſi placet, omni fractione, quæ in illa reperitur; nimirùm, ſi in æquatione illa aliqua litera, ſive cognita, ſive incognita reperiatur, ſecundùm quam æquatio ordinata non plures quàm quatuor dimenſiones habeat; ſeu in qua litera aliqua reperitur non plures habens quàm 1, vel 1 & 2, vel 1, 2, & 3, vel 1, 2, 3 & 4 dimenſiones, vel etiam plures, ſed quæ ex his derivari poſſint: Id quod ſemper ex inveſtigatione valoris hujus literæ, quæ vel incognita eſt, vel ut incognita conſideratur, innoteſcit, uno tantùm caſu excepto, quem poſtea indicabo.

1 *Exemplum*, in quo litera b ubique unam tan-
tùm dimenſionem habet.

Eſto æquatio Propoſita $\begin{array}{l} x^4 - 2ax^3 + aaxx + a^3x - a^4 \infty 0 \\ \quad\;\; + b \quad\;\; - ab \qquad\quad + ba^3 \end{array}$

Ergo $bx^3 - abxx + ba^3 \infty - x^4 + 2ax^3 - aaxx - a^3x + a^4$

div. per $x^3 - axx + a^3$. fit $b \infty - x + a$

& $x - a + b, \infty 0$. Æquatio, per quam Propoſita dividi poteſt.

2 *Exemplum.*

Eſto æquatio Propoſita $\begin{array}{l} x^3 - 20bxx + 60aax - 120a^3 \infty 0 \\ \quad\;\; - 2a \qquad + 70ab \quad - 60aab \end{array}$

Ergo $-20bxx + 70abx - 60aab \infty - x^3 + 2axx - 60aax + 120a^3$

div. per $-20xx + 70ax - 60aa$. fit $b \infty \frac{-x^3 + 2axx - 60aax + 120a^3}{-20xx + 70ax - 60aa}$. Hujus autem maximus communis diviſor, per Methodum ante deſcriptam, eſt $x - 2a$, per quem ſi fractio abbrevietur,

fiet $b \infty \frac{-xx - 60aa}{-20x + 30a}$, vel $\frac{xx + 60aa}{20x - 30a}$

ſeu, quod idem eſt, $\begin{array}{l} xx - 20bx + 30ab \infty 0. \\ \qquad\qquad\quad + 60aa \end{array}$ Ita ut æquatio Propoſita in hanc, & præcedentem $x - 2a \infty 0$ diviſa ſit.

3 *Exemplum*, in quo quantitas c tantùm
1 & 2 habet dimenſiones.

Eſto æquatio Propoſita $\begin{array}{l} x^4 * + 8acxx - 4aacx + 12aacc \infty 0 \\ \qquad\; - aa \end{array}$

Ergo $\begin{array}{l} 12aacc \infty - 8axxc - x^4 \\ \qquad\qquad + 4aaxc + aaxx \end{array}$

div. per $12aa$. fit $cc \infty \frac{4ax - 8xx}{12a}$ in c, $+ \frac{aaxx - x^4}{12aa}$

Unde extractâ radice invenietur

$c \infty \frac{ax - xx}{2a}$, hoc eſt, $xx - ax + 2ac \infty 0$

vel $c \infty \frac{-ax - xx}{6a}$, hoc eſt, $xx + ax + 6ac \infty 0$.

Ita ut æquatio Propoſita in haſce duas ſit diviſa. Quoniam au-
tem

Digitized by Google

tem in ea a quoque 1 & 2 tantùm dimenſiones habet, potuiſſet idem etiam quærendo valorem ipſius a inveſtigari.

Ubi notari poteſt, quòd, ad inveniendas radices alicujus æquationis, in quâ litera, cujus valor quæritur, non plures habet dimenſiones quàm 1 & 2, vel 2 & 4, vel 3 & 6, &c. ſcire non ſit neceſſe, cujuſnam illa ſequentium formularum exiſtat.

$$xx - ax + bc \infty 0$$
$$xx + ax + bc \infty 0$$
$$xx + ax - bc \infty 0$$
$$xx - ax - bc \infty 0.$$

Etenim poſitâ $xx, px, q \infty 0$, ſi px ſtatuatur pro 2do, & q pro ultimo termino, erit ſemper $x \infty \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q} \infty 0$.

4 *Exemplum.*

Porrò quoniam æquationes omnes quatuor dimenſionum reduci poſſunt ad æquationes trium dimenſionum, & in omnibus quidem æquationibus ſecundus terminus tolli poteſt, oſtendendum ſolummodo reſtat, quo pacto diviſores æquationis inveniri queant, in quâ incognita quantitas, vel alia quævis litera, quæ ut incognita conſideratur, tantùm 1 & 3 dimenſiones habet. In quem itaque finem proponatur æquatio $x^3 \infty * qx . r$.

In qua x deſignet quantitatem, cujus valor quæritur; q & r autem quantitates cum ſuis ſignis, quales illæ in æquatione reperiuntur.

Eſto etiam $x \infty y + z$

Eritque $x^3 \infty y^3 + 3zyy + 3zzy + z^3 \infty q\, x + r$.

Ex has autem æquatione fiant jam duæ aliæ, ponendo

$3zyy + 3zzy \infty qx$, & $y^3 + z^3 \infty r$

div. per $y+z$. fit $3zy \infty q$ vel $y^3 \infty r - z^3$

$$y \infty \frac{\frac{1}{3}q}{z}$$

$$y^3 \infty \frac{\frac{1}{27}q^3}{z^3} \infty r - z^3$$

$$z^3 \infty \frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3},$$

& $y^3 \infty \frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}$, quia $y^3 \infty r - z^3$

vel $y \infty \frac{\frac{1}{3}q}{\sqrt{C.\,\frac{1}{2}r \; 8 \; \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}}$, quia $y \infty \frac{\frac{1}{3}q}{z}$

& $x \infty \sqrt{C.\,\frac{1}{2}r \; 8 \; \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}, + \sqrt{C.\,\frac{1}{2}r \; 8 \; \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}$, quia $x \infty z + y$

vel $x \infty \sqrt{C.\,\frac{1}{2}r \; 8 \; \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}, + \frac{\frac{1}{3}q}{\sqrt{C.\,\frac{1}{2}r \; 8 \; \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}}$.

Quoniam verò in prima parte prioris valoris ipſius x reperitur ſignum 8, & in ſecunda ſignum contrarium 8, atque quantitates per ea conjunctæ omnino eædem exiſtunt; & quoniam ad obtinendum valorem ipſius x, duæ illæ partes ſimul addi debent; poterunt ipſa determinari, ponendo pro uno +, & pro altero —, ita ut habeatur

$$x \infty \sqrt{C.\,\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}} + \sqrt{C.\,\frac{1}{2}r - \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}},$$

$$\text{vel } x \infty \sqrt{C.\,\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}} + \frac{\frac{1}{3}q}{\sqrt{C.\,\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}}}.$$

Quocirca quærendo juxta hanc Regulam valorem quantitatis x, licebit ipſius beneficio æquationem, ſi reducibilis ſit, in duas rationales dividere: quoniam tunc $\sqrt{C.}$ ex $\frac{1}{2}r + \sqrt{\frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3}$ extrahi poterit, excepto tantùm, quando quantitate q ſigno + adfectâ, $\frac{1}{4}rr$ minor eſt quàm $\frac{1}{27}q^3$.

Ubi difficultas aliqua ſupereſſe videtur in radicis Cubicæ ex binomiis hiſce extractione; ſed cum $\sqrt{C.}$ ex binomio numerali ope Regulæ pag. 389 extrahi queat, poterit etiam ejuſdem beneficio radix ex binomio literali inveniri, cum pro literis numeros ad arbitrium aſſumere liceat, &c.

Quanquam autem ſæpenumero in reducendis æquationibus hujus quarti exempli contingat, ut Quæſitum per aliquam ex aliis Regulis faciliùs inveniatur, poterit tamen interdum hæc Regula, præſertim in æquationibus numeralibus, ubi diviſores ultimi Termini complures exiſtunt aut difficiles ſunt inventu, cum fructu uſurpari.

Quibus præmiſſis, potero generalem Regulam commodiùs exprimere, quæ talis eſt:

Si in æquatione Propoſita, quæ in duas alias rationales eſt diviſibilis, quæratur valor quanticatis incognitæ

vel

vel alicujus alterius, quæ ut incognita conſideratur, poterimus ipſam aut dividere (ſicut in 1mo exemplo); aut fractionem inde ortam per communem aliquem diviſorem abbreviare (ſicut in 2do exemplo); aut denique radicem quadratam (ſicut in 3^tio exemplo) aut radicem cubicam extrahere, excepto tantùm, ut diximus, uno caſu, ubi q deſignat quantitatem ſigno $+$ adfectam, exiſtente $\frac{1}{4}rr$ minore quàm $\frac{1}{27}q^3$.

Ubi tandem id advertendum, Regulam hanc in reſolvendis æquationibus trium & quatuor dimenſionum eandem eſſe cum illa Cardani, cujus inventionem Scipioni Ferreo tribuit; ita ut ex ſuperiori calculo manifeſtum ſit quòd ea Regula, quamvis ille author ex alio fortè fundamento eam eruerit, hoc tamen etiam modo inveniri poſſit. Hanc verò eandem eſſe, vel hinc evidens fit, ſi ex illa ſola conficiamus haſce quatuor: quippe ponendo quantitates q & r ſigno $+$ adfectas eſſe, obtinebimus, exiſtente $x^3 \infty + qx + r$,

$$x \infty \sqrt{C.\, \tfrac{1}{2}r + \sqrt{\tfrac{1}{4}rr - \tfrac{1}{27}q^3}},\ + \sqrt{C.\, \tfrac{1}{2}r - \sqrt{\tfrac{1}{4}rr - \tfrac{1}{27}q^3}}.$$

Si q deſignet quantitatem ſigno $+$, r autem quantitatem ſigno $-$ adfectam, obtinebimus, exiſtente $x^3 \infty + qx - r$, (mutando tantùm in Regula ſigna, quæ ipſi r impares dimenſiones habenti præfiguntur)

$$x \infty \sqrt{C. - \tfrac{1}{2}r + \sqrt{\tfrac{1}{4}rr - \tfrac{1}{27}q^3}},\ + \sqrt{C. - \tfrac{1}{2}r - \sqrt{\tfrac{1}{4}rr - \tfrac{1}{27}q^3}}.$$

Si q deſignet quantitatem ſigno $-$, & r ſigno $+$ adfectam, obtinebimus, exiſtente $x^3 \infty - qx + r$, (mutando ſigna, quæ ipſi q impares dimenſiones habenti præfiguntur)

$$x \infty \sqrt{C.\, \tfrac{1}{2}r + \sqrt{\tfrac{1}{4}rr + \tfrac{1}{27}q^3}},\ + \sqrt{C.\, \tfrac{1}{2}r - \sqrt{\tfrac{1}{4}rr + \tfrac{1}{27}q^3}}.$$

Denique ſi q & r ſigno $-$ ſint adfectæ, obtinebimus, exiſtente $x^3 \infty - qx - r$, (mutando ſigna, ut ſupra)

$$x \infty \sqrt{C. - \tfrac{1}{2}r + \sqrt{\tfrac{1}{4}rr + \tfrac{1}{27}q^3}},\ + \sqrt{C. - \tfrac{1}{2}r - \sqrt{\tfrac{1}{4}rr + \tfrac{1}{27}q^3}}.$$

Et nota, quòd eodem modo operando ſimiles regulæ pro altioribus æquationibus inveniri poſſint.

2. Sed cum Methodus hæc reducendarum æquationum, ubi incognita quantitas, vel quæ ut incognita conſideratur, trium vel

quatuor dimenſionum eſt, aliquando paulò longior ſit, præſtat tum ejus loco vigeſimâ Regulâ uti, per quam omnes caſus trium vel quatuor dimenſionum, nullo excepto, reduci poſſunt; Vel etiam regulâ 17, ubi non adſtringeris æquationibus quatuor dimenſionum, ſed omnes rationales, quæ per aliquam rationalem æquationem dividi queunt, reducere poteris, atque adeò etiam omnem. Propoſitam rationalem æquationem, quæ per aliquam rationalem diviſibilis eſt, ſi modo aliqua litera, quam libuerit, tanquam incognita, & reliquæ omnes ut cognitæ conſiderentur.

3. Sæpe autem ſatis breviter Reductio æquationum, quæ tantummodo per irrationales reduci poſſunt, inveniri poteſt. exempli gratiâ, ſi habeas hanc æquationem,

$$\begin{array}{l} x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \propto 0 \\ \qquad\qquad\quad - cc \end{array}$$

$$\text{vel } \overline{x^4 - 2ax^3 + 2aaxx - 2a^3x + a^4 \propto ccxx}$$

addas utrimque quantitatem aliquam per xx multiplicatam, (cum ab altera parte habeas cc in xx) talem nempe ut $\surd$ quadrata ex altera parte extrahi poſſit, quod ſtatim per extractionem reperies eſſe $+ aaxx$, ideoque utrimque hac $+ aaxx$ addita, & radice quadrata extractâ invenies

$$xx - ax + aa \propto x\sqrt{aa + cc}$$

atque ideo Propoſita æquatio ex multiplicatione duarum ſequentium æquationum reſultare poterit

$$\begin{array}{l} xx - ax \qquad + aa \propto 0. \\ \quad - \sqrt{aa + cc} \\ xx - ax \qquad + aa \propto 0. \\ \quad + \sqrt{aa + cc} \end{array}$$

4. Magnum quoque uſum habent aliæ quædam Regulæ, tam in reducenda æquatione, quæ per rationales, quàm quæ tantummodo per irrationales reduci poſſunt. ex. gr. per 11 Regulam, omnes æquationes reduci poterunt, quæ non tantùm ex duabus aliis per multiplicationem produci poſſunt, in quarum alterutra, unus pluréſve termini deficiunt, ſi æquatio conſideretur ſecundùm incognitam quantitatem, ſed etiam ſi tantùm quævis alia litera, ſive cognita, ſive incognita, reperitur, quæ ut incognita conſideratur, & æquatio ſecundùm illam in ordinem redacta talis ſit, ut ex duabus aliis produci poſſit, in quarum alterutra unus plu-

pluréſve termini deficiunt. ſic quamvis ſequens æquatio 6 dimenſionum

$$\begin{array}{rlllll} & x^3 & -2axx & +3abx & +6a^3 & \infty\, 0 \\ & & & & +6abb & \\ \text{per} & x^3 & +2axx & +4aax & -4a^3 & \infty\, 0 \\ & & & +2ab & -8b^3 & \\ \hline \end{array}$$

Product. x^6, &c.

produci non poſſit ex duabus aliis, in quarum alterutra unus vel plures termini deficiunt, ſi ſcilicet x ut incognita quantitas conſideretur, poterit tamen ex duabus talibus produci, ſi vel a vel b ut incognita quantitas conſideretur, ut ex æquationibus, ex quibus producta eſt, patet; ac proinde æquatio illa Propoſita per XI Regulam reduci poterit.

Hîc ergo hanc Regulam abrumpam, & celeriori in ſequentibus gradu ad finem, quem jam dudum deſidero, feſtinabo.

Diverſas adhuc alias Regulas in promtu habeo, quas hîc ſimul adjungerem, ſi non aliquid in futurum reſervare animus eſſet: Nimirum inter cæteras una eſt, per quam omnes irrationales radices tam numeralium, quàm literalium æquationum invenio; una per quam omnes æquationes numerales, quæ ex duabus rationalibus produci poſſunt, ad eaſdem reduco, non cognitis diviſoribus ultimi termini; item alia, per quam ſæpe literales æquationes reduco, quæque in eo conſiſtit, quòd unam aut alteram literam ponam ∞ 0, vel ∞ alii alicui quantitati, quam libuerit, & quòd hanc æquationem inde reſultantem priùs reducere coner, & poſtea etiam Propoſitam per hanc. Exempli loco adjungam hanc

REGULAM,

Quâ omnes rationales æquationes, quæ nullas fractiones continent & reduci poſſunt, reducuntur, ſi ponendo unam aut plures literas ∞ 0, aut ∞ alii quam libuerit quantitati, talis inde æquatio reſultet, quæ una tantùm dimenſione minor & irreducibilis ſit.

Ex. gr. habeatur hæc æquatio

$$\begin{array}{llll} x^3 - 5axx & +6bbx & -18abb & \infty\, 0, \\ & -9bc & -9a^3 & \\ & +9aa & +27abc & \end{array}$$

in

in qua ſi a ponatur ∞ 0, exſurgit hæc

$$x^3 + 6bbx - 9bcx \infty 0$$

ſeu $xx + 6bb - 9bc \infty 0$, quæ non poteſt reduci. Regula verò per quam reductionem Propoſitæ æquationis jam inſtituo, talis eſt:

Dividantur per ultimum terminum exortæ æquationis, ſi non ex diverſis partibus aut Membris conſtet, (partes aut Membra eas nomino quantitates, quæ in eodem termino ſignis + vel — cæteris connectuntur) *vel aliàs per unum membrum ultimi termini quodcunque libuerit*, (quemadmodum hîc per $+6bb$, vel $-9bc$) *omnia Membra ultimi termini Propoſitæ æquationis, quæcunque per illud dividi poſſunt, atque illud quotiens, ſive unum ſive plura fuerint, addatur quantitati x, & per hanc ſummam Propoſita æquatio dividi poterit.*

Ut in hoc exemplo, dividendo $-18abb$ per $+6bb$, exſurgit quotiens $-3a$, quod additum ipſi x, quia in Propoſita æquatione inter membra ultimi termini nullum aliud habetur, quod per $+6bb$ ſit diviſibile, exſurgit $x-3a$, quod Propoſitam æquationem dividere poterit. Vel ſi alterum exortæ æquationis Membrum aſſumptum fuiſſet, nimirum $-9bc$, ſimiliter prodiiſſet $-3a$, quia ſolum $+27abc$ inter Membra ultimi termini in Propoſita æquatione reperitur, quod per $-9bc$ dividi poteſt.

Nota, quòd per hanc methodum, dum literam unam aut plures pono ∞ 0, vel ∞ alii alicui quantitati, quam libuerit, non tantùm rationales literalium æquationum radices, ſed etiam irrationales tam literalium quàm numeralium æquationum inveniri poſſint. Nam etiam Regulæ, quarum ope quarundam Cubicarum æquationum radices inveſtigantur, quas Cardanus Authori Scipioni Ferreo adſcribit, hac etiam methodo inveniri poſſunt, quæ alia eſt, quàm quæ in 21 Regula oſtenſa fuit.

Hactenus æquationes abſolutè tantùm conſideravi, nunc ſupereſt, ut eas etiam relativè, quatenus referuntur ad Problema, ex quo educuntur, conſiderem.

Sed priuſquàm hoc aggrediar, pauca quædam de iis Regulis, quas hucuſque tradidi, dicenda reſtant. Illæ verò ſunt duorum generum, quædam enim aliquibus in caſibus docent Propoſitam æqua-

æquationem *vel non eſſe reducibilem*, *vel in quantum*, *vel per quales non ſit reducibilis*, ut Regula 1, 2, 12, 13, & 14. quædam etiam docent, *quo pacto æquationes reduci debeant, quas ſcimus reducibiles eſſe, vel per aliquam in qua aliquis terminus datus, aut* ∞ 0 *eſt*, quales ſunt 9 & 11, *vel per aliquam rationalem*, ut ſunt 16 & 17, *vel deniq; per alias*. Sed quia ſæpe latet, utrum Propoſita æquatio, vel quæ ex Problemate quodam educta eſt, reducibilis ſit, nec ne, ad hoc inquirendum aliquis ordo obſervandus eſt. Et quem harum Regularum reſpectu optimum judico, talis eſt: Inquirerem primò ope priorum Regularum anne æquatio ſit irreducibilis; quod in æquationibus irreducibilibus primo plerumque intuitu apparet, aut ſaltem magna ex parte; adeò ut multi labores tali in caſu præſcindantur. At ſi hoc non ita appareret, tranſirem ad Regulam XI, (imprimis ſi Ultimus æquationis terminus multos diviſores, vel qui inventu difficiles ſint, admittat, vel ſi æquatio ſurdas quaſdam aut fractas quantitates contineat) per quam omnes æquationes reduci poſſunt, quæ diviſibiles ſunt ope alterius in qua una aut plures quantitates deſunt, ſive æquationem in ordinem redigas reſpectu incognitæ, ſive reſpectu alicujus cognitæ, quæ ut incognita conſideratur.

Et ſic omnes pæne literales & reducibiles æquationes, ut & quàm plurimæ numerales reduci poſſunt. Si verò nec hoc pacto ſuccedat Reductio, eam per cæteras Regulas inquirerem.

Poſſunt etiam hîc quædam adjungi de ſignis, ex quibus cognoſcitur ſitne aliqua æquatio reducibilis nec ne; Verùm cum hoc unum ſit ex primariis rei capitibus, plus otii & patientiæ, quàm quidem inpræſentiarum mihi ſuppetit, ad id requiritur.

Quod igitur alteram partem Reductionum concernit, quæ refertur ad Problema, ex quo æquatio eſt deducta, multa adhuc dici poſſent, tam de ultimæ æquationis (in qua omnes Problematis conditiones includuntur) *Inventione*, quâ omnes aut ſaltem multæ Reductiones reſcindi queunt; quàm *de aliis Reductionibus, quæ ſæpe illis ſupra deſcriptis breviores exiſtunt*. Nam quod primum attinet, experientia docet in omnibus ferè Problematis multos eſſe, eoſque diverſos modos ultimam æquationem inveniendi, & ad pauciorum dimenſionum æquationem, ſi hunc, quàm

 ſi alium

Digitized by Google

ſi alium modum ſequaris, perveniendi. Imò non tantum diverſâ, ſed etiam eâdem methodo utendo, tandem in æquationem plurium aut pauciorum dimenſionum pervenies. Atque ita breviori ac faciliori viâ non tantùm multum laboris inveniendo poſtremam æquationem præteribis, ſed etiam reductiones valde inventu difficiles, quæ alioqui, ſi ad altiores æquationes delabaris, quærendæ eſſent, reſcindes.

Quod alterum ſpectat, ejus à me ſpecimen habes, ubi nempe æquationes omnium figurarum ordinatarum circulo inſcriptarum inveniuntur, in eo nempe conſiſtens, quòd cùm ultimam æquationem, quæ omnes Problematis conditiones includit, habeas, præterea adhuc aliam, ſed aliâ methodo, inveſtiges, quæ itidem omnes conditiones comprehendat, adeò ut, cum duas æquationes eandem incognitam quantitatem includentes obtinueris, ipſas à ſe invicem tam diu, quàm fieri poſſit, ſubtrahas, vel quod eodem redit, earum communem diviſorem invenias, quemadmodum tunc in inveniendis illis æquationibus ſatis fuſe oſtendi.

Vide Sectionem XXI tuarum Exercitationum Mathematicarum.

Et hujus Methodi utilitas ſe longè lateque diffundit, præſertim ad Problemata difficiliora, quorum æquationes ad plures dimenſiones excurrunt. Nam ſæpe numero, ſi earum reductionem per præcedentes Regulas inveſtigares, ætatem conſumeres, quod alioquin, ſi hanc viam ſequaris, breviter, & ut ita dicam, uno momento abſolvere poſſes.

Cum igitur utrumque & Reductiones in principio in totum vel ex parte reſcindendi, & eas in multis caſibus adhuc compendioſiùs quàm per præſcriptas Regulas inveniendi, majoris momenti ſit, quàm ut hîc dignè pertractari poſſit; atque ego etiam ſcribendo, tu verò legendo, defeſſi ſimus: præſtat, ut hîc ſubſiſtamus atque aliquantulùm reſpiremus, reliquaque opportuniori tempori reſervemus.

Interim vale & me ama.

Datum Amſteladami Pridie Iduum Julii A° 1657.

JO-

JOHANNIS HUDDENII EPISTOLA SECUNDA, DE MAXIMIS ET MINIMIS.

Clariſſime Vir,

Quod attinet meam Methodum de Maximis & Minimis, eam breviter hîc deſcribere **conabor** ; *& in anteceſſum demonſtrabo hoc*

THEOREMA.

Si in æquatione duæ radices ſint æquales, atque ipſa multiplicetur per Arithmeticam Progreſſionem, quam libuerit; nimirum, primus terminus æquationis per primum terminum Progreſſionis, ſecundus terminus æquationis per ſecundum terminum Progreſſionis, & ſic deinceps: dico Productum fore æquationem, in quâ una dictarum radicum reperietur.

In hunc finem aſſumatur æquatio quælibet, in qua x deſignet quantitatem incognitam, ut, verbi gratiâ, hæc æquatio

$$x^3 + pxx + qx + r \propto 0$$

ipſaque multiplicetur per $xx - 2yx + yy \propto 0$, id eſt, per æquationem, in qua duæ radices ſunt æquales, & habebitur hæc æquatio

$$\left.\begin{array}{l} xx - 2yx + yy \text{ in } x^3 \\ xx - 2yx + yy \text{ in } pxx \\ xx - 2yx + yy \text{ in } qx \\ xx - 2yx + yy \text{ in } r \end{array}\right\} \propto 0.$$

Digitized by Google

In qua etiam duæ radices æquales comprehendentur, videlicet $x \propto y$, ac denuo $x \propto y$. Vel ſi illam multiplicaſſemus per $xx + 2yx + yy \propto 0$, obtinuiſſemus duas falſas radices æquales: utcunque autem hæc multiplicatio fiat, ſi pro y ponatur ejus valor, habebitur

$$\left.\begin{array}{l} xx - 2xx + xx \text{ in } x^3 \\ xx - 2xx + xx \text{ in } pxx \\ xx - 2xx + xx \text{ in } qx \\ xx - 2xx + xx \text{ in } r \end{array}\right\} \propto 0.$$

Si jam unumquodque horum quatuor productorum, ſeu, quod eodem redit, $+1, -2, +1$ (quoniam dividi poteſt per xx, & multiplicatores x^3, pxx, qx, & r nullam mutationem efficiunt) multiplicetur per Arithmeticam Progreſſionem: erit productum hujus multiplicationis $\propto 0$.

Nam

$$\begin{array}{llll} \text{Mult.} & +1, & -2, & +1 \\ \text{per} & a, & a+b, & a+2b \\ \hline \text{fit} & a, & -2a-2b, & +a+2b \\ \text{ſeu} & \multicolumn{3}{l}{+2a-2a, +2b-2b \propto 0.} \end{array} \qquad \begin{array}{llll} \text{Mult.} & +1, & -2, & +1 \\ \text{per} & a, & a-b, & a-2b \\ \hline \text{fit} & a, & -2a+2b, & a-2b \\ \text{ſeu} & \multicolumn{3}{l}{2a-2a, +2b-2b \propto 0.} \end{array}$$

Hucuſque univerſaliter conſideravi omnes æquationes, duas æquales radices habentes, quomodocunque ipſæ proponantur, hoc eſt, ſive in iis termini quidam deſint ſive non, ut & quomodocunque ſigna + & — ſeſe habuerint. Quod manifeſtum erit conſideranti nobis ſolummodo rem eſſe cum hiſce numeris $+1, -2, +1$, non autem cum multiplicatoribus x^3, pxx, qx, & r.

Similiter reſpectu Arithmeticæ Progreſſionis res etiam generalis manet, quandoquidem duo priores termini a, $a+b$, & a, $a-b$ indeterminati ſunt. Quod reſtat, ex ſola inſpectione præcedentis exempli, conferendo duas ſequentes multiplicationes, perſpicuum fiet.

$$\begin{array}{l} x^3 + pxx + qx + r \propto 0 \\ xx - 2xx + xx \quad \propto 0 \\ \hline \left.\begin{array}{l} xx - 2xx + xx \text{ in } x^3 \\ xx - 2xx + xx \text{ in } pxx \\ xx - 2xx + xx \text{ in } qx \\ xx - 2xx + xx \text{ in } r \end{array}\right\} \propto 0. \end{array} \qquad \begin{array}{l} x^3 + pxx + qx + r \propto 0 \\ xx - 2yx + yy \quad \propto 0 \\ \hline \left.\begin{array}{l} x^5 - 2yx^4 + yyx^3 \\ \quad + px^4 - 2pyx^3 + pyyxx \\ \qquad + qx^3 - 2qyxx + qyyx \\ \qquad\quad + r\; xx - 2ryx + ryy \end{array}\right\} \propto 0. \end{array}$$

Mult. per a. $a \pm b$. $a \pm 2b$. $a \pm 3b$. $a \pm 4b$. $a \pm 5b$.

Nam

Nam quoniam hæc producta $x^5 - 2yx^4 + yyx^3$, & $xx - 2xx + xx$ in x^3 eadem exiſtunt, erit etiam $x^5 - 2yx^4 + yyx^3$ multiplicatum per $a, a \, 8 \, b, a \, 8 \, 2b$ æquale o; ſic &c, quoniam $+ px^4 - 2pyx^3 + pyyxx$ idem eſt quod $xx - 2xx + xx$ in pxx, erit quoque $px^4 - 2pyx^3 + pyyxx$ multiplicatum per $a \, 8 \, b$, $a \, 8 \, 2b$, $a \, 8 \, 3b$ (ſiquidem, ut ex præcedentibus liquet, primus terminus Progreſſionis ad libitum ſumi poteſt) æquale o; atque ſic deinceps. Unde fit, ut etiam Productum totius æquationis per hanc ſeriem proportionalium ſit $\propto$ o, nec non ut unus valor ipſius $x \propto y$, quæ una duarum radicum æqualium eſt, neceſſariò includatur. Et cum hîc rurſus nulla habeatur ratio multitudinis aut paucitatis aut etiam qualitatis multiplicatorum: erit Propoſitum Theorema univerſaliter demonſtratum de quibuſcunque æquationibus, duas radices æquales habentibus.

Hinc emanat

Si in æquatione aliqua 3 ſint radices æquales, & ipſa multiplicetur per Arithmeticam Progreſſionem, quam libuerit, eo modo quo jam dictum eſt, remanebunt in Producto duæ adhuc æquales radices iſtarum trium; ac proinde Productum hoc denuo per Arithmeticam Progreſſionem multiplicari poterit. Quòd ſi autem in Propoſita æquatione quatuor radices æquales fuerint, atque ipſa multiplicetur per Arithmeticam Progreſſionem, relinquentur in hoc Producto adhuc 3 æquales radices iſtarum 4, & ſic porrò, quotcunque æquales radices æquatio habuerit, ſemper per ſingulas ejuſmodi multiplicationes una tantùm iſtarum æqualium radicum tolletur.

Hoc itaque demonſtrato, tranſeo ad meam Methodum de Maximis & Minimis, quæ ſic ſe habet.

Poſitis quotcunque quantitatibus Algebraïcis, maximum aut minimum deſignantibus, ponantur ipſæ $\propto z$; & ordinatâ æquatione multiplicetur ea per Progreſſionem Arithmeticam, eo modo, quo dictum eſt; & Pro-

 ductum

ductum erit æquatio, quæ communem cum præcedenti radicem habebit.

Ita ut ad hujus Methodi demonſtrationem tantummodo probandum reſtet, æquationem illam primam duas æquales radices comprehendere. Quod equidem demonſtratu adeò facile eſt, ut huic rei ulteriùs inſiſtere nihil aliud ſit, quàm operam & oleum perdere.

Et hæc quidem generalis mea Methodus eſt. Particulares verò, quas antehac in aliquibus exemplis vidiſti, hinc reſultant; quemadmodum ex ſubjunctis operationibus, utroque modo factis, perſpicere licebit.

1. *Cùm Algebraïci termini, maximum aut minimum deſignantes, non niſi unam incognitam quantitatem continent, & nullas habent fractiones, in quarum denominatore incognita quantitas reperitur,* multiplico tantùm unumquemque terminum per numerum dimenſionum incognitæ quantitatis, neglectis quantitatibus omnibus, in quibus incognita non reperitur, & ſuppono Productum $\infty\, 0$.

Ex. gr. ſit $3ax^3 - bx^3 - \frac{2bba}{3c}x + aab \infty$ alicui maximo.

mult. per $\quad 3 \quad 3 \quad 1$

fit $9ax^3 - 3bx^3 - \frac{2bba}{3c}x \infty 0$, vel $9axx - 3bxx - \frac{2bba}{3c} \infty 0$.

Juxta generalem Methodum erit

$$3ax^3 - bx^3 * - \frac{2bba}{3c}x + aab \infty 0.$$
$$- z$$

mult. per Arithm. Progr. $\quad 3. \quad 3.2. \quad 1. \quad 0.$

& fit, ut ante, $9ax^3 - 3bx^3 * - \frac{2bba}{3c}x \infty 0$, ſeu

$$9axx - 3bxx - \frac{2bba}{3c} \infty 0.$$

2. *Si Algebraïci termini, maximum aut minimum deſignantes, unam tantùm incognitam quantitatem comprehendunt, atque aliquot fractiones admittunt, in quarum denominatore incognita quantitas reperitur,* operatio inſtitui poterit, hoc pacto:

Primò deleo omnes quantitates cognitas. Deinde ſi reliquæ quan-

quantitates non ejuſdem denominationis fuerint, ipſas ſub eundem denominatorem reduco. Quo peracto, conſidero hujus fractionis integrum Numeratorem cum unoquoque Membro ſeu parte ſeparata Denominatoris (ſi ex diverſis partibus conſtet) tanquam unam quantitatem, Maximum aut Minimum deſignantem, ac unumquodque membrum ſeu partem ſeparatam Numeratoris multiplico per dimenſionum numerum quantitatis incognitæ iſtius Membri, poſtquam ab eodem numero eſt ablatus dimenſionum numerus incognitæ quantitatis, qui in hoc Membro Denominatoris reperitur; productoque per hoc Membrum Denominatoris multiplicato, erunt omnia ejuſmodi producta ſimul ∞ o, ut ex ſequentibus exemplis clariùs patebit.

1 *Exemplum.*

Eſto $\frac{4aab^3+5a^3x+x^5}{x^3}-ax+bx+ba \infty$ alicui maximo.

Deletâ quantitate cognitâ ab, reliquiſque terminis ſub communi Denominatore reductis, obtinebitur

$$\frac{4aab^3+5a^3x+x^5-ax^4+bx^4}{x^3}.$$

Mult. num. per $\underline{-3,\ -2,\ +2,\ +1,\ +1}$:

fit $-12aab^3-10a^3x+2x^5-ax^4+bx^4$ mult. per $x^3 \infty$ o.

& dividendo per x^3,

$$-12aab^3-10a^3x+2x^5-ax^4+bx^4 \infty 0.$$

Juxta generalem Methodum

eſt $\frac{4aab^3+5a^3x+x^5}{x^3}-ax+bx+\begin{array}{l}ab\\-z\end{array} \infty$ o,

d eſt, $4aab^3+5a^3x+x^5-ax^4+bx^4+\begin{array}{l}abx^3\\-z\end{array} \infty$ o;

Seu, ordinatâ æquatione, $\begin{array}{l}x^5-ax^4+abx^3 * +5a^3x+4aab^3 \infty 0.\\ \quad\ +b \quad -z\end{array}$

$$\begin{array}{l}\underline{+2,\ +1,\quad 0,\ -1,\ -2,\quad -3}\\ 2x^5-ax^4 \quad * \quad * -10a^3x-12aab^3 \infty 0\\ \quad +b\end{array}$$

2 *Exemplum.*

Eſto $\frac{baax+aaxx-bx^3-x^4}{baa+x^3}-a+x \infty$ alicui maximo.

De-

Deletâ quantitate cognitâ a, & reliquis ſub communi diviſore reductis, habebitur $\frac{2baax + aaxx - bx^3}{baa + x^3}$.

$$\begin{array}{l} \phantom{\text{Porrò pro }} +1,\ +2,\ +3 \\ \text{Porrò pro } \frac{2baax + aaxx - bx^3}{baa}, \text{ ſcribo } {}^{2}baax + {}^{2}aaxx - {}^{3}bx^3 \text{ in } baa \\ \phantom{\text{pro }} -2,\ -1,\ 0 \\ \text{pro } \frac{2baax + aaxx - bx^3}{x^3}, \text{ ſcribo } -{}^{4}baax - aaxx \quad \text{in } x^3 \end{array} \Bigg\} \propto 0$$

$$\text{Diviſis per } aax, \text{ habebitur } \begin{array}{l} 2baa + {}^{2}aax - {}^{3}bxx \text{ in } b \\ -{}^{4}bx - xx \qquad\qquad \text{in } xx \end{array} \Big\} \propto 0$$

adeoque $-x^4 - {}^{4}bx^3 - {}^{3}bbxx + {}^{2}aabx + {}^{2}bbaa \propto 0$.

Sic & ſi fuerit $\frac{2baax + aaxx - bx^3 + a^4}{4x^3 + 2bxx - 3aax - c^3} \propto$ alicui maximo,

$$\left.\begin{array}{ll} \phantom{\text{Pro }} -2,\ -1,\ 0,\ -3 & \\ \text{Pro } \frac{2baax + aaxx - bx^3 + a^4}{4x^3}, & \text{ſcribo } -{}^{4}baax - aaxx - {}^{3}a^4 \text{ in } 4x^3 \\ \phantom{\text{pro }} -1,\ 0,\ +1,\ -2 & \\ \text{pro } \frac{2baax + aaxx - bx^3 + a^4}{2bxx}, & -{}^{2}baax - bx^3 - {}^{2}a^4 \text{ in } 2bxx \\ \phantom{\text{pro }} 0\ +1,\ +2,\ -1 & \\ \text{pro } \frac{2baax + aaxx - bx^3 + a^4}{-3aax}, & +aaxx - {}^{2}bx^3 - a^4 \text{ in } -{}^{3}aax \\ \phantom{\text{pro }} 1,\ 2,\ 3,\ 0 & \\ \text{pro } \frac{2baax + aaxx - bx^3 + a^4}{-c^3}, & +{}^{2}baax + {}^{2}aaxx - {}^{3}bx^3 \text{ in } -c^3 \end{array}\right\} \propto 0.$$

Juxta generalem Methodum

eſt $\frac{2baax + aaxx - bx^3}{baa + x^3} \propto z$

vel $2baax + aaxx - bx^3 \propto baaz + x^3z$

ſeu $-bx^3 + aaxx + 2baax - baaz \propto 0$
$ -z$

Arith. Prog. $\quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0$

$-3bx^3 + 2aaxx + 2baax \propto 0$, hoc eſt,
$-3z$

$$\frac{-3bx^3 + 2aaxx + 2baax}{3x^3} \propto z$$

ac proinde $\frac{2baax + aaxx - bx^3}{baa + x^3} \propto \frac{+2baax + 2aaxx - 3bx^3}{3x^3}$

&, ut ſupra, $x^4 + 4bx^3 + 3bbxx - 2aabx - 2bbaa \propto 0$.

Patet

Patet itaque, duas has ſpeciales Regulas in generali illa Methodo eſſe fundatas reſpectu hujus Progreſſionis 0, 1, 2, 3, 4, &c. multiplicando ſcilicet terminum, in quo incognita quantitas x non reperitur, per 0; ubi x unam habet dimenſionem, per 1; & ſic porrò. Sed in genere notandum, quòd, dum operando juxta generalem Methodum Progreſſionem illam Arithmeticam ad libitum ſumere licet, ſemper is terminus æquationis, quem libuerit, tolli poſſit, multiplicando illum tantùm per 0. Atque ita valor ipſius z per unam Progreſſionem ſimpliciùs obtineri poterit, quàm per aliam: ut, ſi in præcedenti exemplo, ubi multiplicavimus per 3, 2, 1, 0, multiplicaſſemus per 0, 1, 2, 3, obtinuiſſemus $aaxx + 4baax - 3baaz \infty 0$, ſeu $\frac{xx + 4bx}{3b} \infty z$.

Unde apparet, ipſam quantitatem z (ſive maximum vel minimum), ſi x cognita ſupponatur, inveniri atque exprimi poſſe multis diverſis modis, è quibus faciliores pro Conſtructione eligere licebit: Aut ſi z cognita ſupponatur, poterit x totidem diverſis modis inveniri. Porrò conſiderando z & x, ut incognitas, poterimus ad alterutram tollendam æquationem inſtituere inter duos ex ſimpliciſſimis valores: ut, in ſuperiori exemplo, inter $z \infty \frac{-3bxx + 2aax + 2baa}{3xx}$ & $z \infty \frac{xx + 4bx}{3b}$.

3. *Si termini Algebraici, Maximum aut Minimum deſignantes, plures unâ quantitate incognitâ includunt,* ſuppono ipſos ∞z; & per hanc æquationem & per cæteras datas, ſeu quæ ex natura Problematis manant, (quæque ſemper ſimul, ſi omnes Problematis conditiones includunt, tot numero exiſtunt, quot incognitæ quantitates, unâ exceptâ, habentur, nimirum ſi unum tantùm Maximum aut Minimum inter infinitas magnitudines quæritur, non autem inter infinita Maxima;) reduco æquationes omnes ad unam, in qua neceſſariò duæ quantitates incognitæ continebuntur, & inter eas z. Cumque tunc ſola z ad Maximi vel Minimi inventionem nota eſſe debeat, manifeſtum eſt in eum finem duntaxat concipiendum eſſe, alteram quantitatem incognitam duas æquales radices habere.

Sumamus, exempli gratiâ, tres æquationes, quibus maximam latitudinem curvæ determinavi, quales illæ pag. 498 Exercitationum tuarum Mathematicarum reperiuntur; excepto tantùm

quòd Maximum hìc appellem z, & quod ibi z nominatum eſt, hìc appellem v.

$$1^{ma}\ \text{Æq.}\ y^3 - nyx + x^3 \infty 0$$
$$2^{da}\ \text{Æq.}\ v - x \infty y$$
$$3^{tia}\ \text{Æq.}\ \tfrac{1}{2}v - y \infty z\ \text{maximo.}$$

Subſtituto valore ipſius y $2^{dæ}$ æquationis in locum ipſius y $1^{mæ}$ & $3^{tiæ}$, habebitur

$$\text{pro } 1^{ma}\ \text{Æq.}\ v^3 - 3vvx + 3vxx \infty vnx - nxx$$
$$\text{\& pro } 3^{tia}\ \text{Æq.}\ x \infty z + \tfrac{1}{2}v.$$

Subrogato autem valore ipſius x $3^{tiæ}$ æquationis in ejuſdem locum in 1ma, fiet pro

$$1^{ma}\ \text{Æq.}\ \tfrac{1}{4}v^3 + 3vzz \infty \tfrac{1}{4}nvv - nzz.$$
$$\text{vel } \tfrac{1}{4}v^3 - \tfrac{1}{4}nvv + 3zzv + nzz \infty 0.$$

Atque hæc quidem æquatio jam ſola relicta eſt, in qua igitur ut ultimæ conditioni Problematis ſatisfiat, hoc eſt, ut ea ita determinetur, ut z fiat Maximum, multiplico (quemadmodum ibi factum fuit) eandem æquationem

$$\tfrac{1}{4}v^3 - \tfrac{1}{4}nvv + 3zzv + nzz \infty 0$$
per Arith. Progr. $3,\quad 2,\quad 1,\quad 0:$
obtineoque $\tfrac{3}{4}v^3 - \tfrac{1}{2}nvv + 3zzv \quad * \quad \infty 0$
vel $3zz \infty \tfrac{1}{2}nv - \tfrac{3}{4}vv.$

Hinc ſubrogato valore ipſius zz, per hanc æquationem invento, in ejus locum in præcedenti $\tfrac{1}{4}v^3 - \tfrac{1}{4}nvv + 3zzv + nzz \infty 0$, obtinebitur $\tfrac{1}{4}v^3 - \tfrac{1}{4}nvv + \tfrac{1}{2}nvv - \tfrac{3}{4}v^3 + \tfrac{1}{6}nnv - \tfrac{1}{4}nvv \infty 0$

hoc eſt, $-\tfrac{1}{2}v^3 + \tfrac{1}{6}nnv \infty 0$
vel $vv \infty \tfrac{1}{3}nn.$

Si Arithmetica Progreſſio fuiſſet 0, 1, 2, 3, inveniſſemus $3zz \infty \dfrac{nvv}{8v+4n}$; ſi 2, 1, 0, −1, habuiſſemus $3zz \infty \dfrac{\tfrac{3}{2}v^3 - \tfrac{3}{4}vvn}{n}$.

Et ſive valor ipſius zz, per utramlibet harum æquationum inventus, in præcedenti ſubrogetur æquatione $\tfrac{1}{4}v^3 - \tfrac{1}{4}nvv + 3zzv + nzz \infty 0$, ſive alter alteri adæquetur, ponendo $\tfrac{1}{2}nv - \tfrac{3}{4}vv \infty \dfrac{nvv}{8v+4n}$, vel $\infty \dfrac{\tfrac{3}{2}v^3 - \tfrac{3}{4}vvn}{n}$, obtinebitur ſemper $vv \infty \tfrac{1}{3}nn$.

Quamvis autem operationes uno aut alio modo factæ hìc parùm

inter

inter ſe differant, poteſt tamen ſæpe numero, ut ſupra monui, contingere, ut una multo prolixior ac difficilior ſit quàm alia quo quidem caſu commodiorem viam, quæ facilè perſpicitur, eligere ſatius erit.

Cæterùm notandum, ultimam hanc æquationem $\frac{1}{4}v^3 + 3vzz \infty \frac{1}{4}nvv - nzz$ determinari etiam poſſe per ſecundum modum præcedentem. Etenim exiſtente $zz \infty \frac{\frac{1}{4}nvv - \frac{1}{4}v^3}{3v+n}$, & $z \infty$ maximo: erit etiam hic valor ipſius zz omnium maximus, ideoque

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{4}nvv - \frac{2}{4}v^3 \text{ in } 3v \\ \frac{2}{4}nvv - \frac{3}{4}v^3 \text{ in } n \end{array}\right\} \infty\, 0$$

$$\text{div. per } vv.\ \text{vel} \left.\begin{array}{l} \frac{1}{4}n - \frac{2}{4}v \text{ in } 3v \\ \frac{2}{4}n - \frac{3}{4}v \text{ in } n \end{array}\right\} \infty\, 0, \text{ id eſt, } \left.\begin{array}{l} \frac{3}{4}nv - \frac{6}{4}vv \\ \frac{2}{4}nn - \frac{3}{4}nv \end{array}\right\} \infty\, 0$$

$$\text{vel } \frac{2}{4}nn - \frac{6}{4}vv \infty 0$$

$$\text{ſeu } \frac{1}{3}nn \infty vv.$$

Quoniam verò in multis caſibus æquatio ultimò relicta non ſinit ut valor ipſius z vel zz, aut z^3, &c. in ejuſmodi terminis, in quibus ipſe z non invenitur, exprimi poſſit, viſum fuit in exempli hujus operatione generalem Methodum indicare.

Atque hic, Vir Amiciſſime, multa adhuc dicenda reſtarent, ſed ne rurſus epiſtola mea voluminis inſtar ſe extendat, ſcriptionis meæ filum abrumpam; præſertim cum id, quod hic deſideratur, non difficile ſit ex præcedentibus colligere. At verò ne te lateat, quid hic deſiderari putem, adjungam argumentum tractatus, quem de hac materia ante 2 aut 3 annos in proprios uſus adornavi, quemque nuper obiter & quaſi per tranſennam inſpexiſti. In eo autem pertractantur

1. *Methodus de Maximis & Minimis.* Termini verò Algebraici, Maximum vel Minimum deſignantes, conſiderantur
   1. *Vel reſpectu cognitionis noſtræ; ſic ut certi ſimus in iis Maximum eſſe comprehenſum, ſi aliquod detur Maximum; aut Minimum, ſi aliquod Minimum detur.*
      Termini autem hi Algebraici in ſe continent
      - *Vel unam duntaxat incognitam quantitatem*, habentem
        1. *Vel fractionem nullam, in cujus Denominatore incognita reperitur quantitas.*
        2. *Vel fractiones, in quarum Denominatore ipſa reperitur.*
      - *Vel plures unâ incognitâ quantitate*, quæ duplices ſunt
        1. *Vel tot ſimul cum iis æquationes dantur, ſeu in natura Problematis includuntur, quot ſunt incognitæ quantitates unâ exceptâ;*
        2. *Vel non totidem, aut etiam nulla.*
   2. *Vel reſpectu noſtræ inſcientiæ*, id eſt, cùm incerti ſumus, utrum in iis aliquod Maximum aut Minimum, aut utrumque, aut etiam neutrum contineatur. ipſos autem rurſus conſidero vel *abſolutè*, vel *relativè* ad aliquod Problema.
2. *Ejuſdem uſus atque utilitas*, quæ quidem ſe longè lateque extendit, ac præſertim ad ea Problemata, quæ aliàs difficulter ad æquationem revocari poſſunt. Cujus exemplum illuſtre eſt *Determinatio omnium æquationum*, quæ res adeò generalis atque utilis, hujus Methodi tantùm corollarium exiſtit.

Vale, Vir Amiciſſime, & me amare perge

Tui

Dabam Amſteladami
6 Cal. Februar.
A° 1658.

Obſervantiſſimum

JOHANNEM HUDDE.

BIBLIOTHECA ...

FINIS.

Digitized by Google

HENRICI van HEURAET EPISTOLA DE TRANSMUTATIONE CURVARUM LINEARUM IN RECTAS.

Clariſſimo Viro

D. FRANCISCO à SCHOOTEN
HENRICUS van HEURAET
S. D.

CUm nuperrimè ex tuis ad me datis, Vir Clariſſime, intellexerim, deſiderio te teneri videndi Methodum à me inventam, cujus beneficio complures curvæ lineæ (ut tibi indicavit D. Huddenius) *in rectas poſſunt tranſmutari: non omittendum duxi, quin eandem tibi ocyùs tranſmitterem, tuoq; inprimis judicio exponerem. Verùm præmonere te volui, eam à me tunc temporis excogitatam eſſe, cùm iter in Galliam meditarer, quo nec omnia, quæ ea de re dici queunt, perpendere, nec quæ ante diſceſſum inveneram, chartis committere valui. In Gallia verò nunquam rebus Mathematicis vacare, ſed me totum aliis ſtudiis applicare conſtitui, adeò ut vix quicquam prælo dignum me ſcribere poſſe confidam. Attamen ut petitioni tuæ utcunque ſatisfaciam, habitâ ratione temporis, quod mihi valde carum eſt: viſum fuit in memoriam revocare, ac breviter conſcribere, quæ ante circa hanc rem meditatus ſum, eaq; paucis hîc ſubjicere. Quæ, ſi Mathematicis non diſplicitura judices, Commentariis tuis adjungere poteris.*

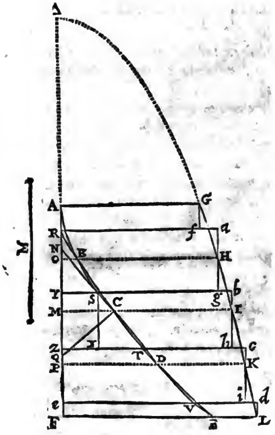
Dat. Salmurii, die 13 Januarii. A° 1659.

Vale, & perge amare
ex aſſe tuum

HENRICUM van HEURAET.

Huddenius *noſter te ſalutat diligenter.*

Si dentur duæ lineæ curvæ, exempli gratiâ, ABCDE, GHIKL, & recta AF, ejus naturæ, ut, (ductâ ex puncto M, in linea AF pro libitu aſſumpto, perpendiculari MI, ſecante datas curvas in C & I, uti & CQ perpendiculari ad curvam ABCDE,) MC ſit ad CQ, ſicut linea aliqua data Σ ad MI: erit ſuperficies AGHIKLF æqualis rectangulo comprehenſo ſub data linea Σ & alia recta æquali curvæ ABCDE.



Dividatur linea AF in partes quotcunque, verbi gratiâ, in punctis O, M, & P, ducanturque perpendiculares OH, MI, PK, ſecantes curvam ABCDE in punctis B, C, & D, at curvam GHIKL in punctis H, I, & K; & per puncta A, B, C, D, & E agantur tangentes, quæ ſibi mutuò occurrant in R, S, T, & V; & per hæc puncta ducantur lineæ R*a*, Y*b*, Z*c*, *e d* perpendiculares ipſi AF; & per puncta G, H, I, K, & L agantur lineæ ipſi AF parallelæ, ſecantes R*a* in *f* & *a*, Y*b* in *g* & *b*, Z*c* in

in *b* & *c*, *ed* in *i* & *d*; denique ex S ducatur SX parallela lineæ AF, producaturque tangens TS uſque in N.

Propter rectum angulum NCQ, erit CM ad CQ, ut MN ad NC. Atqui MN eſt ad NC, ut SX ad ST. Quare erit SX ad ST, ut CM ad CQ. Et quia CM eſt ad CQ, ut z ad MI, erit & SX ad ST, ut z ad MI, ac proinde rectangulum ſub SX ſive YZ & MI ſive Y*b* æquale rectangulo ſub ST & z. Eodem modo demonſtrabitur, rectangulum *ce* eſſe æquale ▭lo ſub TV & z, & ▭ *d*F ∞ ▭ VE, z, & ▭ *a*Y ∞ ▭lo ſub RS & z. Quapropter omnia hæc rectangula ſimul ſumpta æqualia erunt rectangulo ſub z & alia recta æquali omnibus tangentibus ſimul ſumptis. Unde cum illud verum ſit, quotcunque rectangula atque tangentes extiterint, & figura ex parallelogrammis conſtans, ſi eorum numerus in infinitum augeatur, deſinat in ſuperficiem AGHIKLF, ac tangentes ſimiliter in lineam curvam ABCDE, liquet ſuperficiem AGHIKLF æqualem eſſe rectangulo ſub z & recta æquali curvæ ABCDE. Quod erat demonſtrandum.

Quomodo autem hinc longitudo datæ curvæ lineæ inveſtigari poſſit, ſequentibus exemplis patebit.

Sit primò curva ABCDE ejus naturæ, ut, ſumpto in linea AF pro libitu puncto M, ductâque perpendiculari MC, ſi AM vocetur x, & MC vocetur y, ſemper yy ſit $\infty \frac{x^3}{a}$. Deinde poſitis AQ $\infty\ \text{ſ}$, CQ $\infty\ v$, & MI $\infty\ z$; erit QM $\infty\ \text{ſ} - x$, & ejus quadratum $\infty\ \text{ſſ} - 2\text{ſ}x + xx$. Cui ſi addatur quadratum ex MC, hoc eſt, yy ſive $\frac{x^3}{a}$, invenietur $\text{ſſ} - 2\text{ſ}x + xx + \frac{x^3}{a} \infty\ vv$.

Propter duas æquales radices mult. juxta meth. Huddenii per $\;0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 0,$

& invenietur $-2\text{ſ}x + 2xx + \frac{3x^3}{a} \infty\ 0$.

Unde AQ ſive $\text{ſ} \infty\ x + \frac{3xx}{2a}$. à qua ſi ſubtrahatur AM $\infty\ x$, remanebit MQ $\infty \frac{3xx}{2a}$, cujus quadratum eſt $\frac{9x^4}{4aa}$. cui adde □ CM ſeu $\frac{x^3}{a}$, & proveniet □ CQ $\infty \frac{9x^4}{4aa} + \frac{x^3}{a}$. Erit jam ut CM $\sqrt{\frac{x^3}{a}}$ ad CQ $\sqrt{\frac{9x^4}{4aa} + \frac{x^3}{a}}$, ita cognita aliqua linea, puta $\frac{1}{3}a$, (licet enim

enim eam pro libitu aſſumere) ad MI ∞z, eritque $z \infty \sqrt{\frac{1}{4}ax + \frac{1}{9}aa}$. Id quod arguit, lineam GHIKL eſſe Parabolam, cujus vertex eſt in Δ, exiſtente $A\Delta \infty \frac{4}{9}a$, & latere recto $\infty \frac{1}{4}a$. ac proinde longitudo lineæ curvæ ABCDE eſt $\sqrt{\frac{v^3}{a}} - \frac{8}{27}a$, exiſtente $\Delta F \infty v$.

Similiter ſi loco $yy \infty \frac{x^3}{a}$ ponatur hæc æquatio $y^4 \infty \frac{x^5}{a}$, aut $y^6 \infty \frac{x^7}{a}$, aut $y^8 \infty \frac{x^9}{a}$, atque ſic porrò in infinitum: invenietur ſemper ſuperficies AGHIKLF ejus naturæ ut quadrari poſſit, ac proinde omnes hæ curvæ in rectam ſunt permutabiles.

Si verò ABCDE ſit Parabola, cujus axis AG, & latus rectum ∞a: invenietur MQ $\infty \frac{2x^3}{aa}$, & ejus quadratum $\infty \frac{4x^6}{a^4}$. cui adde quadratum CM, & habebitur $\frac{4x^6}{a^4} + \frac{x^4}{aa}$ pro $\square$CQ. Hinc ut CM $\frac{xx}{a}$ ad CQ $\sqrt{\frac{4x^6}{a^4} + \frac{x^4}{aa}}$, ſic cognita aliqua linea, puta a, ad MI ∞z: eritque $z \infty \sqrt{4xx + aa}$, & linea GHIKL Hyperbola, cujus axis linea AG, centrum punctum A, latus rectum $\infty \frac{1}{2}a$, & tranſverſum $\infty 2a$.

Quod ipſum docet, longitudinem curvæ Parabolicæ inveniri non poſſe, quin ſimul inveniatur quadratura Hyperbolæ, & vice verſâ.

FINIS.

VITTORIO EMANUELE BIBLIOTECA IN ROMA
BIBLIOTECA NAZ. P.CMA VITTORIO EMANUELE

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google